St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

A n a l y t i s c h e G e o m e t r i e

II

Dr. Stefan Cohn-Vossen.

W S 1929/30, 3st.

Mathematisches Institut der Universität * Göttingen *

Inhaltsverzeichnis.

1. Kapitel.

Elemente der projektiven Geometrie der Ebene.

2. Kapitel.

Kurven zweiter Ordnung.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

3. Kapitel.

Projektive Räume von drei und mehr Dimensionen.

4. Kapitel.

Kollineationen, nichteuklidische Geometrie, Erlanger Programm.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

L i t e r a t u r :

Reye, Geometrie der Lage, Bd. 1 und 2.
(Bd. 3 übersteigt die Höhe dieser Vorlesung.)

Kowalewski, analytische Geometrie.

Für eingehenderes Studium empfehlenswert:

Salmon-Fiedler, Kegelschnitte und

Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes.

Für axiomatische Fragen:

Veblen-Young, Projektive Geometry
(2 Bde., englisch)

Hilbert, Grundlagen der Geometrie.

Sämtliche genannten Werke befinden sich im hiesigen math. Lesezimmer.

1. Kapitel.

Elemente der projektiven Geometrie der Ebene.

Um viele geometrische Beziehungen und ihren analytischen Ausdruck übersichtlicher zu fassen, bedarf es der Einführung " uneigentlicher Elemente" (Punkte, Geraden, Ebenen usw.) Den Anlass dazu gab (Desargues, 1636) die Theorie der Perspektive, deren einfachste Begriffe wir im folgenden Paragraph behandeln. Später wird eine zweite Art uneigentlicher Elemente im Zusammenhang mit den Komplexen Zahlen eingeführt werden.

§. 1.

Vorbereitungen.

Unendlich ferne Punkte und Geraden.

Die Punkte einer Ebene e werden vom "Projektionszentrum" S (S nicht auf e) auf eine"Bildebene" e' (e' nichtparallel e, S nicht auf e') durch folgende Vorschrift abgebildet (" Zentralprojektion " oder " Zentralperspektive") : Das Bild des Punktes P auf e (Fig. 1) ist der Schnittpunkt P' der Geraden S P=p (des "Projektionsstrahls" von P) mit e'.

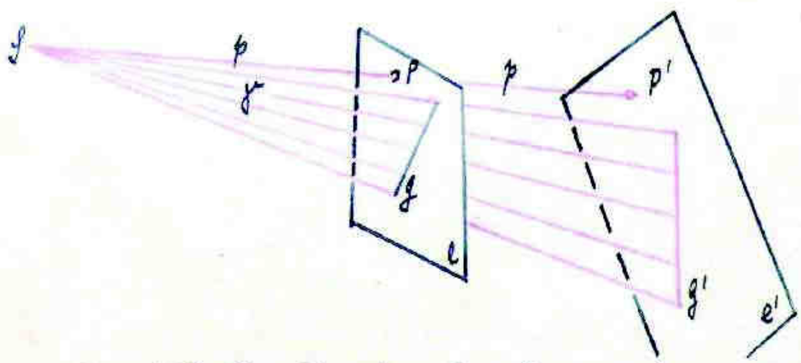


Fig. 1

Durchläuft P eine Gerade g in e, so durchläuft ~~sie~~ p die von S und g aufgespannte Ebene γ, also durchläuft P' die Schnittgerade g' von γ und e'. Wir erkennen:

Die Zentralperspektive führt Geraden in Geraden über.

Die Zuordnung $P \to P'$ ~~mk~~ kann man zerlegen in die Zuordnungen $P \to p$ und $p \to P'$. Die zweite Zuordnung ist vom selben Typ wie die erste, nur in umgekehrter Richtung. Es genügt also die Zuordnung $P \rightleftarrows p$ in beiden Richtungen zu betrachten. Ebenso beherrscht man die Abbildung $g \to g'$, wenn man $g \rightleftarrows \gamma$ beherrscht. Wir betrachten zunächst $P \to p$ und $g \to \gamma$ (Abbildung der Punkte und Geraden von e auf das "Bündel" der Geraden und Ebenen, durch S). Diese Abbildung ist offenbar eindeutig und stetig. Sie führt überdies "inzidente" Elemente in ebensolche über. (Ein Punkt und eine Gerade oder Ebene heissen inzident, wenn der Punkt der Geraden oder der Ebene angehört; eine Gerade und eine Ebene heissen inzident, wenn die Gerade in der Ebene liegt; zwei Punkte, bezw. Geraden bezw. Ebenen heissen ~~in~~incident, wenn sie zusammen fallen).

Dagegen ist zunächst $p \to P$ und $\gamma \to g$ nicht überall definiert (im Definitionsgebiet sind offenbar auch $p \to P$ und $\gamma \to g$ eindeutig, stetig und inzidenztreu). Diejenigen Strahlen p durch S, die e parallel sind (Bezeichnung p_∞), haben keine Bildpunkte, ebenso hat die Ebene γ_∞ durch S parallel e keine Bildgerade.

Wir führen nun in e Punkte P_∞ und eine Gerade g_∞ (" unendlich ferne Punkte ", " unendlich ferne Gerade ") als Bilder der p_∞ und γ_∞ ein, und nennen diese dann und und nur dann mit den übrigen Gebilden der Ebene oder untereinander inzident, wenn die entsprechenden Elemente des Bündels S es sind.

Hieraus folgt:

a) Jede Gerade g ausser g_∞ besitzt genau einen P_∞. denn in der Ebene γ durch S und g gibt es genau eine Parallele p_∞ zu g.

b) zwei von g_∞ verschiedene Geraden g_1, g_2 sind dann und nur dann parallel, wenn sie durch denselben P_∞ gehen. Beweis:

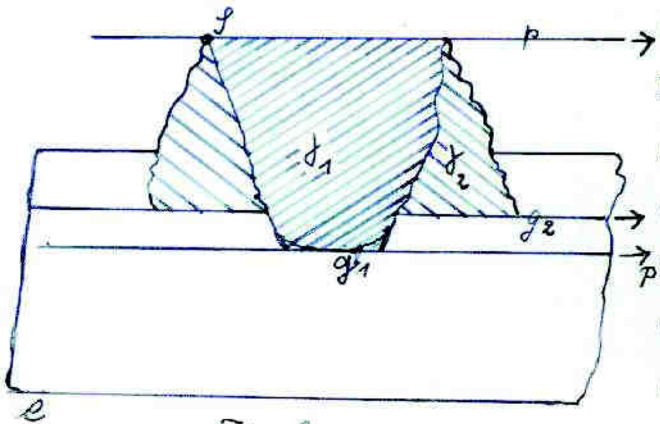


Fig. 2

γ_1, γ_2 haben einen Strahl p gemein; sein Bild P haben also g_1 g_2 gemein; damit g_1, g_2 parallel sind, ist notwendig und hinreichend, dass P_∞ kein eigentlicher Punkt ist, also $P = P_\infty$.

c) aus a) und b) folgt: Beliebig viele Geraden g_1 --- g_n sind dann und nur dann einander parallel, wenn sie durch denselben P_∞ gehen. Bezeichnen wir also alle Geraden durch einen Punkt sowie alle einer festen Geraden parallelen Geraden als "Geradenbüschel" und alle Ebenen durch eine feste Gerade als "Ebenenbüschel", so gibt:

Die Geradenbüschel in e entsprechen umkehrbar eindeutig den Ebenenbüscheln durch S.

d) alle P_∞ liegen auf g_∞ und alle Punkte von g_∞ sind P_∞.

Zusammenfassend:

Indem wir der Ebene e in der angegebenen Weise unendlich ferne Punkte und eine unendlich ferne Gerade zuweisen, wird die Abbildung $(p, \gamma) \rightleftarrows (P, g)$ umkehrbar eindeutig und inzidenztreu. (Hierdurch wird auch die Zentralprojektion $e \rightleftarrows e'$ umkehrbar eindeutig und inzidenztreu, wenn man für e' dieselben Festsetzungen trifft wie für e. Dem P_∞ und g_∞ der einen Ebene entsprechen die Fluchtpunkte und der Horizont in der Bildebene). Wir nennen jede Ebene mit Einschluss ihrer unendlich fernen Elemente eine "projektive" Ebene.

II. Dualitätsprinzip.

In der projektiven Ebene gibt es keinen Parallelismus; zwischen Punkten und Geraden bestehen dieselben "Verknüpfungsaxiome" wie zwischen den Geraden und Ebenen eines Bündels :

Bündel:	Projektive Ebene:
2 Geraden bestimmen genau eine mit beiden inzidente Ebene.	2 Punkte bestimmen genau eine mit beiden inzidente Gerade.
2 Ebenen bestimmen genau eine mit beiden inzidente Gerade.	2 Gerade bestimmen genau einen mit beiden inzidenten Punkt.

Diese beiden Axiome der projektiven Ebene haben also die Symmetrieeigenschaft, dass sie in sich selber übergehen, wenn man die Worte "Punkt" und "Gerade" miteinander vertauscht.

Also ergibt jeder Satz in der projektiven Ebene, der aus jenen Axiomen allein folgt, einen weiteren richtigen

Satz, wenn man in ihm die Worte "Punkt" und "Gerade" vertauscht und alle Inzidenzen ungeändert lässt. (Dualitätsprinzip).

Eine Abbildung der projektiven Ebene auf sich heisst " Dualität" oder " Reziprozität", wenn sie umkehrbar eindeutig und inzidenztreu die Punkte den Geraden und die Geraden den Punkten zuordnet. In der "euklidischen Ebene " (Ebene mit Ausschluss der unendlich fernen Elemente) gibt es keine Reziprozität, weil parallele Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben, dagegen zwei Punkte stets eine gemeinsame Gerade.

Aufgabe 1.

Ordnet man in S-Bündel jedem Strahl die auf ihm senkrechte Ebene und jeder Ebene den auf ihr senkrechten Strahl zu, so entsteht in e eine Reziprozität.

III.

Zur Topologie der projektiven Ebene.

Abgesehen von den unendlich fernen Elementen von e ist die Abbildung $S \rightleftarrows e$ umkehrbar stetig, d.h. konvergenten Punktfolgen in e entsprechen konvergente Geradenfolgen durch S und umgekehrt. In den P_∞ ist die Konvergenz nicht definiert. Wir definieren nun allgemein Punktfolgen in e als konvergent, wenn es die zugehörigen Geradenfolgen durch S sind, und sagen von einem Punkt in e, er wandert stetig, wenn es der Bildstrahl tut.

Es entsteht das Problem, eine Fläche im Raum zu finden, die auf das S-Bündel, also auch auf die projektive Ebene umkehrbar eindeutig und stetig im gewöhnchen Sinne abbildbar ist. Solche Flächen sind durch die Modelle

Nr. 296, 297, 346, 373 Fach 53

der hiesigen Sammlung dargestellt.

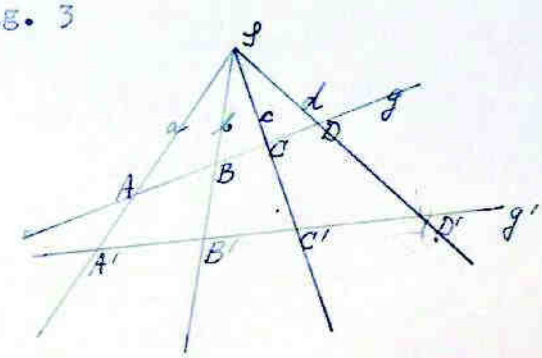
Aufgabe 2:

P, Q, g in e gegeben (P und Q nicht auf g, sonst beliebig). Man kann stets stetig von P nach Q kommen, ohne g zu treffen. Mit anderen Worten: Eine Gerade zerlegt die projektive Ebene nicht.

IV.

Das Doppelverhältnis.

Fig. 3



Die Strahlen a,b,c,d durch S treffen g (nicht durch S, sonst beliebig) in A, B, C, D und g' in A', B', C', D'

Wir setzen

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

("Doppelverhältnis von A,B,C,D" weil $(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$

Dann gilt der Satz, der schon Pappus bekannt war:

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D').$$

Beweis:

g habe von S den Abstand h. a,b,c,d mögen auch die Strecken AS, BS, CS, DS bezeichnen. Dann ist

$$\Delta\ A\,B\,S = 1/2\ A\,B.\ h = 1/2\ a\,b\,\sin(a,b).$$

Also durch Erweitern und Kürzen:

$$(ABCD) = \frac{AC\cdot h\ \cdot\ BD\cdot h}{AD\cdot h\ \cdot\ BC\cdot h} = \frac{a\ c\ \sin(a,c)\ b\ d\ \sin(b,d)}{a\ d\ \sin(a,d)\ b\ c\ \sin(b,c)}$$

$$= \frac{\sin(a,c)}{\sin(a,d)}\ \frac{\sin(b,d)}{\sin(b,c)}$$

Dieser Ausdruck hängt nur von den vier Strahlen durch S, nicht mehr von g ab. Er heisse (a,b,c,d) " Doppelverhältnis von a,b,c,d." Wir haben

$$(A\,B\,C\,D) = (a,\ b,\ c,\ d).$$

Ebenso natürlich:

$$(A'B'C'D') = (a,b,c,d)$$

hieraus $(A\,B\,C\,D) = (A'B'C'D')$.

<u>Aufgabe 3:</u>

Man beweise mit derselben Methode:

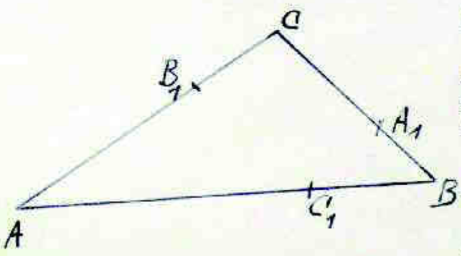


Fig. 4.

Projiziert man Fig. 4, so bleibt

$$\frac{A\,C_1\ \cdot\ B\,A_1\ \cdot\ C\,B_1}{B\,C_1\ \cdot\ C\,A_1\ .\ A\,B_1}$$ ungeändert.

vergl. Severi Complementi di geometria projektiva p.50 (Bologna 1906)

Ist einer der Punkte A,B,C,D, z. B. D, der unendlich ferne Punkt von g (also d ∥ g), so ist, wenn wir in diesem Fall (A B C D) = (a,b,c,d) <u>definieren</u>,

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{A\,C}{B\,C}$$

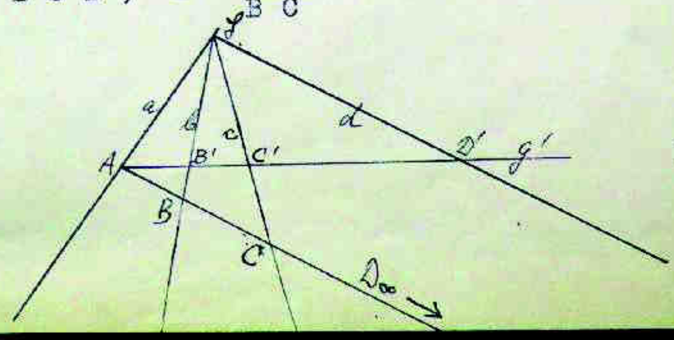


Fig. 5.

Denn lassen wir (Fig. 5) g' gegen g so konvergieren, dass g' stets d schneidet, so ist

$$(ABCD) = (a,b,c,d) = (A'B'C'D') = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'}$$

für $g' \to g$ wird $\frac{A'C'}{B'C'} \to \frac{AC}{BC}$ und $\frac{B'D'}{A'D'} \to 1$, woraus die Behauptung folgt.

Um zu drei Strahlen b,c,d einen Strahl a zu finden, der mit b,c,d vorgegebenes Dv. $(a,b,c,d) = x$ hat, ziehe man gemäss Fig. 5 eine beliebige Parallele g zu d, und bestimme A auf g so, dass

$$\underline{AC = x \cdot BC.}$$

AS ist der gesuchte Strahl.

A ist zu gegebenem B, C, x eindeutig auf g bestimmt (vergl. Ausarbeitung anal. Geometrie I §§ 1, 2), also ist auch a eindeutig bestimmt.

Zu drei Strahlen eines Büschels gibt es genau einen vierten, der mit den gegebenen ein vorgegebenes Doppelverhältnis bildet.

Um zu drei Punkten B, C, D einer Geraden g einen vierten A mit $(A\,B\,C\,D) = x$ zu finden, genügt es, von einem beliebigen Punkt S ausserhalb g aus $SB = b$, $SC = c$, $SD = d$, zu ziehen und nach dem vorigen den Strahl a durch S mit $(a,b,c,d) = x$ zu konstruieren; a schneidet g in A. A ist also eindeutig bestimmt.

Zu drei Punkten einer Geraden gibt es genau einen vierten, der mit den gegebenen ein vorgegebenes Doppelverhältnis bildet.

V.

Perspektivität und Projektivität.

Projektivität nennen wir die Abbildung einer geraden Punktreihe (d.h. der Punkte einer Geraden mit Einschluss ihres unendlich fernen Punktes) auf eine andere, wenn sie umkehrbar eindeutig und doppelverhältnistreu ist. Die Perspektivität ist also eine Projektivität. Ebenso jede Abbildung, die durch mehrere Perspektivitäten hintereinander erzeugt wird, d.h. die Abbildung $g \to g'$, die durch die Perspektivitäten $g \to g'' \to g''' \ldots\ldots \to g^{(n)} \to g'$ definiert ist.

Eine Projektivität $g \barwedge g'$ (Zeichen $\barwedge$ für projektive Abbildung) ist durch die Abbildung dreier Punkte eindeutig festgelegt.

Denn ist $A, B, C \barwedge A' B' C'$ und D ein beliebiger Punkt auf A B, so ist sein Bild D' durch die Gleichung $(A' B' C' D') = (A B C D)$ eindeutig bestimmt.

Eine Projektivität $g \barwedge g'$ ist dann und nur dann eine Perspektivität (Zeichen $g \overset{S}{\barwedge} g'$, S das Projektionszentrum), wenn der Schnittpunkt P (g, g') sein eigener Bildpunkt ist.

Dass das Festbleiben von P notwendig ist, folgt aus der Definition der Perspektivität; Das Bild P' (auf g') des Punktes P von g ist P' (S P, g'). Also P' = P.

Dass die Bedingung auch hinreicht, folgt aus Fig.6

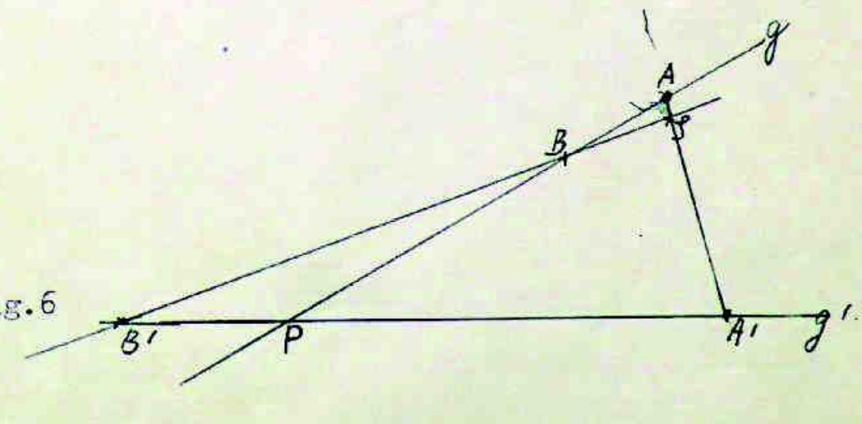


Fig.6

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

seine A', B' auf g' die Bilder zweier beliebigen Punkte A, B auf g, und sei S=S (A A', B B'). S ist eindeutig bestimmt, sonst wäre (A A') = (B B') also (A B) = (A' B'); g = g' entgegen der Voraussetzung. Die Perspektivität $g \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} g'$ leistet die Abbildung $P\,A\,B \barwedge P\,A'\,B'$; sie stimmt also mit der vorgegebenen Projektivität in der Abbildung dreier Punkte überein; daher ist sie mit dieser identisch. q. e. d.

<u>Jede Projektivität $g \barwedge g'$ lässt sich aus höchstens zwei Perspektivitäten erzeugen.</u>

Denn sei die gegebene Abbildung bestimmt durch $A\,B\,C \barwedge A'\,B'\,C'$ (Fig.7). Dann ziehe man eine beliebige Gerade g" durch A' und bilde

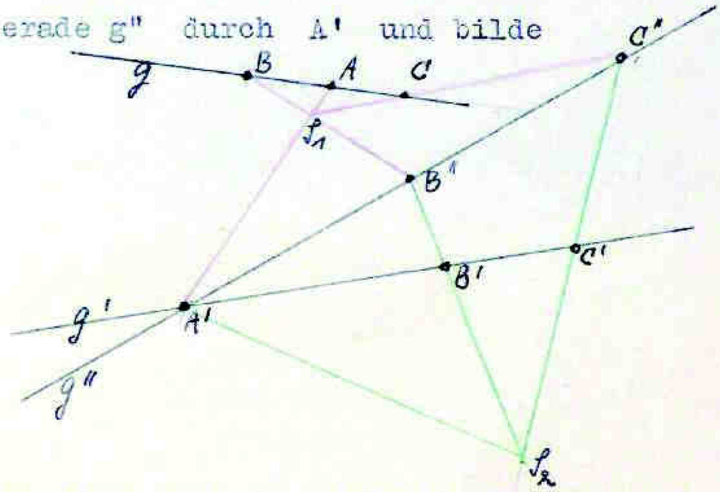


Fig.7.

von einem beliebigen Punkt S_1 auf A A' ausserhalb g und g": $g \overset{S_1}{\underset{\wedge}{=}} g''$. Hierbei seien B" C" die Bilder von B C. Also $A\,B\,C \overset{S_1}{\underset{\wedge}{=}} A'\,B''\,C''$. Die Projektivität $g'' \barwedge g'$, die durch $A'\,B''\,C'' \barwedge A'\,B'\,C'$ gegeben ist, ist nach dem Vorigen eine Perspektivität. Also ist in der Tat $A\,B\,C \barwedge A'\,B'\,C'$ erzeugt aus $A\,B\,C \overset{S_1}{\underset{\wedge}{=}} A'\,B''\,C'' \overset{S_2}{\underset{\wedge}{=}} A'\,B'\,C'$.

<u>Eine Projektivität $A\,B\,C \barwedge A_0B_0C_0$ von g auf sich selbst ist erzeugbar aus höchstens drei Perspektivitäten.</u>

Sei g' eine beliebige von g verschiedene Gerade durch

A und sei S ausserhalb g und g'. Vermöge $g \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} g'$ sei

$A\,B\,C \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} A\,B'\,C'$. Die Abbildung $A\,B'\,C' \barwedge A_o\,B_o\,C_o$ ist nach dem Vorigen aus zwei ~~Pro~~ Perspektivitäten ~~ergänzbar.~~ erzeugbar.
Also

$$(A\,B\,C \barwedge A_o\,B_o\,C_o) = (A\,B\,C \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} A\,B'\,C' \barwedge A_oB_oC_o)$$

aus dreien.

Eine Abbildung einer projektiven Ebene e auf eine andere e' oder sich selbst, heisst Projektivität (Zeichen $e \barwedge e'$), wenn sie die Punkte und Geraden von e auf die Punkte und Geraden von e' oder sich selbst

1) umkehrbar eindeutig und inzidenztreu
2) doppelverhältnistreu für jedes Punkt~~quer~~ quadrupel

einer Geraden abbildet.

Die Perspektivitäten ($e \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} e'$) sind Projektivitäten.

Aufgabe:

$e \barwedge e'$ ist dann und nur dann $e \overset{p}{\underset{\wedge}{=}} e'$, wenn die Schnittgerade (e, e') punktweise festbleibt.

Wir untersuchen jetzt, ob jede Projektivität einer Ebene auf sich selbst durch Perspektivitäten (auf andere Hilfsebenen) erzeugbar ist.

Hilfsatz 1.

Vor.: A, B, C, D vier beliebige Punkte allgemeiner Lage in e (d.h. keine drei auf einer Geraden).
D'' auf $A\,D$, $\neq A$ $\neq \delta(B\,C, A\,D)$, sonst beliebig.

Beh.: Durch zwei Perspektivitäten lässt sich

$A\,B\,C\,D$ in $A\,B\,C\,D''$ überführen.

Beweis: (Fig. 8.)

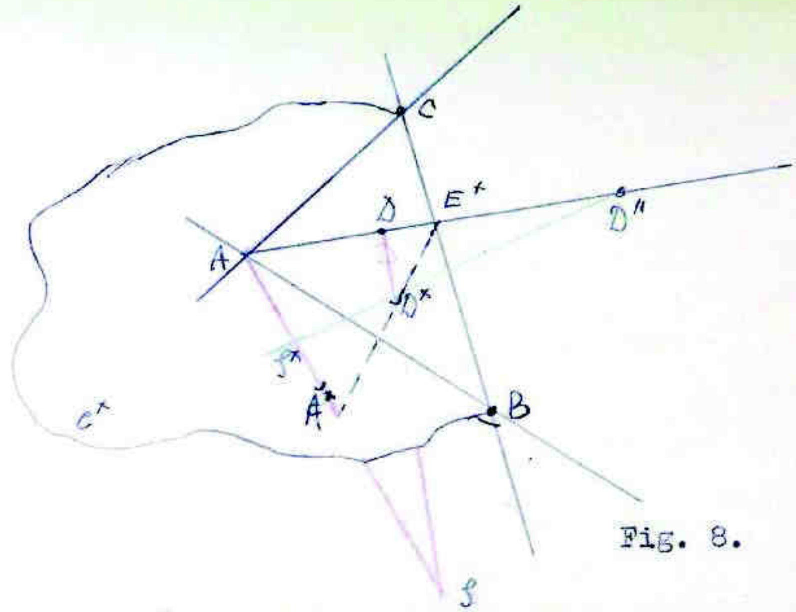


Fig. 8.

Die Ebene $e^\times \neq e$ sei beliebig durch B C gelegt. Von einem beliebigen Punkt S ausserhalb e und $e^\times$ wird $e \overset{S}{\barwedge} e^\times$ projiziert. Dabei sei $A\,D \overset{S}{\barwedge} A^\times D^\times$.

$D^\times$ und D'' liegen n. V. beide in der Ebene A D S. A S und $D^\times D''$ haben also einen Schnittpunkt $S^\times$. Die Abbildung

$$e^\times \overset{S^\times}{\barwedge} e \text{ liefert } A^\times D^\times \overset{S^\times}{\barwedge} A\;D''.$$

Wir haben also in der Tat

$$A\,B\,C\,D \overset{S}{\barwedge} A^\times B\,C\,D^\times \overset{S^\times}{\barwedge} A\,B\,C\,D''.$$

<u>Hilfssatz 2</u>:

Vor: A, B, C, D und A B C D' allgemeiner Lage in e, sonst beliebig.

<u>Beh.</u>: Durch vier Perspektivitäten lässt sich

A B C D in A B C D'

überführen.

Beweis: Sei D'' der Schnittpunkt von A D und B D' (Fig.9)

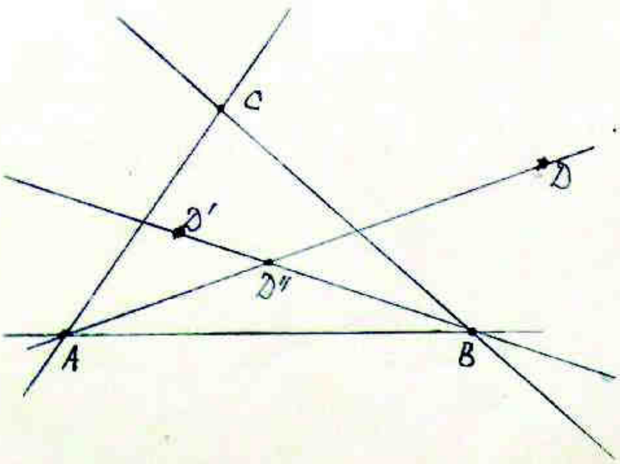


Fig. 9.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Läge D'' auf einer der drei Geraden AB, BC, CA, so gälte das Gleiche von einer der Geraden AD oder BD', entgegen der Voraussetzung.

Nach Hilfsatz 1 lässt sich

$$A\ B\ C\ D \barwedge A\ B\ C\ D''$$

aus zwei Perspektiv~~en~~itäten erzeugen, Ebenso

$$A\ B\ C\ D'' \barwedge A\ B\ C\ D'$$

(indem man in Hilfssatz 1 A, D, D'' durch B, D'' D' ersetzt). Also

$$A,\ B,\ C,\ D \barwedge A\ B\ C\ D'' \barwedge A\ B\ C\ D'$$

aus vieren.

<u>Hilfssatz 3.</u> <u>Vor.</u> Die acht Punkte

$$A,\ B,\ C,\ D,\ A',\ B',\ C',\ D'$$

seien in allgemeiner Lage in e, sonst beliebig.

<u>Beh.:</u> Man kann

$$A\ B\ C\ D \barwedge A'\ B'\ C'\ D'$$

durch endlich viele ~~Projektivitäten~~ Perspektivitäten erzeugen.

<u>Beweis:</u> Wir zerlegen die Abbildung in

$$ABCD \barwedge ABCD' \barwedge ABC'D' \barwedge AB'C'D' \barwedge A'B'C'D'.$$

Auf jede Teilabbildung ist Hilfssatz 2 anwendbar.

<u>Hilfssatz 4.</u> Vier Punkte $A, B, C, D,$ allgemeiner Lage in e lassen sich in vier beliebige Punkte $A'B'C'D'$ allgemeiner Lage in e durch endlich viele Perspektivitäten überführen.

<u>Beweis:</u> Haben die acht Punkte

$$A,\ B,\ C,\ D,\ A',\ B',\ C',\ D'$$

allgemeine~~r~~ Lage, so genügt Hilfssatz 3. Sonst lassen sich

$$A'',\ B'',\ C'',\ D''$$

so bestimmen, dass die acht Punkte

$$A, \cdot -, D, A'', \cdot -, D''$$

und die acht Punkte

$$A'', --, D'', A', -- D'$$

allgemeine Lage haben. Wir wenden Hilfssatz 3 zweimal an, indem wir die Abbildung in

$$A \cdot - \cdot D \;\bar{\wedge}\; A'' --- D'' \;\bar{\wedge}\; A' --- D'$$

zerlegen.

Satz 1:

Eine Projektivität der Ebene auf sich oder eine andere Ebene ist durch die Abbildung von vier Punkten allgemeiner Lage eindeutig bestimmt.

Beweis: (Fig. 10)

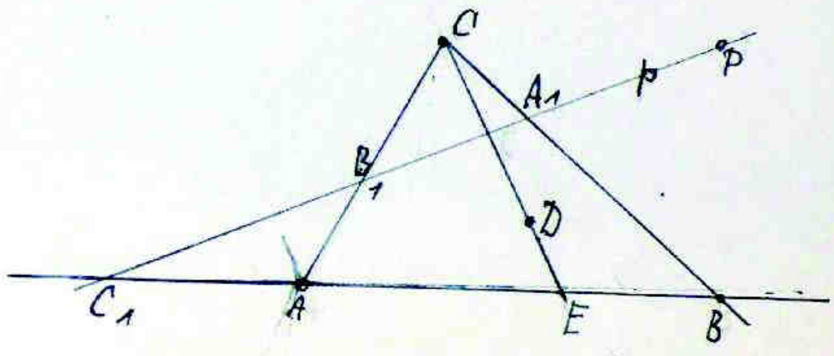


Fig. 10

Wenn die Bilder der Punkte allgemeiner Lage

A, B, C, D

bestimmt sind, so auch die Bilder der Geraden

A B und C D,

also auch das ihres Schnittpunktes E. Weil A, B, C, D allgemeine Lage haben, ist E von A, B verschieden. Da von der Geraden A B die Bilder dreier Punkte A B E bestimmt sind, so nach dem Früheren die Bilder aller Punkte dieser Geraden. Entsprechendes gilt von A C und B C. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene ausserhalb dieser drei Geraden, und p eine Gerade durch P, die jene drei Geraden in

$$A_1 \; B_1 \; C_1$$

trifft, so sind die Bilder von

$$A_1 \; B_1 \; C_1,$$

also die aller Punkte von p, also auch das von P bestimmt; wie behauptet war.

<u>Satz 2:</u> <u>Jede Projektivität einer Ebene auf sich oder eine andere Ebene lässt sich aus endlich vielen Perspektivitäten erzeugen. Die Bilder von 4 Punkten allgemeiner Lage kann man willkürlich vorgeben.</u>

<u>Beweis:</u>

Es genügt, den Satz für Projektivitäten $e \barwedge e$ zu beweisen. Denn eine Projektivität $e \barwedge e'$ kann ich durch eine beliebige Perspektivität in

$$e \doublebarwedge e' \barwedge e'$$

zerlegen. Seien nun

$$A \quad B \quad C \quad D$$

vier Punkte allgemeiner Lage von e und $A' \; B' \; C' \; D'$ ihre vorgegebenen Bilder. Dann kann man nach Hilfssatz 4 durch endlich viele Perspektivitäten eine Projektivität

$$A \; B \; C \; D \barwedge A' \; B' \; C' \; D'.$$

herstellen und nach Satz 1 gibt es keine weitere Projektivität dieser Art.

Die folgenden Begriffe und Sätze stehen denen über projektive bezw. perspektive Punktreihen dual gegenüber.

Zwei Geradenbüschel heissen projektiv aufeinander abgebildet, wenn jedem Strahl des einen Büschels umkehrbar eindeutig einer des andern entspricht, sodass das Doppelverhältnis vierer beliebiger Strahlen des einen Büschels stets gleich dem der Bildstrahlen ist.

Perspektivität heisst die Abbildung zweier Geradenbüschel, bei der die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Gerade durchlaufen. Diese heisst Achse der Perspektivität. (Sie entspricht dem Projektionszentrum bei der Perspektivität zweier Punktreihen.)

Jede Perspektivität zweier Geradenbüschel ist eine Projektivität.

Jede Projektivität zweier Büschel ist durch die Abbildung dreier Strahlen bestimmt.

Eine Projektivität zweier Geradenbüschel ist dann und nur dann eine Perspektivität, wenn die Verbindungsgerade der Scheitel sich selbst entspricht.

Beweis: (Fig. 11)

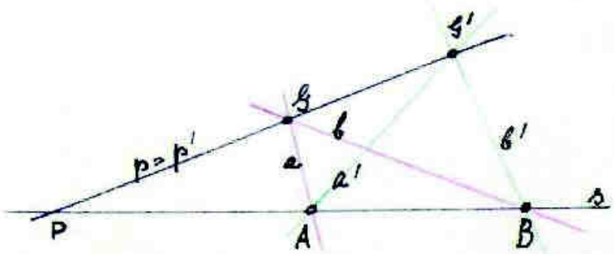


Fig. 11.

Sind die Büschel mit den Scheiteln G, G' perspektiv mit der Achse s, und ist P = P (G G',s), so entsprechen sich definitionsgemäss G P und G' P; d.h. G G' entspricht sich selbst.

Ist umgekehrt G G' = p sein eigenes Bild (p=p') und seien a, a' und b, b' zwei beliebige Paare entsprechender Strahlen p mit den Schnittpunkten A (a,a'), B (b,b'). Dann betrachten wir die Perspektivität $G \overset{s}{\underset{\wedge}{=}} G'$ mit der Achse s (A, B). Sie hat mit der gegebenen Projektivität die Abbildung dreier Elemente gemein

$$(p, a, b \barwedge p, a', b'),$$

ist also mit ihr identisch.

Auch im Ebenenbüschel lässt sich das Doppelverhältnis vierer Elemente definieren. Schneidet man nämlich das Büschel durch eine Ebene e (Fig. 12), die die Achse s des Büschels in S durchstößt, so entsteht in e ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S. Als Doppelverhältnis vierer Ebenen aus (s) bezeichnen wir das der entsprechenden vier Geraden aus (S). Dies Doppelverhältnis ist von der Wahl von e unabhängig. Schneiden wir das Ebenenbüschel (s) durch eine

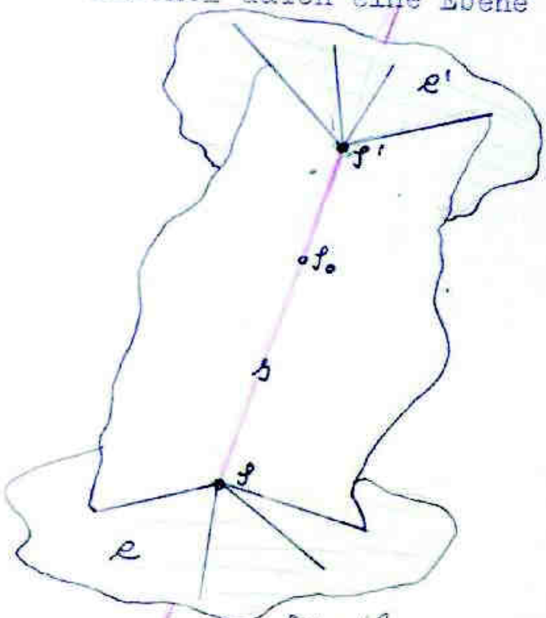


Fig. 12.

zweite Ebene e', so entsteht ein Strahlenbüschel (S'), dessen Strahlen wir aus den entsprechenden von (S) erhalten können, wenn wir von einem beliebigen Punkt S_0 von s aus e auf e' projizieren. Alle Doppelverhältnisse entsprechender Strahlen in (S) und (S') sind also in der Tat gleich.

Das Doppelverhältnis vierer Ebenen eines Büschels ist gleich ~~noch~~ dem Doppelverhältnis ihrer vier Durchstosspunkte mit einer beliebigen Geraden, die die Achse nicht trifft.

Zum Beweis schneiden wir das Büschel mit einer beliebig durch die Geraden gelegten Ebene.

In ihr entsteht ein Strahlenbüschel. Den vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen vier Strahlen a,b,c,d, die durch die Durchstosspunkte A, B, C, D gehen, also (A,B,C,D) = (a,b,c,d). Definitionsgemäss ist (a,b,c,d,) aber gleich ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

VI. Proportion und Doppelverhältnis.

Wir wollen mit dem Lineal allein zu drei Punkten B, C, D einer Geraden g den "vierten harmonischen" A finden, d.h. den Punkt, der

$$(A, B, C, D) = - 1$$

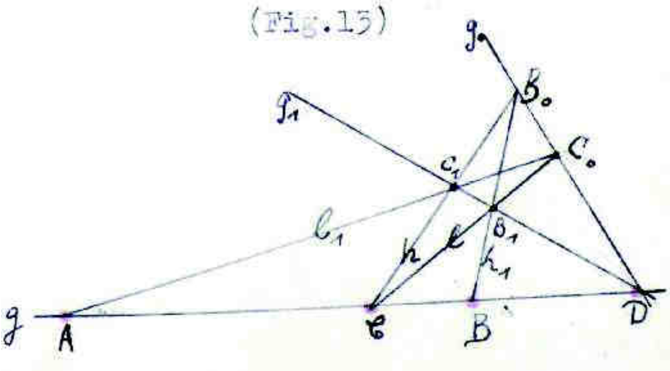
erfüllt.

Wir legen (Fig. 13) durch D zwei Geraden g_0, g_1 und durch B eine Gerade h, die g_0, g_1 in B_0, B_1 trifft.

$B_0 C = h$ treffe g_1 in C_1,

$C B_1 = \ell$ treffe g_0 in C_0. $C_0 C_1 = \ell_1$, trifft dann g im gesuchten Punkt A.

(Fig.13)



Beweis:

S sei ein beliebiger Punkt ausserhalb der Zeichenebene e. e' sei eine beliebige Ebene parallel der Ebene (S, g_0).

Wir projizieren e von S auf e'. Das Bild g' von g ist dann dem Projektionsstrahl S D parallel, also

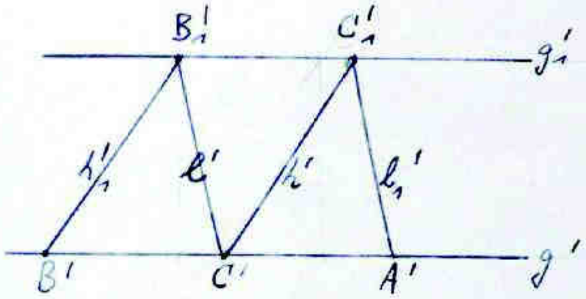
$$(A, B, C, D) = \frac{A' C'}{B' C'} .$$

(A', B', C' die Bilder von A, B, C).

g_0 wird auf die unendlich ferne Gerade von e' abgebildet. Geraden in e, die sich auf g_0 schneiden, gehen also über in Parallelen in e'. Das in e' entworfene Bild von Fig. 13 ist also durch Fig. 14 gegeben

$$(g'_1 \parallel g', \quad h'_1 \parallel h', \quad l'_1 \parallel l'):$$

Fig. 14.



aus der Figur folgt unmittelbar

$$B'C' = B'_1C'_1 = C'A',$$

also in der Tat

$$\frac{A'C'}{B'C'} = -1 = (A,B,C,D)$$

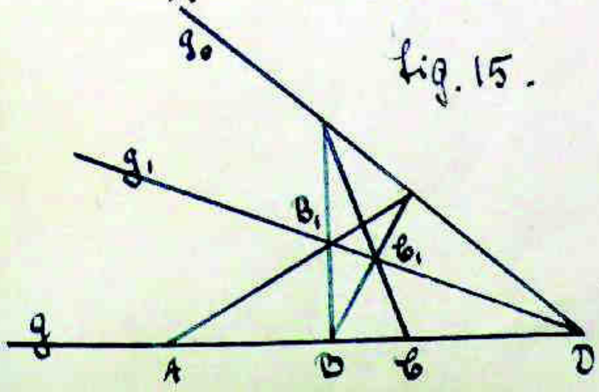
(vergl. hierzu und zum folgenden das 1. Kapitel der Ausarbeitung "anal. Geometrie I").

Dasselbe Abbildungsprinzip erlaubt offenbar auch für jedes beliebige rationale X die Konstruktion des Punkts A mit $(A, B, C, D) = X$ mit dem Lineal allein. Denn der Punkt A' mit

$$\frac{A'C'}{B'C'} = X$$

ist durch Parallelen Konstruktionen in e' bestimmbar; ihnen entsprechen in e Konstruktionen mit dem Lineal allein, da Parallelen in e' in solche Geraden in e übergehen die sich auf g_0 schneiden. In Fig. 15 ist die Konstruktion für $X = 3$ ausgeführt.

Fig. 15.



~~Fig, 15.~~ Das Abbildungsprinzip führt zum Beweis eines wichtigen Satzes. Wir nennen ~~jede~~ "Kollineation" jede Abbildung einer Ebene auf eine andere oder auf sich, die die Punkte und Geraden der einen Ebene umkehrbar eindeutig, stetig und inzidenztreu auf die Punkte und Geraden der andern abbildet. Jede Projektivität ist eine Kollineation. Wir beweisen nun:

<u>Jede Kollineation ist eine Projektivität.</u>

Wir beweisen zunächst: Eine Kollineation, die vier Punkte allgemeiner Lage festlässt, ist notwendig die Identität. Lässt die Kollineation K der Ebene e in sich die Punkte allgemeiner Lage A, B, C, D fest, so bleiben auch (Fig. 16) die Punkte $A_1 = (BC, AD)$ und $B_1 = (CA, BD)$ sowie die Gerade $AB = c$ fest.

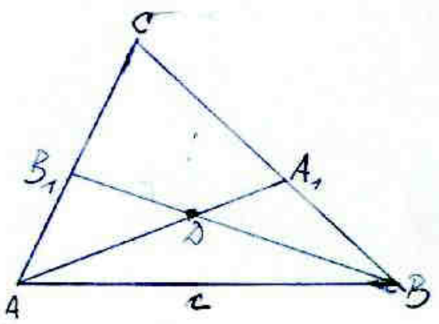


Fig. 16.

S sei ein Punkt ausserhalb e, e' eine beliebige Parallelebene zur Ebene (S, c). Die Perspektivität $e \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} e'$ führt c^* in die unendlich ferne Gerade von e' über. Der Kollineation K in e entspricht also eine solche Kollineation K' in e', die die unendlich ferne Gerade in sich überführt, d.h. die parallelentreu ist. Eine solche Kollineation ist aber eine <u>Affinität.</u> Die Bilder A'_1, B'_1 C' von A_1, B_1, C sind drei eigentliche Punkte allgemeiner Lage in e' (da A_1, B_1, C nicht auf c liegen), die von der Affinität K' festgelassen werden. <u>Also ist K' die Identität.</u> (Ausarbeitung a. G. I, 1. Kapitel), also auch K in e, höchstens die Punkte von c ausgenommen. Es ist aber klar, dass auch die Punkte von c festbleiben, dass also K wirklich die Identität ist, denn ebenso wie oben kann man aus Symmetriegründen auch zeigen, dass K alle Punkte mit allein möglicher Ausnahme z. B. der Geraden BC festlässt, insbesondere also die Punkte von c.

Nun zeigen wir, dass jede Kollineation K eine Projektivität ist. Führt K die Punkte A, B, C, D allgemeiner Lage in A', B', C', D' über, so betrachten wir die Projektivität P, die das auch tut. Wir haben bewiesen, dass eine solche Projektivität existiert. P unterscheidet sich von K durch eine Kollineation, die die vier Punkte A', B', C', D' fest läßt, also durch die Identität, d.h. P ist mit K identisch, K ist eine Projektivität.

§ 2.

Projektive Koordinaten auf der Geraden.

I. Definitionen und Sätze.

Wir wollen die Punkte einer Geraden g so durch Koordinaten bestimmen, dass der unendlich ferne Punkt von g vor den übrigen Punkten von g nicht mehr ausgezeichnet ist; zu diesem Zweck gehen wir auf die Beziehung zwischen Punktreihe und Geradenbüschel zurück.

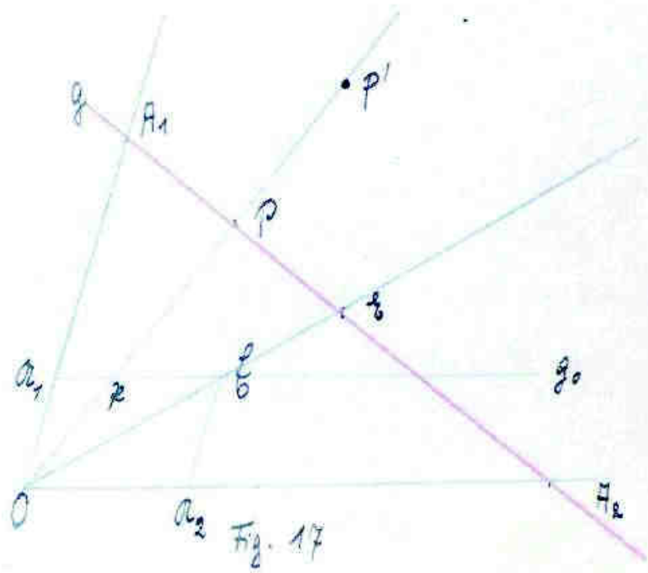


Fig. 17

O sei ein Punkt ausserhalb g (Fig.17). In der Ebene e (O,g) führen wir irgendein affines Koordinatensystem x^1, x^2 mit dem Ursprung O und den Grundvektoren ~~$O A_1$ $O A_2$~~ $\mathfrak{O}\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{O}\mathfrak{A}_2$ ein. E sei der Punkt $(1,1)$ in diesem System.

Als Koordinaten irgendeines Punktes P auf g bezeichnen wir die Koordinaten jedes Punktes P' in e ausser O, der von O aus ~~als~~ auf g in P projiziert wird, d.h. der auf der Geraden $O P$ liegt.

Sind P (y^1, y^2) und P' (z^1, z^2) zwei solche Punkte, so ist $O P = \lambda \cdot O P'$ ($\lambda \neq 0$ reell), also $y^1 = \lambda z^1$, $y^2 = \lambda z^2$. Sowohl (y^1, y^2) als auch (z^1, z^2) sind definitionsgemäss Koordinaten von P; die beiden projektiven Koordinaten eines Punkts von g verschwinden nie gleichzeitig und sind bis auf einen nicht verschwindenden Proportionalitätsfaktor bestimmt.

Offenbar erhält auch der unendlich ferne Punkt von g endliche Koordinaten; nämlich die jedes Punkts (ausser O) auf der Parallele durch O zu g.

A_1, A_2, E seien die Projektionen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}$ auf g von O aus. Dann erhält

A_1 die Koordinaten: x^1 beliebig $\neq 0$, $x^2 = 0$

A_2 " " : $x^1 = 0$, x^2 beliebig $\neq 0$,

E " " : $x^1 = x^2$, sonst beliebig.

A_1, A_2 heissen die <u>Grundpunkte</u>, E der <u>Einheitspunkt</u> unseres Koordinatensystems auf g.

<u>Ist $P\ (x^1, x^2)$ von diesen Punkten verschieden, so ist</u>

$$\frac{x^2}{x^1} = (P\,E\,A_1\,A_2)\,.$$

Zum Beweis legen wir duch $\mathfrak{E}$ die Parallele g_0 zu $O\,A_2$, die $O\,P$ in $\mathfrak{P}$ treffen möge. Dann ist $(P\,E\,A_1A_2) = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}\mathfrak{A}_1}$. Hat nun $\mathfrak{P}$ die Koordinaten y^1, y^2, so ist $y^1 = 1$, $y^2 = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}\mathfrak{A}_1}$, $\frac{y^2}{y^1} = \frac{x^2}{x^1} = y^2$, woraus die Behauptung folgt.

Hiernach kann man projektive Koordinaten auf g auch einführen, ohne g zu verlassen. <u>Wir zeichnen willkürlich drei Punkte A_1, A_2, E auf g aus, geben A_2 die Koordinaten: x^2 beliebig $\neq 0$, $x^1 = 0$, und definieren als Koordinaten x^1, x^2 jedes von A_2 verschiedenen Punkts P irgendzwei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen x^1, x^2, die der Bedingung genügen:</u>

$$\frac{x^2}{x^1} = (P\,E\,A_1\,A_2)\,.$$

(Um allerdings $(P\,E\,A_1\,A_2)$ zu bestimmen, muss man aus g heraustreten).

<u>Ist $P\ (x^1, x^2)$ verschieden von A_1, A_2, so ist $Q\ (-x^1, x^2$</u>

der vierte harmonische Punkt zu $P, A_1 A_2$; $(Q P A_1 A_2) = -1$.

Allgemein gilt nämlich, wenn alle auftretenden Doppelverhältnisse endlich sind:

$$(A B C D) = (A A^1 C D)(A^1 B C D)$$

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{AC \cdot A^1 D}{AD \cdot A^1 C} \cdot \frac{A^1 C \cdot BD}{A^1 D \cdot BC}$$

Also

$$(Q E A_1 A_2) = (Q P A_1 A_2)(P E A_1 A_2)$$

n. V. ist $(P E A_1 A_2)$ endlich und $\neq 0$, sowie

$$(Q E A_1 A_2) = -\frac{x^2}{x^1} = -(P E A_1 A_2).$$

Also in der Tat

$$(Q P A_1 A_2) = \frac{(Q E A_1 A_2)}{(P E A_1 A_2)} = -1$$

Hieraus folgt die Symmetrieeigenschaft harmonischer Punkte: Ist Q harmonisch zu P, A_1, A_2, so auch P zu Q, A_1, A_2,

$$-1 = (Q P A_1 A_2) = (P Q A_1 A_2).$$

Aufgabe: Haben P, Q, R, S bezw. die Koordinaten p^i, q^i, r^i, s^i $(i = 1,2)$ so ist, falls kein Nenner verschwindet,

$$(P, Q, R, S) = \frac{\begin{vmatrix} p^1 & p^2 \\ r^1 & r^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q^1 & q^2 \\ s^1 & s^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p^1 & p^2 \\ s^1 & s^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q^1 & q^2 \\ r^1 & r^2 \end{vmatrix}}$$

(Zum Beweis kann man die Determinanten als Dreiecksinhalte deuten.

II. Projektivitäten auf der Geraden.

Wir gehen in e zu einem neuen affinen Koordinatensystem $(x^{1'}, x^{2'})$ mit demselben Ursprung O über;

$\mathfrak{A}'_1\ \mathfrak{A}'_2\ \mathfrak{E}'$ mögen dabei $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{E}$ entsprechen. Dann gibt es vier Zahlen a^i_k $(i, k = 1,2)$ mit $|a^i_k| \neq 0$, sodass die affine Transformation $(x^{i\prime}) \to (x^i)$ $(i = 1,2)$ die Gestalt erhält:

$$\left(\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right) \qquad \begin{aligned} x^1 &= a^1_1\, x^{1\prime} + a^1_2\, x^{2\prime} \\ x^2 &= a^2_1\, x^{1\prime} + a^2_2\, x^{2\prime} \end{aligned} \qquad (1)$$

Jeder affinen Transformation in e entspricht eine Projektivität in g. Fassen wir also wieder (x^i) und $(x^i)'$ als projektive Koordinatensysteme auf g auf, so stellt (1) eine Projektivität auf g dar.

<u>Jede Projektivität $(x^i)' = \pi(x^i)$ auf g lässt sich in die Gestalt (1) bringen.</u>

Denn jede Projektivität auf g ist durch die Punkte A'_1, A'_2, E' bestimmt, in die irgendwelche drei Punkte A_1, A_2, E übergehen. Wir bestimmen nun in e zwei Parallelogramme O, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}$ und O, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{E}'$, sodass von O aus auf g $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}$ in A_1, A_2, E und $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{E}'$ in A'_1, A'_2, E' projiziert werden. Das ist offenbar immer möglich. Es gibt in e eine Affinität (1), die $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{E}'$ überführt. Als Abbildung in g gedeutet, ist diese Affinität die gesuchte Projektivität.

III. Beziehung zur affinen Koordinatenbestimmung auf der Geraden.

Wir setzen $\frac{x^2}{x^1} = Z$ und bezeichnen Z als <u>inhomogene</u> Koordinate von P (x^1, x^2) bezüglich (E, A_1, A_2.)

Für $P \neq A_2$ hat $z(P\,E\,A_1\,A_2)$ einen endlichen Wert. Es ist $z(A_1) = 0$, $z(E) = 1$. Dem Punkt A_2 legen wir die Koordinaten $z = \infty$ bei. Man nennt daher A_1, A_2 auch "Nullpunkt" und "Unendlichkeitspunkt" des Systems A_1, A_2, E. Z ist im übrigen negativ oder positiv, je nachdem die Strecken $P\,E$ und $A_1\,A_2$ einander trennen oder nicht.

Die allgemeinste Projektivität $z' \to Z$ erhält jetzt die Gestalt:

$$Z = \frac{a_1^2 + a_2^2 z'}{a_1^1 + a_2^1 z'} \qquad |a_k^\nu| \neq 0 \qquad (2)$$

Durch Rückgang zu (1) erkennt man:

der Punkt $z' = \infty$ wird auf dem Punkt $Z = \dfrac{a_2^2}{a_2^1}$

abgebildet, falls $a_2^1 \neq 0$. Er bleibt dagegen fest, d.h. entspricht $z = \infty$, falls $a_2^1 = 0$; wegen $|a_k^\nu| \neq 0$ ist dann sowie $a_1^1 \neq 0$ $a_2^2 \neq 0$, und (2) erhält die Gestalt:

$$Z = \frac{a_1^2}{a_1^1} + \frac{a_2^2}{a_1^1}\, Z',$$

oder wenn wir

$$\frac{a_1^2}{a_1^1} = a, \quad \frac{a_2^2}{a_1^1} = b \quad \text{setzen } (b \neq o):$$

$$Z = a + b\,z' \quad (b \neq o) \qquad (3).$$

<u>Alle und nur die Projektivitäten, die A_2 festlassen, haben die Gestalt (3).</u>

Eine besonders einfache affine Bedeutung hat Z, wenn

A_2 der unendlich ferne Punkt von g ist ($g = g_o \parallel oA_2$ in Fig. 17.) . Dann ist $z = \frac{P\,A_1}{E\,A_1}$ oder $A_1\,P = z\,A_1\,E.$ Z heisst dann affine Koordinate auf g bezgl. A_1, E.

Z ist die Länge von A_1P gemessen mit der Einheitsstrecke $A_1\,E.$ Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $P_i\ (z_i)\ (i=1,\ldots,4)$ erhält den Wert

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = D\,(z_1z_2z_3z_4).$$

Die "gebrochenen linearen Transformationen " (2) sind die allgemeinsten, die $D(z_1 \ldots z_4)$ für alle Werte der z_i $(i = 1 \,..\, 4)$ ungeändert lassen.

Geht g bei einer affinen Transformation der Ebene oder des Raumes in sich über, so werden die eigentlichen Punkte in eigentliche Punkte übergeführt, d.h. der unendlich ferne Punkt von g bleibt fest. Die allgemeinste affine Transformation von g in sich hat also in der affinen Koordinate Z die Gestalt (3) (Translation um den Vektor a . A_1 E und Streckung im Verhältnis b).

Von der affinen Koodinate z' kann man zu den allgemeinsten projektiven Koordinaten x^1, x^2 offenbar durch folgendes Verfahren kommen:

1). Wir führen Koordinaten $x^{1'}, x^{2'} \neq o,o$ durch die Forderung $\frac{x^{2'}}{x^{1'}} = z'$ ein und ordnen $x^{1'} = o$ dem unendlich fernen Punkt von g zu ("homogene affine Koordinaten").

2). wir bestimmen x^1, x^2 aus dem $x^{1'}$, $x^{2'}$ vermöge einer beliebigen Transformation. (1).

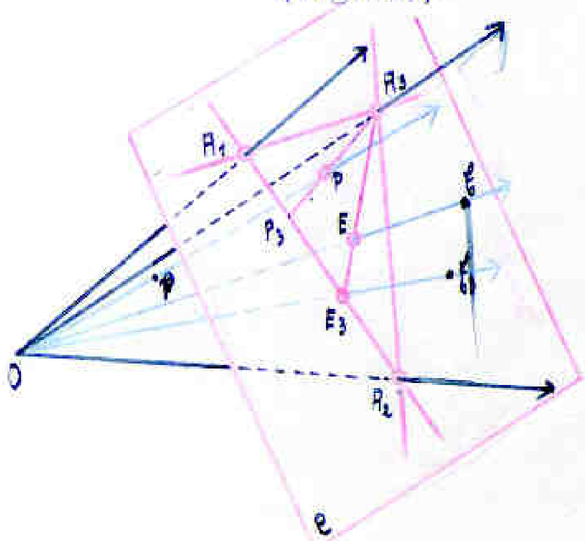
§ 3.

Projektive Koordinaten in der Ebene.

I. Definitionen.

Um in einer Ebene e projektive Koordinaten einzuführen, verfahren wir analog wie bei der Geraden.

(Fig.18.)



Wir machen einen beliebigen Punkt O ausserhalb e (Fig.18) zum Anfangspunkt eines affinen Raumkoordinatensystems x^1, x^2, x^3. Die Achsen mögen e in A_1, A_2, A_3 durchstossen. Ferner sei $\mathfrak{e}$ der Punkt

$$x^1 = x^2 = x^3 = 1$$ und E der Durchstosspunkt von O $\mathfrak{e}$ und e.

<u>Sei $\mathfrak{x}$ (x^1, x^2, x^3) irgendein von O verschiedener Raumpunkt und P der Durchstosspunkt von O $\mathfrak{x}$ mit e, dann nennen wir x^1, x^2, x^3 projektive Koordinaten von P in dem System mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3 und dem Einheitspunkt E.</u>

Sind y^1, y^2, y^3 ebenfalls projektive Koordinaten von P im selben System, so muss der Punkt Q (y^1, y^2, y^3) definitionsgemäss ein von O verschiedener Punkt der Geraden O P sein. Es gibt also ein reelles $\lambda \neq 0$, sodass O Q $= \lambda$ O P, also $y^i = \lambda x^i$ (i=1,2,3). Die drei projektiven Koordinaten eines Punkts verschwinden nie alle zugleich und sind bis auf einen nichtverschwindenden Proportionalitätsfaktor bestimmt. A_1 hat die Koordinaten: x^1 beliebig $\neq 0$, $x^2 = x^3 = 0$. Entsprechendes gilt für A_2, A_3. E hat die Koordinaten $x^1 = x^2 = x^3 \neq 0$, sonst beliebig. Für alle

Punkte von $A_1 A_2$ ist $x^3 = o$, entsprechend für $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$.

Ist P beliebig $\neq A_3, A_2$, so ist

$$\frac{x^2}{x^1} = \cancel{(A_3 P_3 A_3 E_3 A_3 A_1 A_3 A_2)}\ (A_3P, A_3E, A_3A_1, A_3A_2)$$

Sind P_3, E_3, die Projektionen von P, E auf $A_1 A_2$ ~~x~~ von A_3 aus, so ist auch

$$\frac{x^2}{x^1} = (P_3\ E_3\ A_1\ A_2).$$

Da beide Behauptungen äquivalent sind, genügt der Beweis der zweiten. Diese wiederum ist nach § 2 äquivalent damit, dass x^1, x^2 projektive Koordinaten von P_3 auf $A_1 A_2$, bezüglich der Grundpunkte A_1, A_2 und des Einheitspunkts E_3 sind. Dies folgt aber aus der Konstruktion. Denn in der Ebene $O A_1 A_2$ $(x^3 = o)$ sind x^1, x^2 affine Koordinaten mit den Achsen $O A_1$ $O A_2$, und der Punkt E_3 $(x^1 = x^2 = 1)$ dieser Ebene liegt auf $O E_3$.

Nunmehr können wir das projektive Koordinatensystem $(x^1\ x^2\ x^3)$ in der Ebene e mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3 und dem Einheitspunkt E definieren, ohne e zu verlassen:

Liegt P (x^i) zunächst auf der Geraden $A_1 A_2$, so setzen wir $x^3 = o$ und x^1, x^2 gleich den projektiven Koordinaten von P auf dieser Geraden bezüglich A_1, A_2, E_3. Entsprechend für die Punkte von $A_2 A_3$, $A_3 A_1$. Liegt P (x^i) nicht auf dem Dreieck A_1, A_2, A_3, so wählen wir x_1 beliebig $\neq o$ und bestimmen x^2, x^3 aus den Gleichungen:

$$\frac{x^2}{x^1} = (A_3 P, A_3 E, A_3 A_1, A_3 A_2)$$

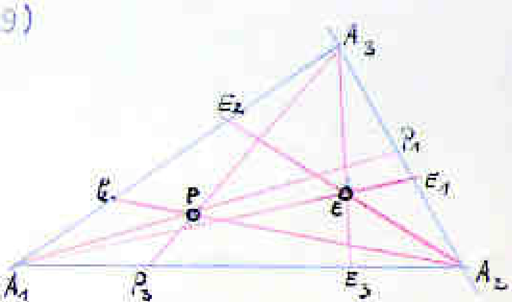
$$\frac{x^3}{x^1} = (A_2 P, A_2 E, A_2 A_1, A_2 A_3).$$

Da diese Festsetzungen mit der Konstruktion Fig. 18 äquivalent sind und diese Konstruktion in den Indizes symmetrisch ist, folgt:

$$\frac{x^3}{x^2} = (A_1 P, A_1 E, A_1 A_2, A_1 A_3).$$

Zwischen den drei Doppelverhältnissen rechts besteht also eine Relation, die mit $\frac{x^1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^1} = 1$ äquivalent ist. Sie erhält, wenn wir P_1, P_2, E_1 E_2 analog ~~ist~~ P_3 E_3 einführen, die Gestalt (Fig.19)

(Fig.19)

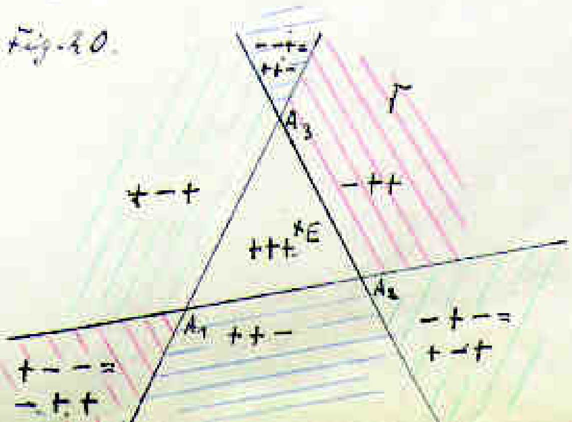


$$(P_1\ E_1\ A_2\ A_3)(P_2\ E_2\ A_3\ A_1)(P_3\ E_3\ A_1\ A_2) = 1$$

Wir haben damit analytisch einen projektiven Satz bewiesen, der für fünf beliebige Punkte P, E, A_1, A_2, A_3 einer Ebene gilt, vorausgesetzt, dass P, A_1, A_2, A_3 sowie E $A_1 A_2 A_3$ allgemeine Lage haben.

Die Seiten des "Fundamentaldreiecks" $A_1\ A_2\ A_3$ zerlegen die projektive Ebene in vier Gebiete (Modell 346, Fach 53 und Fig.20). Sie entstehen aus den acht Oktanten des räumlichen Hilfssystems dadurch, dass je zwei zu O spiegelbildliche Oktanten dasselbe Gebiet ergeben und sind charakteri-

Fig. 20.



siert durch die Vorzeichenkombinationen der Koordinaten. Die Kombination + + + bezw. - - - muss dem Gebiet zukommen, das den Einheitspunkt E enthält; denn E hat die Koordinaten $x^1 = x^2 = x^3 \neq 0$; diese haben in der Tat gleiche Vorzeichen.

II. Kollineationen.

Die Abbildung $(x') \rightarrow (x)$ in e, die durch die Gleichungen

$$x^i = \sum_{k=1}^{3} a_k^i \, x^{k'} \qquad |a_k^i| \neq 0 \qquad (4)$$

definiert wird, ist eine Kollineation, denn diese Gleichungen bestimmen im räumlichen Hilfssystem eine Affinität, die O festlässt.

Jede Kollineation in e lässt sich auf diese Form bringen. Denn jede solche Kollineation ist durch die vier Punkte allgemeiner Lage bestimmt, in die A_1, A_2, A_3, E übergehen. Durch eine räumliche Affinität mit Festhaltung von O, , also durch eine Transformation (4) kann man aber die vier Strahlen OA_1 bis OE in vier beliebige Strahlen allgemeiner Lage überführen, also auch in die Projektionsstrahlen der vorgegebenen Bilder von A_1 bis E; diese Affinität gibt die gewünschte Kollineation.

III. Beziehung zu affinen Koordinatensystemen der Ebene.

Für alle Punkte P (x^1, x^2, x^3) von e, die nicht auf der Geraden $A_1 A_2$ liegen, ist $x^3 \neq 0$. Diese Punkte sind also charakterisierbar durch die Zahlen $z^1 = \frac{x^1}{x^3}$, $z^2 = \frac{x^2}{x^3}$, die "inhomogenen projektiven Koordinaten" von P.

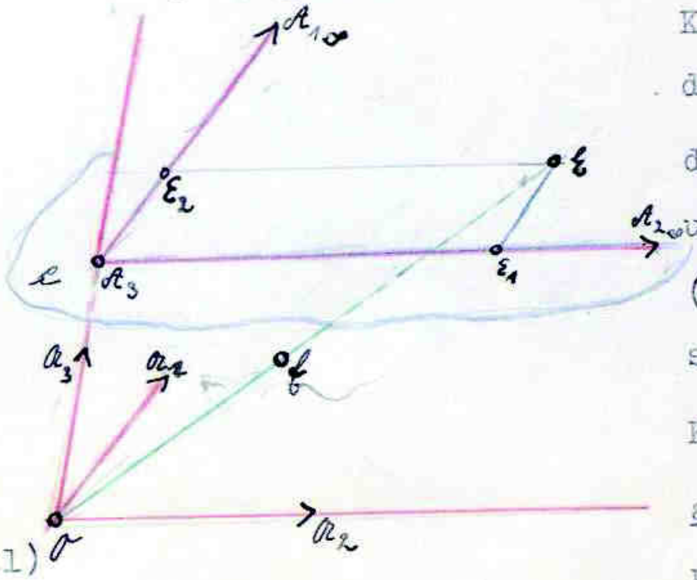
In ihnen erhält jede Kollineation offenbar die Form

$$z^1 = \frac{a^1_1 \; z^{1'} + a^1_2 \; z^{2'} + a^1_3}{a^3_1 \; z^{1'} + a^3_2 \; z^{2'} + a^3_3} \qquad (5)$$

$$|a^i_k| \neq 0$$

$$z^2 = \frac{a^2_1 \; z^{1'} + a^2_2 \; z^{2'} + a^2_3}{a^3_1 \; z^{1'} + a^3_2 \; z^{2'} + a^3_3}$$

Sei insbesondere $A_1 \, A_2$ die unendlich ferne Gerade von e; dann ist $e \parallel (O \; A_1 \; A_2)$ (Fig. 21) und z^1, z^2 werden affine Koordinaten in e mit dem Anfangspunkt A_3 und den Grundvektoren $A_3 \, E_1$ und $A_3 \, E_2$. Die Formeln (5) stellen daher insbesondere die allgemeinste Kollineation der Ebene in <u>affinen</u> (z.B. kartesischen) Koordinaten dar.



(Fig.21)

Soll in diesen Koordinaten eine Kollineation eine Affinität sein, so muss $A_1 \; A_2$ die unendlich ferne Gerade bleiben, also muss die zugehörige <u>räumliche</u> Affinität die Ebene $O \; A_1 A_2$, also $x^3 = 0$, in sich überführen. Diese Ebene ist aber das Bild von $a^3_1 x^{1'} + a^3_2 x^{2'} + a^3_3 x^{3'} = 0$; eine Affinität in e erhalten wir also genau dann, wenn $a^3_1 = a^3_2 = 0$. In diesem Fall wird aber

$$\left| a^i_k \right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} \cdot a^3_3 \; ; \quad \text{also n. V. } a^3_3 \neq 0; \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Setzen wir noch $\frac{a^i_k}{a^3_3} = b^i_k$, so geht (5) über in

$$z^1 = b^1_1 z^{1'} + b^1_2 z^{2'} + b^1_3$$

$$z^2 = b^2_1 z^{1'} + b^2_2 z^{2'} + b^2_3 \qquad \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Das sind die bekannten Formeln für ebene Affinitäten.

Sind $z^{1'}$, $z^{2'}$ affine (z.B. kartesische) Koordinaten in e, so erhält man die allgemeinsten projektiven Koordinaten x^1, x^2, x^3 ohne räumliche Hilfskonstruktion in zwei Schritten.

1) Für die eigentlichen Punkte von e setzen wir $x^{3'} \neq 0$ sonst beliebig, $\frac{x^{1'}}{x^{3'}} = z^{1'}$, $\frac{x^{2'}}{x^{3'}} = z^{2'}$. Um die unendlich ferne Gerade zu erfassen, setzen wir fest, dass alle Geraden von e parallel dem Vektor (a^1, a^2) $\neq$ o,o den unendlich fernen Punkt $x^{1'} = a^1$, $x^{2'} = a^2$, $x^{3'} = 0$ enthalten. Offenbar ist diese Festsetzung im Einklang mit der Raumkonstruktion Fig. 21.
Die $x^{i'}$ (i= 1,2,3) heissen homogene affine Koordinaten.

2) ~~Möbius:~~ Wir bestimmen die x^i aus den $x^{i'}$ durch irgendeine Transformation (4).

Beispiele projektiver Koordinatensysteme:

1) Die Abstände eines Punktes von den drei Seiten eines Dreiecks sind bei passender Vorzeichenfestsetzung projektive Koordinaten.

2) Möbius' "baryzentrische Koordinaten" sind projektive Koordinaten. ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ Ortsvektoren der Dreiecksecken, $\mathfrak{z}$ der von P, dann gilt

~~dann gilt~~

$$\sum_{k=1}^{3} m^k a_k^i = \left(\sum_{k=1}^{3} m^k\right)\xi^i \quad (i = 1,2);$$

für $z^1 = \frac{\xi^1}{\xi^3}$, $z^2 = \frac{\xi^2}{\xi^3}$ ist das äquivalent mit

$$\begin{aligned} m^1 a_1^1 + m^2 a_2^1 + m^3 a_3^1 &= \xi^1 \\ m^1 a_1^2 + m^2 a_2^2 + m^3 a_3^2 &= \xi^2 \\ m^1 + m^2 + m^3 &= \xi^3 \end{aligned} \qquad (6)$$

Wegen $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ sind die m^i $(i=1,2,3)$ durch Auflösung des Systems (6) als unabhängige Linearformen der homogenen affinen Koordinaten ξ^i darstellbar, also in der Tat projektive Koordinaten).

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

§ 4.

Geraden, Büschel, Dualität.

I. Geradengleichung.

Jede Gleichung der Form

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0 \qquad (7)$$

bei der nicht alle u_k verschwinden, stellt eine Gerade dar; denn im räumlichen Hilfssystem bedeutet diese Gleichung eine durch O gehende Ebene. Aus der affinen Raumgeometrie folgt ferner: die Gleichungen

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$$

$$v_1 x^1 + v_2 x^2 + v_3 x^3 = 0$$

stel~~l~~en dann und nur dann dieselbe Gerade dar, wenn die u_k den v_k proportional sind.

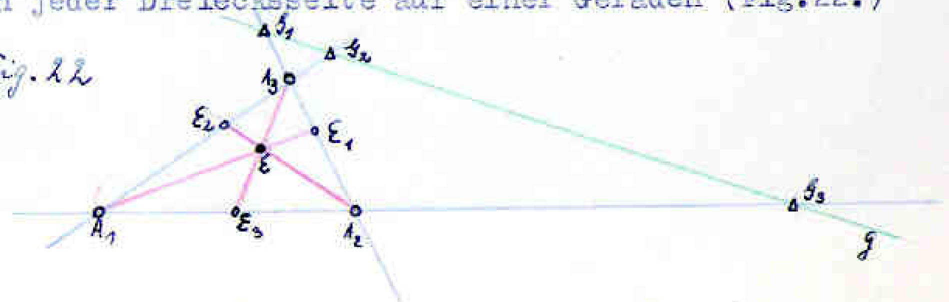
Sonderfälle: Wenn zwei der u_k verschwinden, bleibt $x^1 = 0$ bezw. $x^2 = 0$ bezw. $x^3 = 0$ übrig; die Seiten des Fundamentaldreiecks. Verschwindet ein u_k, z.B. u_1, so erhält man $u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$ Auf jeder dieser Geraden liegt der Fundamentalpunkt A_1 ($x^1 \neq 0$, $x^2 = x^3 = 0$), und umgekehrt stellt (7) nur dann eine Gerade durch A_1 dar, wenn $u_1 = 0$. Entsprechend für A_2, A_3.

Sind alle $u_k \neq 0$, so stehen die Vorzeichen der u_k in Zusammenhang mit der Lage der Geraden zu den 4 Gebieten, die das Fundamentaldreieck bestimmt. Haben z.B. alle u_k dasselbe Vorzeichen, so erhält man alle und nur die Geraden, die mit demjenigen Fundamentalgebi~~s~~t keinen Punkt gemein haben, in dem alle x_k dasselbe Vorzeichen haben. Entsprechend in den übrigen Fällen. Folgerung: Eine Gerade, die nicht durch die Ecken eine~~s~~ beliebig gegebenen Dreiecks geht, hat mit genau einem der 4 Gebi(e)te, in die ~~das~~

das Dreiseit der Ebene zerlegt, keinen Punkt gemein.

Die Lage der Geraden $g: \sum_{i=1}^{3} x^i = 0$ ("Einheitsgerade") relativ zum Fundamentaldreieck und dem Einheitspunkt lässt sich leicht geometrisch kennzeichnen. Ist G_i der Schnittpunkt von g mit $x^i = 0$, so hat z. B. für $i = 1$ G_1 die Koordinaten $x^1 = 0$, $x^2 + x^3 = 0$; $\frac{x^2}{x^3} = -1$; also ist definitionsgemäss $(G_1 E_1 A_2 A_3) = -1$. Entsprechend für $i=2,3$. Es gibt also: projiziert man von den Ecken eines beliebigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ einen Punkt E (nicht auf $A_1A_2A_3$ sonst beliebig) auf die Gegenseiten, so liegen die drei vierten harmonischen Punkte zu den je drei so gegebenen Punkten jeder Dreiecksseite auf einer Geraden (Fig.22.)

Fig. 22



II. Parameterdarstellung.

Sind $P\ (a^i)$ und $Q\ (b^i)$ zwei verschiedene Punkte (also die a^i nicht proportional den b^i) so ist

$$x^i = \lambda a^i + \mu b^i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

bei unabhängig veränderlichen λ, μ (ausser $\lambda = \mu = 0$) eine Parameterdarstellung der Geraden durch $P\ Q$; denn in räumlicher Deutung stellt (8) eine Ebene durch O dar, die von den Vektoren (a^i) (b^i) aufgespannt wird.

λ, μ sind projektive Koordinaten auf dieser Geraden mit den Grundpunkten P, Q und dem Einheitspunkt $R\ (a^i + b^i)$; für den Punkt $S\ (x^i)$ der Geraden, der zu den Werten λ, μ gehört, ist

$$\frac{\mu}{\lambda} = (S, R, P, Q)$$

denn λ, μ sind affine Koordinaten in der Ebene (O P Q) mit den Grundvektoren (a^i) (b^i) und dem Ursprung O. Hieraus folgt nach den Definitionen von § 2 die Behauptung.

III. Geradenbüschel.

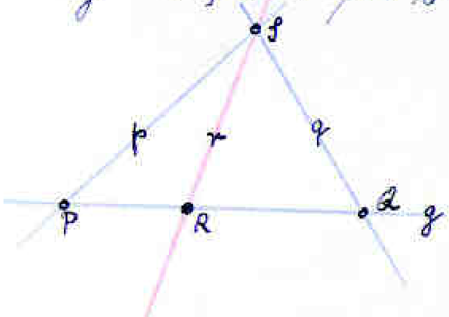
$p(x) = \sum_{i=1}^{3} p_i x^i = 0$ und $q(x) = \sum_{i=1}^{3} q_i x^i = 0$ seien die Gleichungen zweier Geraden p, q mit dem Schnittpunkt S.

P $(\varrho \cdot a^i)$ sei ein Punkt auf p, aber nicht auf q, Q(σ, b^i) ein Punkt auf q, nicht auf p. Dann sind P,Q verschieden und die Verbindungsgrade g (P Q) geht nicht durch S. Bei variablen λ, $\mu \neq 0,0$ durchläuft der Punkt R mit den Koordinaten (Fig. 23)

$$y^i = \lambda \varrho a^i + \mu \sigma b^i$$

die Gerade g. Wir betrachten die Gerade ~~x~~ r, die der Gleichung genügt.

$$r(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda p_i + \mu q_i) x^i = 0.$$ [1]



(Fig.23)

r geht durch S, denn die Koordinaten dieses Punkts erfüllen $p(x) = q(x) = 0$, also $r(x) = 0$. Wir bestimmen nun ϱ, σ so, dass für ~~alle~~ $\lambda = \mu = 1$, also

$$y^i = \varrho a^i + \sigma b^i$$
$$r(x) = p(x) + q(x),$$

R auf r liegt. Dies gibt

$$\sum_{i=1}^{3} (p_i + q_i)(\varrho a^i + \sigma b^i) = 0,$$ oder wegen $\sum p_i a^i = \sum q_i b^i = 0$:

[1] $r(x) = 0$ stellt ausser für $\lambda, \mu = 0,0$ wirklich eine Gerade dar, denn verschwänden alle $\lambda p_i + \mu q_i$ gleichzeitig, so wären die p_i den q_i proportional, also die Geraden p,q nicht verschieden.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

$\sigma \sum p_i b^i + \varrho \sum q_i a^i = 0.$ ϱ, σ sind hierdurch bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Nunmehr wird für beliebiges λ, μ:

$$r(y) = \sum (\lambda p_i + \mu q_i)(\lambda \varrho a^i + \mu \sigma b^i) = \lambda \mu (\sigma \sum p_i b^i + \varrho \sum q_i a^i) = 0$$

r ist der Projektionsstrahl durch R von S aus. Hieraus folgt:

Die Gerade r durchläuft bei variabelm λ, μ das Büschel durch S. Durch r ist λ, μ bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Für $\lambda \neq 0$ ist $\frac{\mu}{\lambda}$ das Doppelverhältnis der vier Geraden

$$\lambda p(x) + \mu q(x) = 0,\ p(x) + q(x) = 0,\ p(x) = 0,\ q(x) = 0.$$

Man nennt deshalb λ, μ projektive Koordinaten im Büschel $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0.$ p, q heissen die Grundstrahlen dieses Koordinatensystems, $p(x) + q(x) = 0$ der Einheitsstrahl.

Durch die Abbildung $(\lambda', \mu') \rightarrow (\lambda, \mu)$ sind die Büschel $\lambda' p'(x) + \mu' q'(x) = 0$ und $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0$ genau dann projektiv aufeinander bezogen, wenn

$$\begin{aligned} \lambda &= a\lambda' + b\mu' \\ \mu &= c\lambda' + d\mu' \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Wichtigster Fall $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$).

IV. Dualitätsprinzip.

Zwei Gleichungen $\sum_{i=1}^{3} u_i x^i = 0,\ \sum_{i=1}^{3} v_i x^i = 0$ bestimmen dann und nur dann dieselbe Gerade g, wenn weder alle u_i noch alle v_i gleichzeitig verschwinden, und wenn die u_i den v_i proportional sind. Man nennt u_1, u_2, u_3 Linienkoordinaten von g. Drei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen u_1, u_2, u_3 sind stets Linienkoordinaten einer Geraden und sind durch diese bis auf einen Porportionalitätsfaktor bestimmt.

Genau wie Kurven durch Gleichungen in Punktkoordinaten dargegestellt werden, ergeben Gleichungen in Linienkoordinaten Mannigfaltigkeiten von Geraden.

Eine lineare Gleichung in Linienkoordinaten

$$\sum_{i=1}^{3} \xi^i u_i = 0 \qquad (\text{nicht alle } \xi^i = 0)$$

stellt die Gesamtheit aller Geraden durch einen Punkt dar, nämlich durch den Punkt ξ^1, ξ^2, ξ^3. Sind (u_i) (v_i) verschiedene Geraden, so ist bei variabelm $\lambda, \mu \neq 0, 0$

$$w_i = \lambda u_i + \mu v_i$$

eine Gerade, die nach III das Büschel durch den Schnittpunkt von (u_i), (v_i) durchläuft; λ, μ sind projektive Koordinaten. Deuten wir also u_i als Punktkoordinaten einer Ebene e', so entsprechen einander in e, e' folgende Gebilde:

e	e'
1) Gerade $\sum_{i=1}^{3} u_i x^i = 0$	1) Punkt u_i
2) Alle Geraden durch den Punkt ξ^i	2) Gerade $\sum \xi^i u_i = 0$
3) Büschel mit Koordinaten λ, μ.	3) Punktreihe mit Koordinaten λ, μ.

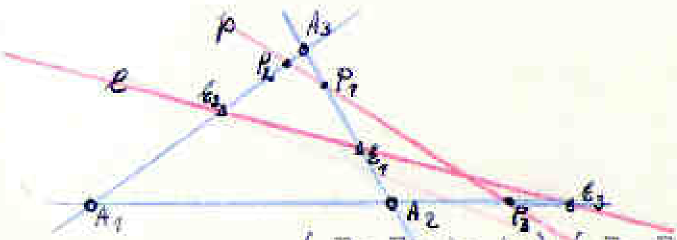
Die Abbildung e $\rightleftarrows$ e' ist eine Korrelation; so heisst jede Abbildung einer Ebene auf eine andere, bei der ~~eine~~ eindeutig stetig und inzidenztreu die Punkte und Geraden der einen den Geraden und Punkten der andern entsprechen.

Die angegebene Korrelation K_0 hat nach III die weitere Eigenschaft, dass vier Strahlen eines Büschels stets das gleiche Doppelverhältnis haben, wie ihre vier Bildpunkte auf der Bildgeraden des Büschels. Hieraus folgt, dass jede Korrelation K diese Eigenschaft hat. Denn die Abbildung P, die K_0 in K überführt, lässt notwendig Punkte und Geraden stetig und inzidenztreu in Punkte und Geraden übergehen, ist also eine Projektivität; entsprechende Elemente in K_o und K haben also gleiche Doppelverhältnisse.

Durch Korrelation (auch Dualität genannt) geht aus jedem projektiven Satz ein weiterer hervor, indem man die Rolle von Punkten und Geraden inzidenztreu vertauscht, ohne die auftretenden Doppelverhältnisse zu ändern.

Beispiel: (Fig. 24) Aus dem Satz S.31 folgt nach leichter Umformung:

(Fig.24)



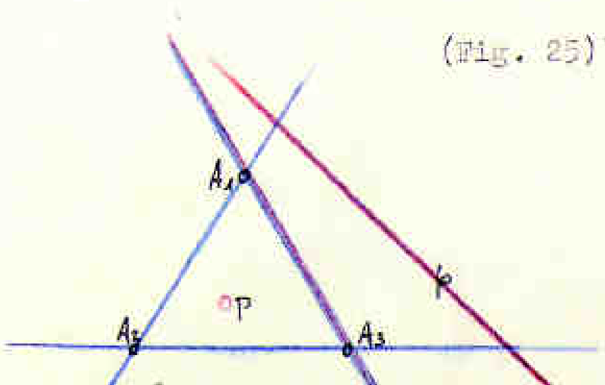
Wenn zwei Geraden p, e die Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ in $P_1P_2P_3$, $E_1E_2E_3$ treffen (P_1, E_1 auf A_2A_3 und so zyklisch weiter), so ist

$$(P_3\ E_3\ A_1\ A_2)\ (P_1\ E_1\ A_2\ A_3)\ (P_2\ E_2\ A_3\ A_1) = 1.$$

Viele projektive Sätze und Figuren sind "selbst-dual", d.h. gehen durch Dualisieren in sich über.

Beispiel einer selbstdualen Figur: ein Dreieck, ein Punkt, der auf keiner Dreiecksseite liegt und dessen Harmonikale.

(Fig. 25)



Die allgemeinste Korrelation K lässt sich, wenn x^i bezw. y^i irgendwelche projektiven Punktkoordinaten in e bezw. e' sind, durch eine einzige Gleichung ausdrücken:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x^i y^k = 0 \qquad |a^i_k| \neq 0 \qquad (9)$$

Zum Beweis betrachten wir erst die spezielle bereits angegebene Korrelation K_o:

$$y_o^i = u_i$$

Durch K_0 sind Punkt und Bildpunkte vermöge der Gleichung verknüpft:

$$\sum x^i y_0^i = 0 \qquad (10)$$

Die allgemeinste Korrelation $(x) \rightarrow (y)$ geht nun aus $(x) \rightarrow (y_0)$ durch eine Projektivität $(y_0) \rightarrow (y)$ hervor; also besteht ein Gleichungssystem

$$y_0^i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} y^i \qquad |a_{ik}| \neq 0,$$

das in (10) eingesetzt (9) ergibt.

§ 5.

Komplexe Punkte und Geraden; komplexe projektive Ebenen.

Die Erweiterung der affinen Ebene zur projektiven durch Hinzunahme der uneigentlichen Punkte reicht zur bequemen Formulierung der Probleme noch nicht aus; das Auftreten von Gleichungen 2-ten und höhren Grades liegt nahe, auch komplexen Zahlen eine geometrische Deutung zu geben. Wir definieren:

1. Jedes Tripel komplexer nicht gleichzeitig verschwindender Zahlen x^1, x^2, x^3 heisst ein Punkt. x^1, x^2, x^3 heissen die Koordinaten des Punkts.
2. Zwei Punkte (x^i), (y^i) fallen dann und nur dann zusammen, wenn $x^i = \lambda y^i$ $(i=1,2,3)$. λ ist beliebig komplex. Da (x^i) ein Punkt ist, kann λ nicht verschwinden.
3. u_1, u_2, u_3 seien komplexe nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen. Dann heisst die Menge aller Punkte, deren Koordinaten (x^i) die Gleichung
$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$$
erfüllen, eine Gerade. Zwei Geraden heissen gleich, wenn sie aus demselben Punkt bestehen.
4. Die Gesamtheit aller Punkte heisst (komplexe, projektive) Ebene.
5. Es seien a^i_k $(i, k = 1,2,3)$ komplex. $|a^i_k| \neq 0$. Dann heisst die Abbildung $(x^{i'}) \to (x^i)$, die durch
$$x^i = \sum_{k=1}^{3} a^i_k x^{k'} \qquad (i=1,2,3) \quad (4)$$
definiert wird, eine Kollineation oder Projektivität.

Folgende Sätze entspringen diesen Definitionen, die offenbar in die bisherigen übergehen, wenn alle vorkommenden Zahlen

---

auch reelle Zahlen heissen komplex.

reell sind:

1. Die Kollineationen sind punkttreu, stetig und führen Punkte einer Geraden in Punkte einer Geraden über. /*

Beweis: Wegen $|a^i_k| \neq 0$ gibt es zu gegebenen x^i genau ein System $(x^{k'})$, das (4) erfüllt. Insbesondere entspricht das Ausnahmetripel $x^i = 0$ genau dem Ausnahmetripel $x^{i'} = 0$ (i=1,2,3). Dass umgekehrt zu vorgegebenen $(x^{k'})$ genau ein System (x^i) gehört, ist nach (4) klar. (x^i) ist genau ~~denen~~ dann proportional (y^i), wenn $(x^{i'})$ proportional $(y^{i'})$. Ist ferner $\sum u_i x^i = 0$, so folgt

$$\sum_{\kappa=1}^{3} u'_\kappa x^{\kappa'} = 0 \quad \text{mit} \quad u'_\kappa = \sum_{i=1}^{3} u_i a^i_\kappa \quad . \text{ Wegen } |a^i_k| \neq 0$$

verschwinden nicht alle a'_k, wenn nicht alle u_i verschwinden. Also gehen die Punkte einer Geraden in (x) über in Punkte einer Geraden in (x'). Das umgekehrte folgt durch Auflösung von (4) nach x', die wegen $|a^i_k| \neq 0$ möglich ist.

2. Zwei Geraden $\sum u_i x^i = 0$, $\sum v_i x^i = 0$ sind dann und nur dann gleich, wenn die u_i den v_i proportional sind. ($u_i = \lambda v_i$; (i=1,2,3). Sind sie verschieden, so besitzen sie genau einen gemeinsamen Punkt.

Beweis: Dass die Geraden dieselben Punkte haben, d.h. gleich sind, wenn $u_i = \lambda v_i$ (i=1,2,3), ist klar. Es ist nun zu zeigen: gilt $u_i = \lambda v_i$ nicht, so besitzen die Geraden genau einen Schnittpunkt. Wäre

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ so wären}$$

die u_i den v_i proportional. Denn ein v_i, etwa v_1, ist $\neq 0$. Bestimmen wir λ aus $u_1 = \lambda v_1$, so folgt aus $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$:

/* Im Komplexen gibt es aber noch andere Transformationen dieser Art.

$\lambda v_1 v_2 - u_2 v_1 = o$, $v_1(\lambda v_2 - u_2) = o$, also wegen $v_1 \neq o$: $\lambda v_2 = u_2$ Eine jener Determinanten verschwindet also nicht, etwa $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$.
Die Abbildung

$$
\begin{aligned}
y^1 &= u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 \\
y^2 &= v_1 x^1 + v_2 x^2 + v_3 x^3 \\
y^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad x^3
\end{aligned}
$$

ist eine Kollineation, weil $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ o & o & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Den betrachteten Geraden entsprechen die Geraden $y^1 = o$, $y^2 = o$. Diese Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam, nämlich den Punkt $y^1 = o$; $y^2 = o$; $y^3 \neq o$ beliebig. Also haben auch die betrachteten Geraden genau einen Punkt gemein.

3. Zwei verschiedene Punkte $P(y^i)$ und $Q(z^i)$ haben genau eine Grade gemeinsam.

Beweis: Dass <u>höchstens</u> eine Gerade durch P und Q geht, folgt aus 2). Da nun die z^i den y^i nicht proportional sind, so folgt wie in 2), dass die Determinanten

$$u_1 = \begin{vmatrix} z^2 z^3 \\ y^2 y^3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} z^3 z^1 \\ y^3 y^1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} z^1 z^2 \\ y^1 y^2 \end{vmatrix}$$

nicht alle verschwinden. Also stellt die Gleichung

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = o$$

eine Gerade dar. Diese geht aber durch P, Q. Es ist nämlich

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x^i = \begin{vmatrix} z^1, & z^2, & z^3 \\ y^1, & y^2, & y^3 \\ x^1, & x^2, & x^3 \end{vmatrix}, \text{ also } \sum_{i=1}^{3} u_i y^i = o, \sum_{i=1}^{3} u_i z^i = o.$$

4. Wenn (λ, μ) alle komplexen Zahlenpaare ausser (o,o) durchläuft, und wenn $P(y^i)$, $Q(z^i)$ verschiedene Punkte sind, so beschreibt der Punkt

$$x^i = \lambda y^i + \mu z^i \qquad (i=1,2,3) \qquad (8)$$

die ganze Grade durch P Q. Zwei Wertepaare (λ, μ) und (λ', μ') entsprechen dann und nur dann demselben Punkt der Geraden, wenn $\varrho\lambda = \lambda'$; $\varrho\mu = \mu'$.

Beweis: Die Zahlen u_1, u_2, u_3 seien wie in 3) erklärt, nehmen wir o.B.d.A. $u_3 \neq 0$ an. Für jeden <u>beliebigen Punkt</u> x^1, x^2, x^3 können wir dann λ, μ aus dem Gleichungssystem

$$(8^*) \qquad \begin{aligned} x^1 &= \lambda y^1 + \mu z^1 \\ x^2 &= \lambda y^2 + \mu z^2 \end{aligned} \qquad \left(\text{Determinante } \begin{vmatrix} y^1 & z^1 \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} = -u_3 \neq 0\right)$$

eindeutig bestimmen. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x^i = \begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ x^1 - y^1 - z^1, & x^2 - y^2 - z^2, & x^3 - y^3 - z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^1 & z^2 & z^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ 0 & 0, & x^3 - y^3 - z^3 \end{vmatrix}$$

$$= u_3 (x^3 - \lambda y^3 - \mu z^3)$$

Der Punkt (x^i) liegt also dann und nur dann auf der verlangten Geraden $\sum u_i x^i = 0$, wenn $x^3 = \lambda y^3 + \mu z^3$. Diese Gleichung und (8^*) ergibt (8). Der Punkt $(x^{i'})$ falle mit (x^i) zusammen; dann gilt $x^{i'} = \varrho x^i$ $(i = 1,2,3)$. $x^{i'} = \lambda' y^i + \mu' x^i$ $(i = 1,2,3)$ gilt dann für $\lambda' = \varrho\lambda$, $\mu' = \varrho\mu$. ~~und~~ λ', μ' <u>müssen</u> so aus λ, μ hervorgehen, da sie durch $(x^{i'})$ vermöge (8^*) eindeutig bestimmt sind.

5. Wie im Reellen definieren wir nun λ, μ als <u>projektive Koordinaten</u> der Geraden g $(P\,Q)$. In der Tat ist wie im Reellen jedem Paar $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ genau ein Punkt von g zugeordnet, und die Paare (λ, μ) und (λ', μ') geben genau dann denselben Punkt, wenn sie proportional sind. Bezeichnen wir nun den Punkt $(y^i + z^i)$ mit R, den Punkt $(\lambda y^i + \mu z^i)$ mit Π, so ist im Reellen $\frac{\mu}{\lambda} = (\Pi, R, P, Q)$.
Im Komplexen <u>definieren</u> wir nun das Doppelverhältnis (Π, R, P, Q) durch $\underline{(\Pi, R, P, Q) = \frac{\mu}{\lambda}}$ Dann gilt wie im reellen der Satz:

<u>Doppelverhältnisse werden durch Kollineationen nicht verändert.</u>

Beweis:

Sei bei der Kollineation $(x) \to (x')$:

$$P\,(y^i) \longrightarrow P'\,(y^{i\prime})$$
$$Q\,(z^i) \longrightarrow Q'\,(z^{i\prime})$$

dann folgt aus (4)

$$R\,(y^i + z^i) \longrightarrow R'\,(y^{i\prime} + z^{i\prime})$$
$$\Pi\,(\lambda y^i + \mu z^i) \longrightarrow \Pi'\,(\lambda\, y^{i\prime} + \mu\, z^{i\prime}).$$

Also in der Tat

$$\frac{\mu}{\lambda} = (\Pi,\ R,\ P,\ Q) = (\Pi',\ R',\ P',\ Q').$$

6. Wie im Reellen erklären wir als Korrelation die Abbildung $x \to y$, die durch

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, y^i x^k = 0 \qquad |a_{ik}| \neq 0$$

gegeben ist-. Wie im Reellen beweist man:

Korrelationen führen umkehrbar eindeutig, stetig, inzidenztreu und doppelverhältnistreu die Punkte und Geraden in Geraden und Punkte über.-

7. Ist $a = \alpha + \beta i$ (α, β reell, $i = \sqrt{-1}$), so bezeichnet man mit $\bar{a}$ die zu a konjugiert komplexe Zahl $\bar{a} = \alpha - \beta i.$*

Zu einem Punkt $P\ (x^i)$ heisst $\bar{P}\ (y^i)$ konjugiert komplex, wenn $y^i = \varrho\, \bar{x}^i$ $(i=1,2,3)$.

Die Punkte, die zu den Punkten einer Geraden $g: \sum_{i=1}^{3} u_i x^i = 0$ konjugiert komplex sind, erfüllen wieder ~~neue~~ eine Gerade $\bar{g}$, nämlich $\sum_{i=1} \bar{u}_i\, x^i = 0$. $\bar{g}$ heisst zu g konjugiert komplex.

8. $P\ (x^i)$ heisst reell, wenn $P = \bar{P}$. Die Koordinaten sind dann und nur dann reellen Zahlen proportional. Denn $x^i = \varrho\, \bar{x}^i$ ist äquivalent mit $(\varrho + 1)\, x^i = \varrho\, (x^i + \bar{x}^i)$, $x^i = \lambda\, \xi^i$, wo $\xi^i = x^i + \bar{x}^i$ reell, und $\frac{\varrho}{\varrho+1} = \lambda$. Der Beweis versagt für $\varrho = -1$. In diesem Fall ist

* Bekanntlich ist $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$, $a + \bar{a}$ reell, $a\,\bar{a}$ reell.

für P die Koordinatenbestimmung $y^k = i\,x^k$ zu verwenden. Sie liefert wegen $x^i = -\bar{x}^i$: $y^k = +\bar{y}^k$, also y^k reell.

8. Eine Gerade heisst reell, wenn sie mit ihrer konjugiert komplexen zusammenfällt. Wie früher bewiesen, fallen die Geraden $\sum u_i x^i = 0$ und $\sum \bar{u}_i x^i = 0$ nur zusammen, wenn $u_i = \varrho \bar{u}_i$. Wie in 7) schliesst man daraus, dass dann und nur dann die u_i reellen Zahlen proportional sind, wenn g reell ist.

9. Wenn $P \neq \bar{P}$, ist g ($P\,\bar{P}$) reell. Beweis: Offenbar ist $(\bar{\bar{P}}) = P$. $\bar{g}$ enthält also $\bar{P}$ und P, g und $\bar{g}$ haben zwei verschiedene Punkte (P, $\bar{P}$) gemein, fallen also zusammen.

Trivial ist die Umkehrung: ist g reell und P auf g, so ist auch $\bar{P}$ auf g. Denn definitionsgemäss liegt $\bar{P}$ auf $\bar{g}$, und da g reell ist, fällt $\bar{g}$ mit g zusammen.

10. Ist $g \neq \bar{g}$, so ist der Schnittpunkt P ($g, \bar{g}$) reell. Beweis: Liegt P auf g, $\bar{g}$, so $\bar{P}$ auf $\bar{g}$ und ($\bar{\bar{g}}$) = g; $g, \bar{g}$ haben sowohl P als auch $\bar{P}$ gemein, also $P = \bar{P}$ wegen $g \neq \bar{g}$.

11. Aus der Determinantentheorie ist klar: Die Verbindungsgerade zweier reeller Punkte und der Schnittpunkt zweier reeller Geraden sind reell.

12. Die Punkte P (x^i) und $\bar{P}$ liegen, falls $P \neq \bar{P}$, harmonisch zu den reellen Punkten P_1 ($x^i + \bar{x}^i$) und P_2 ($x^i - \bar{x}^i$).

13. Die Punkte A_1 (1,0,0), A_2 (0,1,0), A_3 (0,0,1) und E (1 1 1) lassen sich durch Kollineation ($x' \to x$) in die beliebigen Punkte allgemeiner Lage A'_k (a^i_k) und E' (e^i) überführen; die Kollineation ist dadurch eindeutig festgelegt.

Beweis: Für $\varrho_1 \neq 0, \varrho_2 \neq 0, \varrho_3 = 0$ ist

$$x^i = \sum_{k=1}^{3} \varrho_k a^i_k x'^k \quad (i = 1,2,3) \tag{11}$$

Denn (11) hat die Determinanten $\rho_1\rho_2\rho_3|a^i_k|$. Verschwände $|a^i_k|$, so lägen wie früher gezeigt $A'_1A'_2A'_3$ auf einer Geraden, entgegen der Voraussetzung. Der Punkt A_1 $(x^{1'} = 1, x^{2'} = x^{3'} = 0)$ geht über in

$$x^i = \rho_1 a^i_1$$

Also in A'_1. Ebenso wird $A_{2,3} \to A'_{2,3}$. Wir suchen nun $\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0, \rho_3 \neq 0$ so zu bestimmen, dass $E \to E'$.
Das gibt wegen $x^{1'} = x^{2'} = x^{3'} = 1$:

$$e^i = \sum_{k=1}^{3} a^i_k \rho_k \qquad (i = 1,2,3) \qquad (12)$$

Die ρ_k sind hierdurch wegen $|a^i_k| \neq 0$ eindeutig bestimmt. Wäre $\rho_1 = 0$, so würde die rechte Seite von (12) eine Darstellung der Geraden $A'_2A'_3$ mit den Parametern ρ_2, ρ_3 bedeuten, E' läge also auf dieser Geraden entgegen der Voraussetzung. Ebenso folgt $\rho_2 \neq 0$, $\rho_3 \neq 0$.

2. Kapitel.

Kurven zweiter Ordnung.

§ 6.

Punktepaare.

Sei $f(x,x) = a_{11}(x^1)^2 + 2\,a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2$. Die a_{ik} seien reell. Wir setzen $a_{21} = a_{12}$ und können dann schreiben

$$f(x,x) = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\,x^i x^k$$

Seien $x^1 x^2$ projektive Koordinaten einer Geraden g.

<u>Definition:</u> Die Punkte von g, deren Koordinaten die Gleichung $f(x,x) = 0$ erfüllen, heissen ein <u>Punktepaar.</u> Wir untersuchen, welche Typen von Punktepaaren es gibt.

I. $a_{11} \neq 0$. $\quad a_{11}f(x,x) = (a_{11}x^1 + a_{12}x^2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x^2)^2$

Wir setzen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$. Dann

wird $\quad a_{11}f(x,x) = u \cdot v$.

für

$$u = a_{11}x^1 + (a_{12} + \sqrt{-\Delta})x^2 \quad = 0$$
$$v = a_{11}x^1 + (a_{12} - \sqrt{-\Delta})x^2. \quad = 0$$

$f(x,x) = 0$ ist äquivalent mit $u = 0$ oder $v = 0$. Jede dieser Gleichungen bestimmt wegen $a_{11} \neq 0$ einen Punkt; ein und denselben stets reellen Punkt genau dann, wenn $\Delta = 0$. Für $\Delta < 0$ sind die Punkte beide reell, für $\Delta > 0$ konjugiert komplex.

II. $a_{11} = 0 \qquad f(x,x) = x^2(2a_{12}x^1 + a_{22}x^2)$.

a) $a_{12} \neq 0$, also $\Delta < 0$. Das Punktepaar besteht aus den beiden reellen Punkten $x^2 = 0$ und $\dfrac{x^1}{x^2} = -\dfrac{a_{22}}{2a_{12}}$

b) $a_{12} = 0$, also $\Delta = 0$, $a_{22} \neq 0$. Das Punktepaar besteht aus dem Punkt $x^2 = 0$ allein.

c) $a_{12} = a_{22} = 0$. Das Punktepaar besteht aus der ganzen Geraden.

Wir haben also folgende Typen:

1). $\underline{\Delta \neq 0;}$ zwei verschiedene Punkte, reell oder konjugiert imaginär jenachdem $\Delta < 0$ oder $\Delta > 0$.

2). $\underline{\Delta = 0.}$ Dann heisst das Punktepaar ausgeartet.

a) Es besteht aus einem reellen Punkt ("Doppelpunkt"), wenn nicht alle a_{ik} verschwinden.

b) Es besteht aus der ganzen Geraden, wenn alle a_{ik} verschwinden.

Neben $f(x,x)$ führen wir die Bilinearform ein, die auch "<u>Polarform</u>" von $f(x,x)$ heisst:

$$f(y,z) = \sum a_{ik} y^i z^k.$$

Es ist wegen $a_{ik} = a_{ki}$: $f(y\,z) = \sum a_{ki} y^i z^k = \sum a_{ik} z^i y^k = f(z,y)$. ~~Wenn man~~ Wir nennen zwei Punkte (y^i) (z^i) von g <u>konjugiert</u> zum Punktepaar $f(x,x) = 0$, wenn $f(y,z) = 0$. Fallen zwei konjugierte Punkte (y) (z) in einem (x) zusammen, so ist (x) ein Punkt des Punktepaares. Sind (y) (z) verschieden, so ist

$\begin{vmatrix} y^1 & z^1 \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$; die Koordinatentransformation $(x^1, x^2) \to (\lambda, \mu)$, die durch

$$x^i = \lambda y^i + \mu z^i \quad (i = 1,2)$$

vermittelt wird, ist also eine Projektivität. (λ, μ) haben als Grundpunkte offenbar (y) und (z). Nun wird allgemein für $(y) \neq (z)$:

$$f(x,x) = \sum a_{ik} \left[\lambda^2 y^i y^k + \mu^2 z^i z^k + \lambda\mu(y^i z^k + z^i y^k)\right] =$$

$$= \lambda^2 f(y,y) + \mu^2 f(z,z) + \lambda\mu[f(y,z) + f(z,y)] =$$
$$= \lambda^2 f(y,y) + \mu^2 f(z,z) + 2\lambda\mu\, f(y,z).$$

Insbesondere wird für $f(y,z) = o$:

$$f(x,x) = \lambda^2 f(y,y) + \mu^2 f(z,z). \tag{13}$$

Verschiedene Punkte (y) (z) sind dann und nur dann konjugiert, wenn in einem System mit (y) (z) als Grundpunkten $f(x,x)$ kein gemischtes Glied enthält.

Wir setzen $\sum_{i=1}^{2} a_{ik}\, y^i = u_k(y)$. Dann ist $f(y,z) = o$ identisch mit $u_1(y)\, z^1 + u_2(y)\, z^2 = o$. Zu gegebenem (y) gibt es also immer einen konjugierten Punkt (z). (z) wird genau dann unbestimmt, wenn (y) das linear homogene Gleichungssystem $u_1 = o \quad u_2 = o$ erfüllt. Dies System (s) hat aber die Determinante $|a_{ik}| = \Delta$. Wir haben also folgende Möglichkeiten:

I. $\Delta \neq o$. (S) hat keine Lösung; zu jedem Punkt (y) gibt es genau einen konjugierten (z). Ist (y) ein Punkt des Paares, so fällt (z) mit (y) zusammen. Ist also (y) kein Punkt des Paares, $f(y,y) \neq o$, so auch z nicht, $f(zz) \neq o$. Suchen wir nun in (13) λ, μ so zu bestimmen, dass $f(x,x) = o$, so haben wir $\lambda \neq o, \mu \neq o$, und für den Quotienten $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 = + \sqrt{\frac{-f(zz)}{f(y,y)}}, \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2 = - \sqrt{\frac{-f(zz)}{f(y,y)}}.$$

$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 = -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2$ bedeutet aber nach S.24,25;

Bezüglich dem nicht ausgearteten Punktepaar $P_1 P_2$ ist der zu Q ($\neq P_1, \neq P_2$) konjugierte Punkt R der vierte harmonische zu Q, P_1, P_2 : $(R\,Q\,P_1\,P_2) = -1$.

II. $\Delta = o$, aber ~~also~~ nicht alle $a_{ik} = o$. Dann hat (S) eine Lösung (y) und zwar genau eine, weil mindestens in einer der beiden Gleichungen (S) ein Koffizient nicht verschwindet. (y) ist zu allen Punkten von g konjugiert, insbesondere zu sich selbst, ist also der Doppelpunkt. Jeder andere Punkt hat genau einen konjugierten, also den Doppelpunkt.

III. alle $a_{ik} = o$. Jeder Punkt ist zu jedem konjugiert.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

§ 7.

Kurven 2. Ordnung. Grundlagen.

Seien a_{ik} $(i,k = 1,2,3)$ reell, $a_{ik} = a_{ki}$. Wir setzen $f(x,x) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x^i x^k$; $f(y,z) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} y^i z^k$. Also $f(y,z) = \sum a_{ki} y^i z^k = \sum a_{ik} z^i y^k = f(z,y)$. Seien x^1, x^2, x^3 projektive Koordinaten in der Ebene e. Dann heisst *Kurve 2. Ordnung* die Menge aller Punkte in e, deren Koordinaten $f(x,x) = 0$ erfüllen. Zwei Punkte (y) (z) heissen bezüglich jener Kurve konjugiert, wenn $f(y,z) = 0$.

Sei allgemein $(y) \neq (z)$. Wir suchen die Schnittpunkte der Geraden g durch (y) (z) mit der Kurve. Dazu haben wir λ, μ so zu bestimmen, dass für $x^i = \lambda y^i + \mu z^i$ $(i = 1,2,3)$:

$$f(x,x) = 0.$$

Nun wird wie früher:

$$f(x,x) = \lambda^2 f(y,y) + \mu^2 f(zz) + 2\lambda\mu f(y,z) \tag{14}$$

Da λ, μ projektive Koordinaten auf g sind, bestimmt $f(x,x) = 0$ *ein Punktepaar auf g.*

Eine Gerade hat mit einer Kurve 2. Ordnung entweder zwei oder einen oder alle Punkte gemein.

Definition: *Tangente* heisst jede Gerade, die mit der Kurve ein ausgeartetes Punktepaar gemein hat. Die gemeinsamen Punkte (einer oder alle) heissen *Berührungspunkte der Tangente.*

Wir fragen nach der Gesamtheit aller Punkte (z), die einem gegebenen Punkt (y) konjugiert sind. Wir setzen $\sum_{i=1}^{3} a_{ik} y^i = u_k(y)$ und bezeichnen mit (S) das System $u_k(y) = 0$. $(k=1,2,3)$.

Jeden Punkt (y), der (S) erfüllt, nennen wir *Doppelpunkt* von $f(x,x) = 0$. Dann und nur dann, wenn (y) Doppelpunkt ist, wird

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

$f(y,z) = \sum_{k=1}^{3} u_k z^k = o$ für beliebige z^k. Doppelpunkte sind alle und nur die Punkte, die jedem Punkt konjugiert sind. Insbesondere ist (y) dann sich selbst konjugiert, erfüllt also $f(y,y) = o$. Die Doppelpunkte gehören der Kurve an.

Ist (y) kein Doppelpunkt, so bestimmt $f(y,z) = o$ als Ort aller zu (y) konjugierten Punkte eine Gerade, $\sum_i u_i z^i = o$. Diese heisst die Polare von (y).

Ist $f(y,z) = o$ und $(z) \neq (y)$, so hat auf der Geraden g

$$x^i = \lambda y^i + \mu z^i \quad (i=1,2,3)$$

das Schnittpunktepaar mit der Kurve nach (14) die Gleichung

$$\lambda^2 f(y\, y) + \mu^2 f(z,z) = o. \quad (13)$$

Hieraus folgt nach § 6: Zwei verschiedene Punkte sind bezüglich einer Kurve 2. Ordnung genau dann konjugiert, wenn sie es bezüglich des Punktepaares sind, das ihre Verbindungsgrade mit der Kurve gemein hat. Im allgemeinen liegen demnach konjugierte Punkte harmonisch zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungsgraden mit der Kurve. Die übrigen Fälle sind aus § 6 ersichtlich.

Ist (y) Doppelpunkt, so ist jede Gerade g durch (y) Tangente mit (y) als Berührungspunkt.

Ist (y) Kurvenpunkt aber nicht Doppelpunkt, so ist die Polare g von (y) Tangente mit (y) als Berührungspunkt.

Beweis: In beiden Fällen ist (y) konjugiert zu allen Punkten von g. In beiden Fällen geht g durch (y); denn auch im zweiten Fall ist (y) als Kurvenpunkt sich selbst konjugiert, liegt also auf g. (y) ist also zu allen Punkten von g auch konjugiert bezüglich des Schnittpunktepaares von g mit der Kurve. Daher ist dieses ausgeartet.

Da g ferner (y) mit der Kurve gemein hat, ist (y) Berührungspunkt.

<u>Für alle Punkte der Ebene gilt $f(x,x) = o$ (dann und nur dann, wenn alle $a_{ik} = o$.</u>

Beweis: Sei P ein beliebiger Punkt von e. $Q \neq P$ desgleichen. n. V. gehört die Gerade P Q ganz zur Kurve. Also ist P zu Q konjugiert. Also ist P Doppelpunkt. Also muss (S) für alle Punkte von e erfüllt sein. Verschwände ein a_{ik} z.B. a_{13} nicht, so würde schon $u_1 = o$ nur eine Gerade ~~derselben~~ darstellen, also könnte erst recht $u_1 = u_2 = u_3 = o$ nicht die ganze Ebene geben.

Nachdem wir das Verschwinden <u>aller</u> a_{ik} gedeutet haben, fragen wir, was das Verschwinden <u>einzelner</u> a_{ik} bedeutet; während das Verschwinden aller a_{ik} ~~immer~~ einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn hat, kennzeichnet das Verschwinden einzelner a_{ik} eine Eigenschaft der Kurve relativ zum gewählten Koordinatensystem.

1) $a_{11} = o$ (entsprechend: $a_{22} = o$ oder $a_{33} = o$). Ist dann und nur dann der Fall, wenn der Punkt A_1 $(x^1 \neq o, x^2 = x^3 = o)$ Kurvenpunkt ist.

2) $a_{12} = o$ (entsprechend : $a_{ik} = o$ für $i \neq k$). Wir bilden $f(y,z)$ für die Punkte $A_1 A_2$. Also $y^2 = y^3 = o$, $y^1 \neq o$. $z^1 = z^3 = o$, $z^2 \neq o$; <u>$f(y,z) = a_{12} y^1 z^2$.</u> $a_{12} = o$ ist äquivalent damit, dass A_1, A_2 konjugiert sind.

Hierdurch wird es möglich, $f(x,x)$ durch eine reelle Kollineation in eine Summe oder Differenz von Quadraten zu verwandeln.

Ist die Kurve die ganze Ebene, so verschwinden alle a_{ik}. Also hat $f(x,x)$ dann in jedem System die gewünschte Gestalt. Andernfalls gibt es einen Punkt P, der nicht Kurvenpunkt ist, also eine Polare p besitzt, die P nicht enthält. Wir suchen auf p zwei verschiedene einander konjugierte Punkte Q, R; Solche Punkte gibt es nach § 6 immer. Dann sind P, Q, R paarweise konjugiert und liegen nicht alle auf einer Geraden.

Man nennt solche Punkttripel Polardreiecke der Kurve 2. Ordnung.

Wir machen eine Kollineation $(x) \to (y)$, die die Grundpunkte $A_1 A_2 A_3$ nach P, Q, R befördert. Dabei gehe $f(x,x)$ in $g(y,y) = \sum b_{ik} y^i y^k$ über. Nunmehr ist sicher $b_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

Wir wollen noch die b_{ii} auf eine der Zahlen $0, \pm 1$ beschränken. setzen wir zu diesem Zweck $\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|b_{ii}|}} & \text{für } b_{ii} \neq 0 \\ 1 & \text{für } b_{ii} = 0 \end{cases}$.

Dann ist die durch $y^i = \alpha_i z^i$ $(i=1,2,3)$ definierte Abbildung eine Kollineation (Determinante $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$). Sie führt $g(y,y)$ in $h(z,z) = \sum c_{ik} z^i z^k$ über; dann ist ersichtlich $c_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und die c_{ii} können nur $0, 1, -1$ sein. $(x) \to (z)$ ist die gesuchte Kollineation.

Somit ergeben sich bei passender Wahl der Indizes folgende Normaltypen:

1) $(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = 0$

2) $(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 = 0$

3) $(z^1)^2 + (z^2)^1 = 0$

4) $(z^1)^2 - (z^2)^1 = 0$

5) $(z^1)^2 = 0$

6) $0 = 0$

Jede Kurve 2. Ordnung lässt sich, wie bewiesen, durch eine reelle Kollineation auf einen dieser 6 Typen umformen. Wir diskutieren sie durch, wobei sich insbesondere zeigen wird, dass eine reelle Kollineation einen dieser Typen nie in einen anderen überführen kann.

In den Fällen 1) 2) müssten die Doppelpunkte dem Gleichungssystem $z^1 = 0$ $z^2 = 0$ $z^3 = 0$ genügen, also gibt es keine. In den Fällen 3) 4) genügen die Doppelpunkte dem System $z^1 = 0$, $z^2 = 0$. Es gibt also genau einen, und zwar reellen, Doppelpunkt: $z^1 = 0$, $z^2 = 0$, $z^3 \neq 0$.

Im Fall 5) erfüllen die Doppelpunkte die reelle Gerade $z^1 = 0$, im Fall 6) die ganze Ebene.

Da Kollineationen die Doppelpunkte in Doppelpunkte <u>überführen, sind auch gegenüber komplexen Kollineationen</u> die Fälle 6), 5); 3) und 4) zusammen; 1),2) zusammen in äquivalent.

Die Typen 1) 2) werden als <u>nicht ausgeartete</u> Kurven 2. Ordnung bezeichnet, die übrigen als ausgeartet. 1) besitzt keinen reellen Punkt („nullteilig") 2) ist ein Kreis, falls die (z^i) homogene kartesische Koordinaten sind, sodaß $z^3 = 0$ die unendlich ferne Gerade bedeutet; denn setzt man für $z^3 \neq 0$ $x = \frac{z^1}{z^3}$, $y = \frac{z^2}{z^3}$, so sind x, y kartesische Koordinaten und 2) wird

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Da 2) reelle Punkte besitzt, 1) dagegen nicht, kann 1) durch keine reelle Kollineation in 2) übergehen. Dagegen führt die Kollineation $z^1 = z^{1\prime}$, $z^2 = z^{2\prime}$, $z^3 = i\, z^{3\prime}$ die Typen 1) 2) in 2) 1) über.

3) können wir in die Form setzen

$$(z^1 + i\, z^2)\,(z^1 - i\, z^2) = o$$

Die Kurve besteht aus den beiden konjugiert komplexen Geraden $z^1 \pm i\, z^2 = o$. Ihr einziger reeller Punkt ist der Doppelpunkt $z^1 = z^2 = o$, in dem die Geraden sich schneiden. 4) ergibt $(z^1 + z^2)(z^1 - z^2) = o$; zwei reelle Geraden. Der Schnittpunkt ist Doppelpunkt. 3) 4) sind gegenüber reellen Kollineationen inäquivalent, gegenüber komplexen nicht.

5) ist die reelle Gerade $z^1 = o$ und besteht nur aus Doppelpunkten. 6) ist die ganze Ebene.

Sei nun eine beliebige Kurve 2. Ordnung ~~f (,) =~~ $f(x,x) = \sum a_{ik}\, x^i x^k = o$ gegeben. Dann kann man folgendermassen entscheiden, welchem Typ sie angehört:

Wir bezeichnen $\Delta = |a_{ik}|$ als Determinante der Kurve. (S) sei wieder das System $\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, x^k = o$ $(i=1,2,3)$. Ist $\Delta \neq o$, besitzt also (S) keine Lösung, so hat die Kurve keinen Doppelpunkt, ist also notwendig vom Typ 1) oder 2). Indem wir die Reduktion auf Normalform aktiv deuten, haben wir den Satz: Jede Kurve 2. Ordnung, die einen reellen Punkt besitzt, und deren Determinante nicht verschwindet, lässt sich durch reelle Kollineation in einen Kreis verwandeln.

Ist $\Delta = o$, so gibt es mindestens einen Punkt, der (S) erfüllt. Gibt es genau einen, dann liegt Typ 3) oder 4) vor; 4) genau dann, wenn die Kurve ausser ihrem Doppelpunkt noch einen reellen Punkt besitzt;

Stellt (S) eine Gerade dar, so liegt 5) vor. Gibt (S) die ganze Ebene, so verschwinden alle a_{ik}; Typ 6.

Wir diskutieren nun für jeden Punkt P, ausser den Doppelpunkten, die Lage seiner Polaren p. Im Fall 5) ist die Doppelgrade ersichtlich Polare jedes nicht auf ihr liegenden Punkts. Im Fall 3) 4) muss jede polare durch den Doppelpunkt O gehen, da O allen Punkten konjugiert ist. Seien g_1, g_2 die Geraden, aus denen die Kurve besteht (Fig. 26). Liegt P nicht auf g_1 oder g_2, so ist p ersichtlich der vierte harmonische Strahl durch O zu O P, g_1, g_2. Also haben alle Punkte auf O P dieselbe Polare wie P. Liegt P auf g_1 (entsprechend für g_2), so ist g_1 Polare von P.

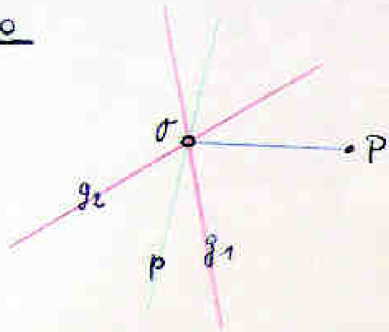


Fig. 26

Bei den nicht ausgearteten Kurven 1) 2) ist die Beziehung eines Punkts zu seiner Polaren umkehrbar eindeutig; nicht nur jeder Punkt besitzt eine Polare, sondern zu jeder Geraden p gibt es genau einen Punkt P, dessen Polare p ist; man nennt P den Pol von p.

Sei $\sum_{k=1}^{3} a_k x^k = o$ die Gleichung von p. Soll p die Polare von P (y^i) sein, so muss p der Gleichung ~~f(y,z) =~~

$f(y,z) = \sum a_{ik}\, y^i\, z^k = o$ genügen, also mit $\varsigma \neq o$ gelten

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}\, y^i = \varsigma\, u_k \quad (k = 1 - \cdot - 3).$$

Dies Gleichungssystem bestimmt wegen $\Delta \neq o$ in der Tat genau einen Punkt P.

Für nicht ausgeartete Kurven 2. Ordnung gilt ferner, dass sie keine Grade ganz enthalten.

Beweis: Vorausgesetzt, g ~~k~~ liegt ganz auf der Kurve 2. Ordnung k, dann soll gezeigt werden, dass k ausgeartet ist. Durch eine Kollineation erteilen wir g die Gleichung $\xi^3 = o$, so dass A_1 A_2 auf g liegen. Da g in k enthalten ist, so ist:

$$\begin{array}{lll} A_1 & \text{konj.} & A_1, A_2 \\ A_2 & \text{"} & A_1, A_2. \end{array}$$

Daher ist, falls im neuen Koordinatensystem die Gleichung $\sum a_{ik}\, x^i\, x^k = o$ erfüllt: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = o.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} o & o & a_{13} \\ o & o & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = o \quad \text{(Entwicklung nach der letzten Zeile)}$$

Also ist k in der Tat ausgeartet. –

Liegt P nicht auf k (nicht ausgeartete Kurve 2. Ordnung), dann wird k von der Polaren p (P) in in zwei verschiedenen Punkten Q_1, Q_2 getroffen. Denn sonst hätte p (P) ~~in zwei verschiedenen Punkten~~ mit k einen Doppelpunkt Q gemein, Q wäre mit allen Punkten von p konjugiert, also wäre p die Polare von Q, die beiden verschiedenen Punkte P, Q hätten dieselbe Polare p, was

~~was~~ bei nicht ausgearteten Kurven 2. Ordnung nicht geht:

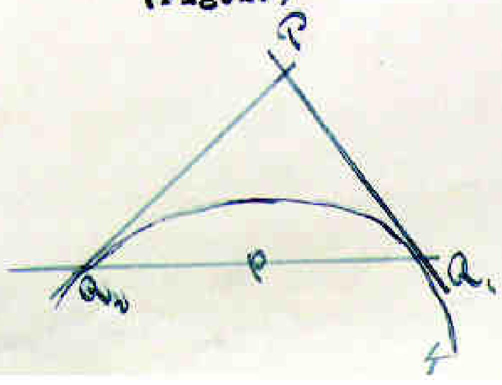
Für alle Kurven 2. Ordnung k und alle Punkte P, die nicht auf der Kurve liegen, gilt der Satz: eine Gerade t durch P ist dann und nur dann Tangente, an k, wenn t mit k einen Punkt Q gemein hat, der auf der Polaren p von P liegt.

Beweis: 1) t sei Tangente von k durch P, berührt k im ~~Pu~~ Q. Dann ist Q als Doppelpunkt auf t mit P konjugiert, liegt daher auf p.

2) Q liegt auf p und k. Dann ist Q mit sich selbst und mit P konjugiert. Die Grade P Q = t schneidet also ein ausgeartetes Punktepaar aus k aus, d.h. ist Tangente. Q ist Doppelpunkt auf t, also Berührungspunkt.-

Für nicht ausgeartete Kurven k folgt hieraus: Liegt P nicht auf k (Fig. 27), so gehen durch P genau zwei Tangente P, Q_1, P Q_2. Dabei sind Q_1, Q_2 die Schnittpunkte von k und p (P).

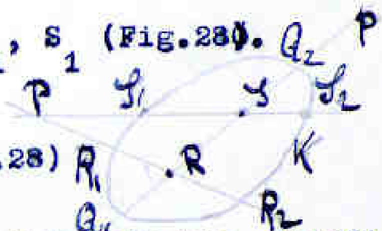
(Fig.27)



Sind Q_1, Q_2 reell, so sind die Tangenten beide reell. Sind Q_1, Q_2 konjugiert komplex, so auch die Tangenten, falls P reell ist.

Dann setzen wir $PQ_1 = t_1$, $PQ_2 = t_2$, so ist $Q_1 = \overline{Q}_2$, $P = \overline{P}_1$, also $t_1 = t_1(PQ_1) = t_1(\overline{PQ_2}) = \overline{t}_2$, q.e.d.

Sind Q_1, Q_2 reell und ist k gegeben, so lassen sich die Tangenten mit dem Lineal allein konstruieren. Offenbar genügt es dazu, p (P) zu konstruieren. Zu diesem Zweck verbinden wir P mit zwei beliebigen Kurvenpunkten R_1, S_1 (Fig.28).



(Fig.28)

Wenn PR_1 nicht schon zufällig Tangente ist, trifft PR_1 die Kurve in einem weiteren Punkt R_2. Entsprechend werden k von PS_1 zum zweiten mal in S_2 getroffen. Mit dem Lineal allein kann man R, S so konstruieren, dass

$$(P\,R\,R_1 R_2) = -1 \qquad (P\,S\,S_1 S_2) = -1.$$

dann ist offenbar P konjugiert R und P konjugiert S. p (R,S) ist also die Polare von P. Wenn p k reell trifft (in Q_1, Q_2) , dann sind PQ_1, PQ_2 die gesuchten Tangenten. Andernfalls gibt es keine reellen.

Um die Tangenten durch P (y^i) an $f(x,x) = o$ formal zu erfassen, so betrachten wir für irgendeinen Punkt $Q(z^i)$ das von $PQ = t$ ausgeschnittene Punktepaar. Es wird durch die Werte λ, μ gegeben, die ($x^i = \lambda y^i + \mu z^i$ gesetzt) die Gleichung erfüllen $\lambda^2 f(yy) + 2\lambda\mu f(yz) + \mu^2 f(zz) = o$ (14)

Damit t Tangente werde, ist (z^i) so zu bestimmen, dass das Punktepaar (14) ausartet. Nach § 6 ist hierzu notwendig und hinreichend

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(yy) & f(yz) \\ f(yz) & f(zz) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Punkte (z^i) auf dem Tangenten durch (y^i) an $f(x,x) = 0$ werden also durch die Gleichung dargestellt

$$f(y,y)\, f(zz) - (f(yz))^2 = 0 \quad (15)$$

(15) ist in (z^i) eine Kurve 2. Ordnung. Da sie eine Grade ganz enthält (nämlich jede Tangente), so ist (15) ein konjugiert komplexes oder ein reelles Gradenpaar, oder eine Grade, oder die ganze Ebene. Der Leser diskutiere geometrisch, wie sich diese Möglichkeiten in den verschiedenen Fällen realisieren. Beispiel: (15) stellt die ganze Ebene dar, wenn P Doppelpunkt von $f(x,x) = 0$ ist.-

Für nicht ausgeartete Kurven ist neben der Normalform, die oben abgeleitet wurde und dem Fall entspricht, dass A_1, A_2, A_3 Polardreieck ist, eine weitere Normalform wichtig, entsprechend dem Fall, dass A_1, A_2, A_3 so liegen, wie Q_1, Q_2, P in Fig. 27.

Wir haben also

$$A_1 \text{ konjugiert mit } A_1, A_3:\ a_{11} = a_{13} = 0$$
$$A_2 \quad " \quad " \quad A_2, A_3:\ a_{22} = a_{23} = 0.$$

Die Kurve erhält die Gestalt:

$$2 a_{12} x^1 x^2 + a_{33} (x^3)^2 = 0.$$

Ersichtlich erhalten wir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = - a_{12}^2 \cdot a_{33}.$$

Also darf weder a_{12} ~~oder~~ noch a_{33} verschwinden, wenn die Kurve nicht ausarten soll. Machen wir die Kollineation:

$$-\frac{2\, a_{12}}{a_{33}}\, x^1 = z^1 , \quad x^2 = z^2 , \quad x^3 = z^3 ,$$ so erhalten

wir die Normalform:

$$(16) \qquad z^1 z^2 - (z^3)^2 = 0.$$

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass die hier gegebene Tangentendefinition die umfasst, die in der Differentialrechnung gegeben wird.

Sei nämlich t Tangente an eine nicht ausgeartete Kurve 2. Ordnung k und sei Q der Berührungspunkt (nach unserer Definition). Sei dann t' eine beliebige Grade durch Q. Ist $t' \neq t$, so hat t' mit k ausser Q einen weiteren Punkt Q' gemein.

x <u>Q' rückt gegen Q, wenn t' gegen t geht.</u>

Denn sonst gäbe es (wie leicht zu zeigen) einen von Q verschiedenen Punkt Q^*, gegen den sich die Q für $t' \to t$ häuften. Weiter liesse sich zeigen: Q^* liegt auf k und t. Dann hätte t mehr als einen Punkt Q mit t k gemein, was nicht stimmt. Ist also Q ein ~~un~~endlicher Punkt, so ergibt unsere Definition die übliche. Sie geht über diese hinaus, wenn Q unendlich fern ist, oder wenn k ausartet und Q Doppelpunkt ist.

§ 8.

Dualisierung.

Die Abbildung, die bezüglich einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung jeder Geraden ihren Pol und jedem Punkt seine Polare zuordnet („Polarenverwandtschaft"), ist eine Korrelation. Denn sie schreibt sich in der Form

$$\sum a_{ik} y^i z^k = o \qquad a_{ik} = a_{ki} \qquad |a_{ik}| \neq o,$$

die mit (9) S. 41 übereinstimmt. Die Polarenverwandtschaften sind gegenüber den allgemeinsten Korrelationen durch die Symmetriebedingung $a_{ik} = a_{ki}$ ausgezeichnet.

Die Gesamtheiten der Tangenten der Kurve wird auf die Berührungspunkte (ihre Pole) abgebildet. Die Tangenten einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung werden durch jede Korrelation in Punkte einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung abgebildet.

Betrachten wir insbesondere die Korrelation $K_o^{\smile}$, die der Geraden $\sum_{i=1} u_i x^i = o$ den Punkt (u_i) zuweist, d.h. führen wir Linienkoordinaten ein, und suchen in ihnen die Gleichung der Tangenten der Kurve. Wir haben

$\sum a_{ik} x^i x^k = o$, also wenn $\sum_{i=1}^{3} u_i x^i = o$ die Tangente durch (X) bezeichnet: $\sum_k a_{ik} X^k = u_i$. Wegen $|a_{ik}| \neq o$ gestattet dies Gleichungssystem die Auflösung

$$x^i = \sum A^{ik} u_k \qquad |A^{ik}| = \frac{1}{|a_{ik}|} \neq 0$$

Dies, in $\sum u_i x^i = o$ eingesetzt, ergibt die gesuchte Gleichung:

$$\sum_{ik=1}^{3} A^{ik} u_i u_k = o \tag{17}$$

Eine andere Form dieser Gleichung, die direkt die a_{ik}, nicht die A^{ik} benutzt, erhält man folgendermassen: Für die Tangente gilt:

$$\sum a_{ik} x^k = u_i \quad (i=1--3)$$

$$\sum u_k x^k = o.$$

Damit dieses System von 4 inhomogenen Gleichungen in den drei Variabeln x^1, x^2, x^3 lösbar sei, ist notwendig, und wegen $|a_{ik}| \neq o$ auch hinreichend, das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & o \end{vmatrix} = o \qquad (18)$$

(18) ist mit (17) äquivalent, denn (18) besagt, dass der Pol der Geraden (u_K) auf ihr liegt.

Wir fragen nun, was für Gebilde (17) in Linienkoordinaten darstellt, wenn die A^{ik} beliebige reelle Zahlen sind. Während $|A^{ik}| \neq o$ die Tangenten einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung gab, erhalten wir für $|A^{ik}| = o$ neuartige Gebilde. Liegt in der Einteilung § 7 einer der Fälle 3)4) vor, so erhalten wir zwei Büschel, dessen Scheitel P, Q beide reell oder konjugiert komplex sind. Fall 5) liefert ein Büschel mit reellem Scheitel, Fall 6 alle Geraden der Ebene. Alle Gebilde (17) nennt man Büschel 2. Ordnung. Die bisher betrachteten Büschel heissen „1.Ordnung". Sind λ, μ projektive Koordinaten in einem Büschel erster Ordnung, so sollen die Geraden des Büschels, die einer Gleichung

$$a_{11}\lambda^2 + 2 a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = o \qquad (a_{ik} \text{ reell})$$

genügen, ein Gradenpaar heissen. Die Typen der Gradenpaare erhält man durch Dualisieren aus § 6. Ebenso ist aus § 6 klar, wann zwei Geraden g,h eines Büschels 1. Ordnung zu einem

Gradenpaar des Büschels konjugiert sind. Besteht das Gradenpaar aus zwei verschiedenen Graden g_1, g_2, und ist $g \neq g_1$, $g \neq g_2$, so ist p der vierte harmonische Strahl zu g, g_1, g_2, $(h, g, g_1, g_2) = -1$. Entsprechend in den anderen Fällen.

Ferner folgt durch Dualisieren:

<u>Jedes Büschel 2. Ordnung hat mit jedem Büschel erster Ordnung ein Gradenpaar gemein.</u>

Zwei Graden sind bezüglich eines Büschels 2.Ordnung konjugiert, wenn sie es bezüglich des Gradenpaares sind, das das von ihnen erzeugte Büschel 1. Ordnung mit dem Büschel 2.Ordnung gemein hat.

Zu einer gegebenen Geraden g sind bezüglich eines Büschels 2.Ordnung entweder alle Geraden konjugiert (g ist Doppelgrade), oder die zu g konjugierten Graden bestehen aus dem Büschel 1.Ordnung durch den Pol von g.

Zwei Geraden sind bezüglich einer nicht ausgearteten Kurve 2.Ordnung, bezw. deren Büschel ihrer Tangenten, konjugiert, wenn ~~in~~ einer von ihnen durch den Pol der anderen geht.

Von neuem ergibt sich ferner der schon bewiesene Satz: an eine gegebene nicht ausgeartete Kurve 2.Ordnung kann man von einem gegebenen Punkt zwei oder eine Tangente legen; nur eine genau dann, falls der Punkt auf der Kurve liegt.

§ 9.

Projektive Erzeugung; Paskalscher Satz.

Wir gehen von der Normalform (16) aus, die man erhält, wenn man A_1, A_2 in zwei beliebige Punkte einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung k legt und A_3 zum Pol von A_1A_2, also zum Schnittpunkt der Tangenten durch A_1, A_2, an k, macht (Fig.29.)

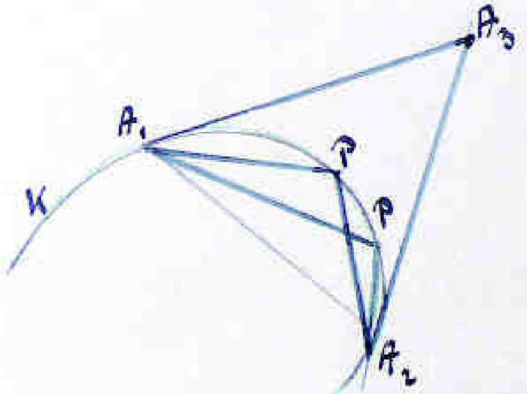


Fig. 29

(16) können wir in Determinantenform setzen:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ x^3 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

(16) gewährleistet eine nichttriviale Lösung λ, μ des Systems

$$\begin{aligned} 1.\quad & \lambda x^1 + \mu x^3 = 0 \\ 2.\quad & \lambda x^3 + \mu x^2 = 0 \end{aligned} \qquad (19_{1,2})$$

Nun stellt (19_1) bei variablem λ, μ das Gradenbüschel erster Ordnung durch A_2 dar, entsprechend (19_2) das Büschel A_1. Beide Büschel sind auf λ, μ als projektive Koordinaten bezogen. Ordnet man jedem Strahl (λ,μ) aus (19_1) den aus (19_2) zu, der zum selben (λ,μ) gehört, so sind die Büschel projektiv aufeinander bezogen. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen erfüllen aber (16), d.h. liegen auf k. Wir haben damit den Satz.

Ist P ein laufender Punkt von k, und sind A_1, A_2 beliebige feste Punkte von k, so liefert die Abbildung $A_1 P \longleftrightarrow A_2 P$ eine Projektivität zwischen den Büscheln durch A_1 und A_2.

Umgekehrt: Sind zwei Büschel erster Ordnung projektiv aufeinander bezogen, so erfüllen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Kurve 2. Ordnung. Denn haben die Büschel die Gleichungen:

$$\lambda \sum u_i x^i + \mu \sum v_i x^i = 0$$
$$\lambda \sum p_i x^i + \mu \sum q_i x^i = 0$$

so erfüllen die Schnittpunkte entsprechender, d.h. zum gleichen (λ, μ) gehöriger Strahlen offenbar die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \sum u_i x^i & \sum v_i x^i \\ \sum p_i x^i & \sum q_i x^i \end{vmatrix} = 0$$

die ersichtlich eine Kurve 2. Ordnung darstellt; diese geht notwendig durch die Scheitel der Büschel.

Seien A_1, A_2 diese Scheitel, dann muss die Kurve ausgeartet sein, falls die Grade $A_1 A_2$ sich selbst entspricht. Denn dann ist die Projektivität nach § 1 eine Perspektivität, entsprechende Strahlen schneiden sich auf einer Graden g, die mit $A_1 A_2$ zusammen ersichtlich die Kurve 2. Ordnung bildet. Entspricht $A_1 A_2$ sich nicht selbst, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen nach § 1 nicht auf ~~der~~ einer Graden, die Kurve 2. Ordnung ist also dann nicht ausgeartet, da sie keine Grade enthält. (vergl. Modell 363, Fach 35)

Wenn in diesem Fall dem Strahl A_1A_2 des Büschels A_2

die Grade t_1 (= A_1A_2) des Büschels A_1 zugeordnet ist, so ist t_1 Tangente durch A_1 an die erzeugte Kurve. Denn t_1 und der entsprechende Strahl A_1A_2 schneiden sich in A_1; t_1 hat mit der Kurve nur den Punkt A_1 gemein, ist also Tangente. Entsprechend findet man die Tangenten durch A_2 als den Strahl durch A_2, der der Strahl A_1A_2 des Büschels A_1 entspricht.

Das Ergebnis lässt sich auch so formulieren:
Zieht man nach vier festen Punkten einer nicht ausgearteten Kurve 2. Ordnung die Projektionsstrahlen von einem beliebigen Kurvenpunkt P aus, so ist das Doppelverhältnis der 4 Strahlen unabhängig von der Lage von P auf der Kurve. Man nennt dieses Doppelverhältnis das Doppelverhältnis der vier Punkte bezüglich der Kurve.

<u>Durch 5 Punkte A,B,C,D,E allgemeiner Lage geht genau eine Kurve 2.Ordnung k.</u>

Wir betrachten zum Beweis die Büschel 1.Ordnung durch A, B. Ist P ein laufender Punkt der gesuchten Kurve k, so muss $AP \leftrightarrow BP$ eine projektive <u>Beziehung zwischen den Büscheln ergeben</u> [1]). Insbesondere muss gelten $AC \leftrightarrow BC$, $AD \leftrightarrow BD$, $AE \leftrightarrow BE$. Durch diese drei Angaben wird die gesuchte Projektivität $A \barwedge B$, und damit die gesuchte Kurve k, eindeutig bestimmt.

---

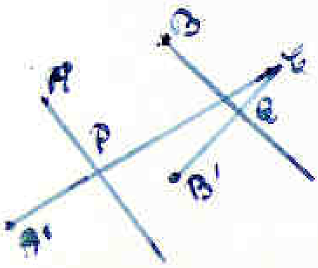
[1]) Das wurde oben nur für nicht ausgeartete Kurven 2.Ordnung bewiesen. Eine ausgeartete Kurve 2.Ordnung enthält aber keine 5 Punkte allgemeiner Lage (abgesehen vom Typ 6 § 7, der hier nicht mitgerechnet werden soll), die gesuchte Kurve k ist also jedenfalls nicht ausgeartet.

Damit nun 6 Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung liegen, müssen sie einer Bedingung genügen, die jener Projektivitätsforderung entspricht. Sind z.B. A,B,C,D,E,F diese Punkte, so ist notwendig und hinreichend die Bedingung

$$(AC,\ AD,\ AE,\ AF) = (BC,\ BD,\ BE,\ BF).$$

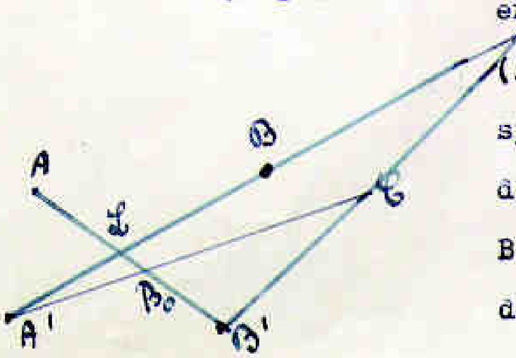
Diese Bedingung lässt sich nun in eine ~~Koll~~ völlig andere und mehr symmetrische Form bringen, die von Paskal gefunden würde, bevor man etwas von der projektiven Erzeugung der Kurve 2.Ordnung wusste.

Wir suchen zunächst,eine solche Kurve k durch drei Punkte A, B, C zu legen. Hierdurch ist zwischen den Büscheln (A) und (B) eine Projektivität definiert, die wir durch Perspektivitäten zu erfassen suchen.Zu diesem Zweck legen wir durch C zwei Graden C A', C B', die k nicht berühren. A' B' seien die zweiten Schnittpunkte dieser beiden Graden mit k. (Fig. 30.)



Sei P der Schnittpunkt eines Strahls von (A) mit A'C, und sei Q der Schnittpunkt des jenen entsprechenden Strahls von (B) mit B'C, so ist $P \leftrightarrow Q$ eine Projektivität zwischen A'C und B' C. Dabei entspricht aber C sich selbst, weil C Kurvenpunkt ist; also ist $A'C \barwedge B'C$ eine Perspektivität. Wie suchen ihr Zentrum auf:

(Fig.31)

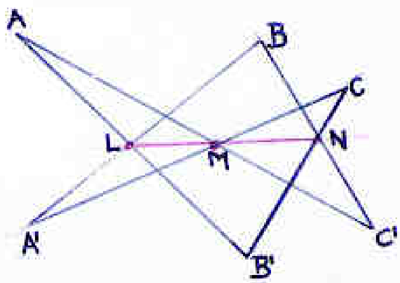


Dem Punkt B' von B'C (Fig.31) entspricht der Punkt B_0 = (AB',A'C) auf A'C.Ebenso entspricht dem Punkt A' von A'C der Punkt A_0 =(BA',B'C) auf B'C. Das gesuchte Zentrum L der Perspektivität $A'C \barwedge B'C$.

ist also $L = (B_0B', A_0A')$ ~~2)~~ $= (AB', BA')$.

Sei nun C' ein weiterer Punkt auf k (Fig.32). Sei $M = (AC', A'C)$. Also liegen M, N mit L auf einer Geraden.

(Fig.32)



Ist umgekehrt $N = (\cancel{M}\,LM, CB')$ und $C' = (AM, BN)$, so ist nach dem früheren:

$$(AC, AA', AB', AC') = (BC, BA', BB', BC')$$

Der Punkt C' liegt also in der Tat auf k.

Der hiermit bewiesene Paskal'sche Satz lautet:

Das Sechseck $A\,B'\,C\,A'\,B\,C'\,A$ liegt genau dann auf einer Kurve 2. Ordnung, wenn die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten

$L = (AB', A'B)$; $M = (AC', A'C)$; $N = (BC', B'C)$

auf einer Geraden liegen.

Durch Grenzübergang lässt sich der Paskal'sche Satz auch für den Fall beweisem, dass zwei Punkte des Sechsecks in einen zusammenfallen und ihre Verbindungsgrade durch die Kurventangente in jenem Punkt ersetzt wird. Ebenso können aber auch zwei oder drei Eckenpaare zusammenfallen.

Der Paskal'sche Satz liefert mit Hilfe der auftretenden Graden (L, M, N) ein Verfahren, um mit dem Linieal allein zu 5 Punkten allgemeiner Lage beliebig viele weitere Punkte der Kurve 2.Ordnung zu finden, die durch jene 5 Punkte geht. Auch die projektive Erzeugung selbst liefert solche Verfahren. Ebenfalls lassen sich mit dem Lineal allein beliebig viel Punkte einer Kurve 2.Ordnung finden, wenn ~~wir~~ vier verschiedene Kurvenpunkte und die Tangente in einem von ihnen gegeben ~~ist~~ sind, oder drei Kurvenpunkte und die Tangenten in zweien von ihnen.

Wir dualisieren nun die bisherigen Ergebnisse:

1) Vier feste Tangenten einer nicht ausgearteten Kurve 2.Ordnung schneiden eine bewegliche Tangente in vier Punkten festen Doppelverhältnisses.

Zusatz: Dieses Doppelverhältnis ist dasselbe, wie das Doppelverhältnis der 4 festen Berührungspunkte bezüglich der Kurve. Denn die Polarenverwandtschaft jener Kurve ist Dv. treu und führt die Tangenten in die Berührungspunkte über.

2) (Satz des Brianchon, über 100 Jahre nach dem des Paskal entdeckt):

Die Seiten eines Sechsecks sind dann und nur dann Tangenten einer Kurve 2.Ordnung, wenn die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt gehen.

3) Sind von einer Kurve 2.Ordnung 5 Tangenten, oder 4 Tangenten und auf einer von ihnen der Berührungspunkt, oder 3 Tangenten und auf zweien die Berührungspunkte gegeben, so ist die Kurve eindeutig bestimmt und beliebig viele weitere Tangenten sind mit dem Lineal allein konstruierbar.

Zusatz: Auch die Berührungspunkte jener Tangenten sind mit dem Lineal allein bestimmbar. Zum Beweis genügt es, den dualen Satz zu beweisen: Sind von einer nicht ausgearteten Kurve 2.Ordnung 5 Punkte A B C D E gegeben, so lässt sich die Tangente in A mit dem Lineal allein finden. In der Tat kann man mit dem Lineal allein zu jedem Strahl b des Büschels (B) denjenigen a aus (A) finden, der b bei der Projektivität A C $\leftrightarrow$ B C , A D $\leftrightarrow$ B D, A E $\leftrightarrow$ B E entspricht.

Die gesuchte Tangente erhält man aber, wenn man B = B A nimmt.

Die Ausführungen dieses Paragraphen gelten auch weitgehend für ausgeartete Kurven 2.Ordnung. Insbesondere gilt der Satz des Paskal auch, wenn k ein Geradenpaar ist, also für Sechsecke A B' C A' B C', bei denen A B C und A' B' C' je auf einer Graden liegen. Diese Ausartung des Satzes („Satz des Pappus") war schon in der Antike bekannt.

Näheres im eingangserwähnten Buch von Reye, Bd.1.

§ 10.

Affine Spezialisierung.

In affiner oder metrischer Behandlung hat man die Kurven 2.Ordnung k danach zu unterscheiden, wie sie zur unendlich fernen Graden g_∞ liegen. Wir beschränken uns auf Typ 2, § 7, und haben folgende Fälle zu unterscheiden:

1) k schneidet g_∞ in zwei verschiedenen Punkten.

   α) diese Punkte sind reell. „Hyperbel"

   β) Sie sind konjugiert komplex. „Ellipse".

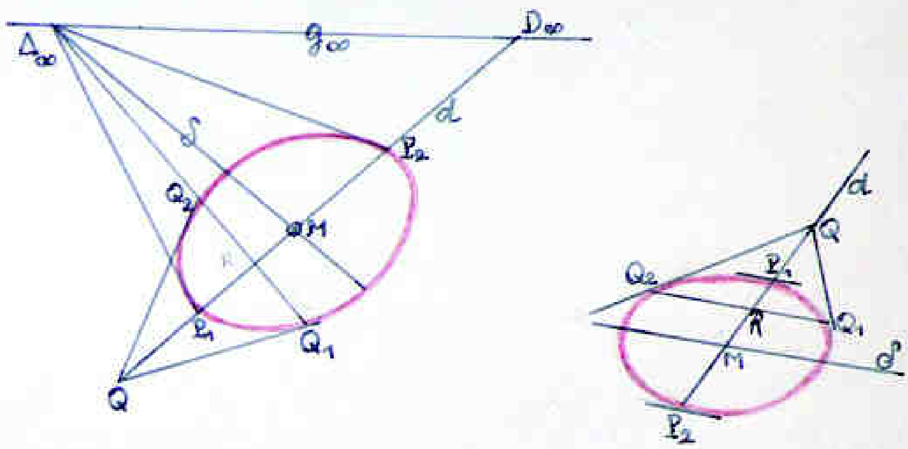
2) k berührt g_∞. „Parabel".

1) Wir betrachten (Fig.33) den Pol M von g_∞, der n.V. nicht auf g_∞ liegt, d.h. ein eigentlicher Punkt ist.
M heisst „Mittelpunkt" von k, und k heisst im Fall 1 bisweilen „Mittelpunktskurve 2.Ordnung". Jede Grade d durch M heisst „Durchmesser" von k; bisweilen bezeichnet man auch als Durchmesser nur die Sehne P_1P_2 von d (P_1, P_2 auf k), die M enthält. Trifft d g_∞ in D_∞ so ist D_∞ konjugiert zu M, also

$$(M, D_\infty , P_1P_2) = -1$$

Nun ist aber $(M\, D_\infty\, P_1P_2) = (P_1P_2\, M\, D_\infty) = \dfrac{P_1M}{P_2M}$
Also gibt $P_1M = MP_2$.
Alle Durchmesser werden vom Mittelpunkt halbiert.
Da d durch M geht, liegt der Pol Δ_∞ von d auf der Polaren von M, also auf g_∞. Der Durchmesser $\delta = M\Delta_\infty$ ist zu d konjugiert. Also ist D_∞ auch der Pol von δ.
(Fig.33)

(Fig.33)



Seien Q_1, Q_2 auf k, so dass $Q_1Q_2 \parallel \delta$. Dann wird Q_1Q_2 von d halbiert (in R) und die Tangenten in Q_1Q_2 schneiden sich auf d (in Q). Liegen Q_1Q_2 auf δ, so sind die Tangenten beide d parallel.

Beweis: n.V. geht Q_1Q_2 durch Δ_∞. Also

$$(R\,\Delta_\infty\,Q_1\,Q_2) = -1; \quad Q_1R = RQ_2.$$

Q ist der Pol von Q_1Q_2, also konjugiert zu Δ_∞, also auf d. Fällt Q_1Q_2 mit δ zusammen, so ist Q Pol von δ, also $Q = D_\infty$, also sind die Tangenten parallel d. Im Fall der Hyperbel (1_α) gibt es zwei reelle Schnittpunkte A_∞ B_∞ von k und g_∞. Also gibt es durch M zwei reelle Tangenten an k: $a=MA_\infty$ und $b=MB_\infty$. a, b heissen die Asymptoten von k. Sind d, δ konjugierte Durchmesser, so ist $(D_\infty\,\Delta_\infty\,A_\infty\,B_\infty) = -1$. Also $(d,\delta,a,b) = -1$; konjugierte Durchmesser liegen harmonisch zu den Asymptoten.

Anschaulich erkennt man (der Beweis werde hier übergangen): von zwei konjugierten Durchmessern der Hyperbel trifft stets der eine die Kurve reell, der andere nicht.

Wir suchen jetzt eine Normalform von k in affinen (z.B. kartesischen) inhomogenen Koordinaten.

Wir machen M zum Grundpunkt A_3 eines projektiven Systems (x^i) und legen A_1, A_2 so, dass A_1, A_2, A_3 ein Polardreieck von k wird. Dann liegen A_1, A_2 auf der Polaren g_∞ von M, g_∞ erfüllt also die Gleichung $x^3 = o$, d.h. die (x^i) sind homogene affine Koordinaten. Durch zweckmässige Wahl des Einheitspunktes erhält jetzt k eine der beiden Gleichungen

$$(20) \qquad (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = o$$
$$(21) \qquad (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = o.$$

g_∞ trifft also k in dem reellen Punktepaar $(x^1)^2 - (x^2)^2 = o$ oder in dem konjugiert komplexen $(x^1)^2 + (x^2)^2 = o$. Also gibt (20) die Hyperbel, (21) die Ellipse.

Setzen wir $\frac{x^1}{x^3} = \xi^1$, $\frac{x^2}{x^3} = \xi^2$, so sind ξ^1, ξ^2 inhomogene affine Koordinaten. Die eigentlichen Punkte $(x^3 \neq o)$ befriedigen (20) (21) auch noch, wenn man durch $(x^3)^2$ dividiert. In ξ^1, ξ^2 hat also k die Gleichung

$$(22) \quad (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 1 \quad \text{(Hyperbel)}$$
$$(23) \quad (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 1 \quad \text{(Ellipse).}$$

Dabei ist $\xi^1 = \xi^2 = o$ der Mittelpunkt von k.

Für die Hyperbel ist eine weitere Normalform wichtig. Wir machen wieder A_3 zum Mittelpunkt, aber A_1, A_2 zu den unendlic fernen Punkten von k. Dann ist (x^i) wieder ein homogenes affines System und k erhält jetzt gemäss S. 64,65 bei passender Wahl von $\mathfrak{E}$ die Gleichung

$$x^1 \cdot x^2 - (x^3)^2 = o$$

also in den inhomogenen Koordinaten ξ^1, ξ^2 :

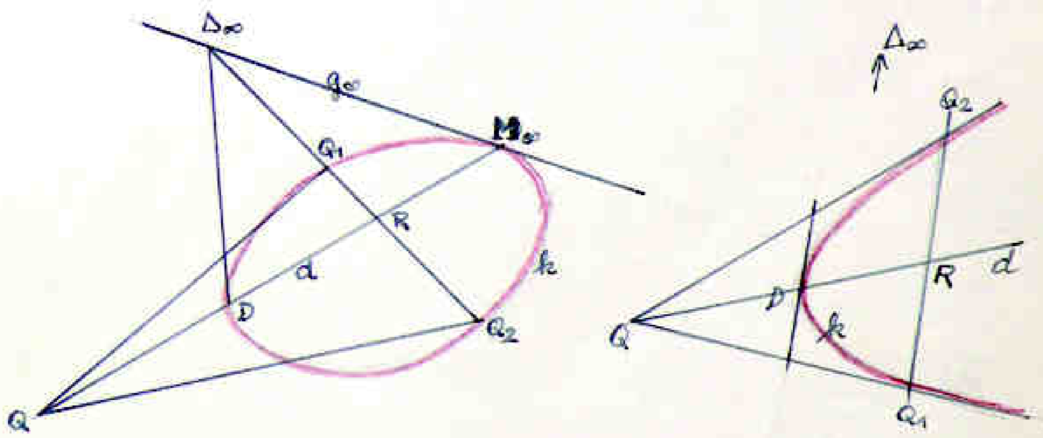
$$\xi^1 \cdot \xi^2 - 1 = 0 \qquad (24)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit den Asymptoten $\xi^1 = 0, \xi^2 = 0$.

Fall 2) Die Parabel k berühre g_∞ in M_∞. (Fig.34) M_∞ ist Pol von g_∞. Die Parabel besitzt also keinen Mittelpunkt. Alle Parallelen durch M_∞ heissen Durchmesser der Parabel. Der Pol Δ_∞ eines jeden Durchmessers d liegt auf g_∞, weil d durch den Pol M_∞ von g_∞ geht, also zu g_∞ konjugiert ist.

Alle Sehnen Q_1Q_2, die die Richtung Δ_∞ haben, werden von d halbiert und die Tangenten in Q_1Q_2 treffen sich auf d. Beweis wie zu Fig.33.

(Fig.34)



Die Tangente in dem einzigen eigentlichen Punkt D, den d mit k gemein hat, geht ebenfalls durch Δ_∞.

Ferner gilt folgender merkwürdiger Satz:

Q_1Q_2 sei eine beliebige Parabelsehne, R ihr Mittelpunkt, Q der Schnittpunkt der Tangenten in Q_1, Q_2, D der Schnittpunkt der Parabel mit R Q. Dann wird R Q von D halbiert. (Fig. 34) Offenbar ist nämlich Q R Durchmesser, also $(Q,R,D,M_\infty) = -1 = \frac{QD}{RD}$.

Wir suchen eine Normalform der Parabelgleichung in affinen Koordinaten. ξ^1, ξ^2. Wir wählen den Punkt A_1 des projektiven Systems als M_∞, A_3 beliebig auf k, A_2 als Pol von A_1A_3. Dann liegen wieder A_1 und A_2 auf g_∞, (x^i) sind homogene affine Koordinaten. Die Kurvengleichung wird nach passender Wahl von E: $(x^2)^2 - x^1 x^3 = o$.

Also nach Division durch $(x^3)^2$ (für $\xi^1 = \frac{x^1}{x^3}$, $\xi^2 = \frac{x^2}{x^3}$):

(25) $\quad (\xi^1)^2 - \xi^2 = o \qquad$ (Parabel)

Wir schreiben zum Schluss die allgemeine Gleichung der Kurven 2. Ordnung $f(x,x) = o$ bezw. $f(y,z) = o$ auf inhomogene affine Koordinaten um. Wir können ~~z.B. d.~~ o.B.d.A. (x^i) als homogene affine Koordinaten annehmen (sonst hätte man vorweg eine Kollineation zu machen, was an der Gestalt von $f(x,x)$ und $f(y,z)$ nichts änderte). Dann gilt für eigentliche Punkte $x^3 \neq o$. Dann und nur dann $f(x,x) = o$, falls $\frac{1}{(x^3)^2} \cdot f(x,x) = o$. In den inhomogenen Koordinaten $\xi^1 = \frac{x^1}{x^3}$, $\xi^2 = \frac{x^2}{x^3}$ erfüllen also die eigentlichen Punkte von $f(x,x) = o$ die Gleichung

(26) $a_{11}(\xi^1)^2 + 2\,a_{12}\xi^1\xi^2 + a_{22}(\xi^2)^2 + 2\,a_{13}\xi^1 + 2\,a_{23}\xi^2 + a_{33} = o$. Ebenso geht $f(y,z) = o$ nach Division durch y^3z^3 über in:

(27) $a_{11}\eta^1\zeta^1 + a_{12}(\eta^1\zeta^2 + \eta^2\zeta^1) + a_{22}\eta^2\zeta^2 + a_{13}(\eta^1 + \zeta^1) + a_{23}(\eta^2 + \zeta^2) + a_{33} = 0$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Aufgabe: In einem baryzeitrischen System mit gleichseitigem Fündamentaldreieck hat dessen Umkreis die Gleichung

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^3x^1 = 0.$$

§ 11.

Die Kreispunkte und die projektive Definition des Winkels.

(x^i) seien homogene kartesische Koordinaten, $\xi^1 = \frac{x^1}{x^3}$, $\xi^2 = \frac{x^2}{x^3}$ die zugehörigen inhomogenen kartesischen Koordinaten der eigentlichen Punkte $(x^3 \neq 0)$.

Dann sind Kreise alle und nur die Kurven 2.Ordnung, die einer Gleichung der folgenden Form genügen [1)]

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + 2a\xi^1 + 2b\xi^2 + c = 0.$$

Die entsprechende Gleichung in (x^i) lautet also

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + x^3(2ax^1 + 2bx^2 + cx^3) = 0$$

Die uneigentliche Grade $x^3 = 0$ wird also von jedem Kreis im Punktepaar:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \qquad (30)$$

geschnitten. Die Punkte I, J, aus denen dieses Punktepaar besteht

$$I \equiv \begin{matrix} x^1 = 1 \\ x^2 = i \\ x^3 = 0 \end{matrix} \qquad J \equiv \begin{matrix} x^1 = 1 \\ x^2 = -i \\ x^3 = 0 \end{matrix}$$

heissen die „Kreispunkte" oder „absolute Punkte" der Ebene.

Alle Kreise gehen durch I, J. Umgekehrt ist jede nicht ausgeartete Kurve 2.Ordnung durch I, J ein Kreis.

---

1) vergl. An.Geom.I. Dort war nur von reellen Kurven die Rede, was die Ungleichung $a^2 + b^2 - c > 0$ nach sich zog. Wir heben jetzt diese Beschränkung auf und erweitern dadurch die Kreisdefinition.

Denn sind A,B,C drei solche Punkte, dass A,B,C,I,J allgemein liegen, so geht durch diese fünf Punkte eindeutig eine Kurve k 2.Ordnung. Andererseits gibt es durch A,B,C genau einen Kreis[1] k'. k' geht durch I,J, ist also mit k identisch, d.h. k ist wirklich ein Kreis.

Ist M der Mittelpunkt eines Kreises k, so ist $x^3 = o$ Polare von M bezüglich k. $x^3 = o$ schneidet aber k in I,J. Also sind M I, M J die Tangenten an k durch M.

Jede Grade durch I oder J, ausser $x^3 = o$, heisst „absolute" oder „ isotrope" oder „Minimal" Grade. Die Gleichung der Minimalgraden hat also die Form

$$x^1 \pm i\, x^2 + a\, x^3 = o \qquad (31)$$

oder inhomogen

$$\xi^1 \pm i\, \xi^2 + a = 0 \;\cancel{\pm a = o} \qquad (32)$$

Durch jeden eigentlichen Punkt gehen genau zwei Minimalgraden.

Sind (ξ^1, ξ^2) und (η^1, η^2) zwei Punkte einer Minimalgraden, so ist

$$(\xi^1 - \eta^1)^2 + (\xi^2 - \eta^2)^2 = [\xi^1 - \eta^1 + i(\xi^2 - \eta^2)][\xi^1 - \eta^1 - i(\xi^2 - \eta^2)] = 0$$

Zwei beliebige eigentliche Punkte einer Minimalgraden haben stets den Abstand Null.(Daher der Name)

---

[1] Für reelle A B C allgemeiner Lage folgt dies aus der bekannten Elementarkonstruktion. Formuliert man diese analytisch,so gilt sie auch in Komplexen.

Offenbar gilt auch die Umkehrung: haben zwei verschiedene eigentliche Punkte den Abstand 0, so liegen sie auf einer Minimalgraden.

Das Minimalgradenpaar durch einen eigentlichen Punkt M ist der geometrische Ort aller Punkte, die von M den Abstand 0 haben, daher wird dies Gradenpaar auch als „Nullkreis" durch M bezeichnet. (Auch die Nullkreise sind also Kurven 2. Ordnung durch I, J.)

In Linienkoordinaten (u_i) werden die Büschel durch I bezw. J offenbar durch die Gleichungen

$$u_1 + i\, u_2 = 0 \quad \text{bezw.} \quad u_1 - i\, u_2 = 0$$

dargestellt. Das Büschelpaar durch (I) (J) d.h. die Gesamtheit aller Minimalgraden ist also das Büschel 2. Ordnung:

$$(u_1)^2 + (u_2)^2 = 0 . \qquad (33)$$

Die Kreispunkte und Minimalgraden kennzeichnen nun nicht nur die Abstände von Punkten, sondern auch die Winkel zwischen Graden. Wir beweisen zunächst:

Zwei reelle Graden (u_i) (v_i) stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sie zu den beiden Minimalgraden durch ihren Schnittpunkt harmonisch liegen.

In der Tat: die Graden stehen genau dann senkrecht, wenn

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 . \qquad (34)$$

Diese Gleichung besagt aber, dass die Graden (u_i), (v_i) konjugiert sind zum Büschelpaar (33) der Minimalgraden, und das ist nach § 8 der Behauptung äquivalent.

Nennen wir zwei Graden (u_i) (v_i), auch wenn sie nicht reell oder nicht verschieden sind, genau dann senkrecht, wenn sie (34) erfüllen, so ist Senkrechtstehen stets äquivalent mit Konjugiertheit bezüglich (33). (Zwei Minimalgraden durch denselben Kreispunkt sind also gleichzeitig parallel und senkrecht.)

Hieraus ~~f~~olgt der im reellen triviale Satz: Zwei Kreisdurchmesser sind genau dann konjugiert, wenn sie senkrecht stehen.

Wir suchen nun allgemein den Winkel zweier reeller Graden in Beziehung zu setzen zu dem Doppelverhältnis, das sie mit den beiden Minimalgraden durch den Schnittpunkt bilden.

Wir definieren den Winkel φ der Graden (u_i) (v_i) durch die Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\,;\quad \sin\varphi = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \qquad (35)$$

Da (u_i) und (v_i) nur bis auf einen (vielleicht negativen) Proportionalitätsfaktor bestimmt sind, ist φ durch (35) nur bis auf Vielfache von π bestimmt.

Im Büschel $w_i = \lambda u_i + \mu v_i$ hat die Minimalgrade m durch I die Koordinaten $\lambda, \mu,$ die der Relation genügen:

$$\lambda u_1 + \mu v_1 + i\,(\lambda u_2 + \mu v_2) = 0$$

Also $\lambda = v_1 + i\,v_2\,;\quad \mu = -u_1 - i\,u_2\,.$

Ebenso gehört die Minimalgrade n durch J zu den Koordinaten ϱ, σ:

$$\varrho = v_1 - i\,v_2\,,\quad \sigma = -u_1 + i\,u_2.$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Das Doppelverhältnis $D = (u, v, m, n)$ ist bekanntlich durch die Formel gegeben (Verg.S.25):

$$D = \frac{(-u_1 + i u_2)(-v_1 + i v_2)}{(-u_1 + i u_2)(-v_1 - i v_2)} = \frac{(u_1 + i u_2)(v_1 - i v_2)}{(u_1 - i u_2)(v_1 + i v_2)}$$

$$= \frac{(u_1 + iu_2)^2 (v_1 - iv_2)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{[u_1 v_1 + u_2 v_2 + i(u_2 v_1 - u_1 v_2)]^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

Also

$$\left\{ \begin{aligned} D &= (\cos\varphi + i \sin\varphi)^2 = e^{2i\varphi} . \\ \varphi &= \frac{1}{2i} \log D(u, v, m, n) \qquad (36) \end{aligned} \right.$$

Diese wichtige Formel wurde von LAGUERRE im Jahre 1853 entdeckt.

Anwendungen:

Seien A B zwei feste Punkte eines Kreises k, C ein laufender Punkt von k. Dann ist nach § 9 (C A, C B, C I, CJ) konstant. Nach (36) ist dies nichts anderes als der Satz über den Peripheriewinkel.

Seien A_i $(i=1,2,3)$ die Ecken, a_i die Seiten, α_i die Winkel eines Dreiecks, m_i, n_i die Minimalgraden durch A_i. Dann ist nach S.31 (nach leichter Umformung)

$$(a_1, a_2, m_3, n_3)(a_2, a_3, m_1, n_1)(a_3, a_1, m_2, n_2) = 1.$$

Also

$$e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} = 1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k\pi$$

Das ist der Satz über die Winkelsumme in Dreieck; k=1 müsste durch eine Zusatz-Ueberlegung bewiesen werden und kann hier nicht herauskommen, weil alle Winkel im Vorigen nur bis auf Vielfache von π bestimmt waren.

Eine weitere wichtige Anwendung wird später bei den Aehnlichkeitstransformationen der Ebene gemacht werden. Schon jetzt ist bewiesen: Aehnlichkeitstransformationen sind alle und nur die Kollineationen der Ebene, die die Punkte I, J entweder festlassen oder vertauschen.

Bleiben die Punkte I, J fest, so auch alle Winkel. Werden I, J vertauscht, so gehen die Doppelverhältnisse, die zur Winkeldefinition führen, in ihr reziproken über (denn allgemein gilt $(a\ b\ c\ d) = \frac{1}{(a\ b\ c\ d)}$), alle Winkel wechseln also ihr Vorzeichen.

3. Kapitel.

Projektive Räume von drei und mehr Dimensionen.

§ 12.

Grundlagen.

Jedes System von $n+1$ komplexen Zahlen $x^1, \dots, x^{n+1}$, heisst ein Vektor $\mathfrak{x}$ (der Länge $n+1$), $x^1, \dots, x^{n+1}$, heissen die Komponenten oder Koordinaten dieses Vektors. Der Nullvektor $\underline{0}$ ist das System $x^1 = x^2 = \dots = x^{n+1} = 0$. $\lambda\mathfrak{x}$ ist das System $\lambda x^1, \lambda x^2, \dots \lambda x^{n+1}$; $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ ist das System $x^1+y^1, x^2+y^2, \dots, x^{n+1}+y^{n+1}$. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ bedeutet: $a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^n = b^n, a^{n+1} = b^{n+1}$. Seien beliebig viele Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$ gegeben, und seien $\lambda, \mu \dots, \nu$ kompleze Zahlen, dann heisst die Gesamtheit der Vektoren $\mathfrak{x}$, die sich in der Form $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \dots + \nu\mathfrak{c}$ darstellen lassen, eine lineare Vektormannigfaltigkeit oder ein linearer Raum R. Man sagt, R wird von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$ „aufgespannt". Sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \dots, \mathfrak{z}$ Vektoren von R, so ist der von ihnen aufgespannte Raum ganz in R enthalten.

Beliebig viele Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$ heissen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \dots + \nu\mathfrak{c} = 0$ nur für $\lambda = \mu = \dots = \nu = 0$ bestehen kann; sonst heissen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$ linear abhängig. Alle Vektoren aus R sind linear abhängig von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$. Umgekehrt besteht R aus allen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{c}$ linear abhängigen Vektoren.

Der Rang eines linearen Raumes ist die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren dieses Raums. Die Dimension eines

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

linearen Raumes ist sein Rang vermindert um eins. Ein linearer Raum der Dimension k wird mit R_k bezeichnet. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{k+1}$ irgendwelche $k+1$ linear unabhängige Vektoren aus R_k, so wird R_k von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k+1}$ aufgespannt. Denn ist $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor aus R_k, so sind die $k+2$ Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k+1}$ nach Voraussetzung linear abhängig; es gibt Zahlen $\mu^0, \mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^{k+1}$ die nicht alle verschwinden, so dass

$$\mu^0 \mathfrak{b} + \mu^1 \mathfrak{a}_1 + \cdots \mu^{k+1} \mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{o}$$

μ^0 ist von Null verschieden; sonst gälte $\mu^0 = 0$ und daher $\mu^1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mu^{k+1} \mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k+1}$ linear unabhängig sind, wäre $\mu^1 = \ldots = \mu^{k+1} = 0$, also verschwänden alle μ entgegen der Voraussetzung. Somit ist in der Tat $\mu_0 \neq 0$. Setzen wir $-\frac{\mu^1}{\mu^0} = \lambda^1, -\frac{\mu^2}{\mu^0} = \lambda^2, -\frac{\mu^3}{\mu^0} = \lambda^3, \ldots, -\frac{\mu^{k+1}}{\mu^0} = \lambda^{k+1}$ so ergibt sich die Behauptung:

$$\mathfrak{b} = \lambda^1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda^{k+1} \mathfrak{a}_{k+1}.$$

In § 13 werden wir beweisen: wird ein Raum von $k+1$ unabhängigen Vektoren aufgespannt, so hat er genau die Dimension k. (Klar ist, dass seine Dimension nicht kleiner als k ist)

Ein Raum des Ranges Null kann nur aus dem Nullvektor bestehen.

Ein Raum R_0 der Dimension 0 besitzt einen Vektor $\mathfrak{a} \neq 0$ und alle Vektoren von R_0 sind in der Form $\lambda \mathfrak{a}$ darstellbar.

Jeder R_0 heisst ein Punkt. Die Komponenten von $\mathfrak{n}$ heißen

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

die (projektiven) Koordinaten des Punkts. Sie sind bis auf einen von Null verschiedenen gemeinsamen Faktor bestimmt.

Jeder R_1 heisst eine (projektive) Gerade. Jede Grade besitzt zwei linear unabhangige Vektoren ~~a, b~~ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, also zwei verschiedene Punkte, und alle Punkte $\mathfrak{x}$ der Graden sind in der Form

$$\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b}$$

darstellbar, die Grade wird von jenen beiden Punkten aufgespannt.

Haben zwei Graden g, k zwei verschiedene Punkte A, B gemein, so haben sie alle Punkte gemein. Denn sowohl g als auch k wird von A,B aufgespannt.

Jeder R_2 heisst(projektive) Ebene. Jede projektive Eben besitzt drei Punkte, die nicht auf einer Graden liegen, und wird von ihnen aufgespannt.Wenn in einer Ebene zwei Punkte liegen, so auch ihre Verbindungsgrade, d,h. die Grade, die von ihnen aufgespannt wird. Haben also zwei Ebenen zwei Punkte gemeinsam, so auch deren Verbindungsgrade.

k Punkte heissen „in allgemeiner Lage" wenn die zugehörigen Vektoren linear unabhangig sind.

Jeder R_k besitzt k+1 Punkte allgemeiner Lage,zwei verschiedene R_k haben höchstens k Punkte allgemeiner Lage gemein Die gemeinsamen Punkte zweier linearer Räume sind wieder ein linearer Raum. Denn ist l die Maximalzahl gemeinsamer Punkte allgemeiner Lage, so haben die Raume den R_{l-1} gemein, den die

Punkte mitspannen, und keinen weiteren Punkt.

Die Gesamtheit aller Punkte heisst der n dimensionale (projektive) Koordinatenraum R_n.

Wir zeigen in § 13, dass es im R_n höchstens und stets $n+1$ unabhängige Punkte gibt, und dass diese ihn aufspannen. Der Vektor $\mathfrak{b}$ $(b^1, \ldots, b^{n+1})$ heisst konjugiert komplex zu $\mathfrak{a}$ $(a^1, \ldots, a^{n+1})$ wenn $b^1 = \overline{a^1}, \ldots, b^{n+1} = \overline{a^{n+1}}$.
Die Menge aller Vektoren, die zu denen eines R_k konjugiert komplex sind, bilden wieder einen linearen Raum der Dimension k, dieser Raum $\overline{R_k}$ heisst zu R_k konjugiert komplex. Es ist offenbar $(\overline{\overline{R_k}}) = R_k$. Ein linearer Raum heisst reell, wenn er mit seinem konjugiert komplexen zusammenfällt.

Es gilt allgemein: der Schnittraum konjugiert komplexer linearer Räume ist reell.

Die Verbindungsgrade eines nicht reellen Punkts mit seine konjugiert komplexen ist reell.

Jedes System S von Elementen, die Punkte, Graden, Ebenen, lineare Räume der Dimension k ($k=0,1, \;\; ,n$) heissen, wird n-dimensionaler projektiver Raum genannt, wenn die Punkte aus S umkehrbar eindeutig auf die Punkte des R_k so abgebildet werden können, dass dabei alle linearen Räume in lineare Räume gleicher Dimension übergehen. Die in den ersten Kapiteln definierte projektive Ebene ist daher ein zweidimensionaler projektiver Raum.

§ 13.

Lineare Räume.

I. Ein Hilfssatz aus der Algebra.

(vergl. Ausarbeitung Geometrie I Anhang.)

n homogene lineare Gleichungen

$$a_1^1 x^1 + \dots + a_{n+1}^1 x^{n+1} = 0$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_1^n x^1 + \dots + a_{n+1}^n x^{n+1} = 0$$

in n+1 Variabeln $x^1, \dots, x^{n+1}$ haben stets eine nichttriviale Lösung (d.h. eine von $x^1 = x^2 = \dots = x^{n+1} = 0$ verschiedene).

Beweis durch Induktion:

1) n=1. α) $a_1^1 = a_2^1 = 0$. , x^1, x^2 beliebig.

β) o.B.d.A. $a_2^1 \neq 0$.

$$x^1 \text{ beliebig } \neq 0,\ x^2 = -\frac{a_1^1 x^1}{a_2^1} \quad .$$

2) Der Satz sei bis n-1 bewiesen.

α) alle $a_k^i = 0$ ($i = 1, \dots n$; $k = 1, \dots, n+1$) $x^1, \dots, x^{n+1}$ beliebig.

β) o.B.d.A. $a_{n+1}^n \neq 0$. Wir setzen

$$x^{n+1} = -\frac{1}{a_{n+1}^n}\left(a_1^n x^1 + \dots + a_n^n x^n\right)$$

Dann ist die letzte Gleichung für beliebiges $x^1, \dots, x^n$ erfüllt. Indem wir jenen Ausdruck für x^{n+1} in die ersten $n-1$ Gleichungen einsetzen, werden diese ein homogenes lineares Gleichungssystem von n-1 Gleichungen für die n Unbekannten $x^1 \dots x^n$, womit die Induktion vollendet ist.

II. Parameterdarstellung linearer Räume.

$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{k+1}$, seien linear unabhängige Vektoren aus

R_n. Dann heissen $\lambda^1, \dots, \lambda^{k+1}$ die <u>Parameter</u> des Raums R:

$$\mathfrak{x} = \lambda^1 \mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda^{k+1} \mathfrak{a}_{k+1}$$

Jedem Vektor $\mathfrak{x}$ aus R entspricht ein System $\lambda^1, \dots \lambda^{k+1}$ <u>eindeutig.</u> Denn wenn $\mathfrak{x}$ ausserdem zu $\mu^1, \dots, \mu^{k+1}$ gehört, so folgt $\mathfrak{x} - \mathfrak{x} = 0 = (\lambda^1 - \mu^1)\mathfrak{a}_1 + \dots + (\lambda^{k+1} - \mu^{k+1})\mathfrak{a}_{k+1}$. Da $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{k+1}$ linear unabhängig sind, folgt hieraus in der Tat $\lambda^1 - \mu^1 = \dots = \lambda^{k+1} - \mu^{k+1} = 0$.

<u>Die Punkte und linearen Räume, die in R enthalten sind, bilden einen k dimensionalen projektiven Raum, in dem $\lambda^1, \dots, \lambda^{k+1}$ Koordinaten sind.</u>

Zum Beweis fassen wir $\lambda^1, \dots, \lambda^{k+1}$ als Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{l}$ der Länge k+1 auf und ordnen die Vektoren $\mathfrak{x}$ aus R den Vektoren $\mathfrak{l}$ zu. Diese Abbildung $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{l}$ ist umkehrbar eindeutig, wie soeben bewiesen. Dabei gilt:

1) $\mathfrak{x} = 0 \quad \leftrightarrow \mathfrak{l} = 0$

2) Aus $\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{l}$, $\mathfrak{y} \leftrightarrow \mathfrak{m}$ folgt

$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \leftrightarrow \mathfrak{l} + \mathfrak{m}$.

3) aus $\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{l}$ folgt

$\varrho\mathfrak{x} \leftrightarrow \varrho\mathfrak{l}$.

4) aus $\mathfrak{x}_i \leftrightarrow \mathfrak{l}_i$ (i=1, ..., r) folgt nach 2)3):

$$\sum_{i=1}^{r} \varrho^i \mathfrak{x}_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \varrho^i \mathfrak{l}_i$$

5) Sei $\mathfrak{x}_i \leftrightarrow \mathfrak{l}_i$ (i=1, ..., r). Dann sind die $\mathfrak{x}_i$ dann und nur dann linear abhängig, wenn es die $\mathfrak{l}_i$ sind. Denn nach 1) und 4) ist

$$\sum_{i=1}^{r} \varrho^i \mathfrak{x}_i = 0$$

äquivalent mit

$$\sum_{i=1}^{r} \varrho^i \mathfrak{l}_i = 0.$$

4) 5) besagt in Worten: Durchläuft $\mathfrak{z}$ einen linearen Raum, so durchläuft ℓ einen linearen Raum derselben Dimension.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

R hat auch als Unterraum von R_n die Dimension k, d.h. die Maximalzahl unabhängiger Vektoren aus R beträgt k+1.

Zum Beweis genügt es, die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren ℓ zu ermitteln. Sie ist höchstens k+1. Denn seien k+2 Vektoren $\ell_1, \dots \ell_{k+2}$ gegeben; dann suchen wir $z^1 \dots z^{k+2}$ so zu bestimmen, dass

$$z^1\ell_1 + \dots + z^{k+2}\ell_{k+2} = 0.$$

Da die ℓ_i $(i=1 \dots k+2)$ die Länge k+1 haben, brauchen die k+2 Variabeln z^i nur k+1 homogenen linearen Gleichungen zu genügen; da diese nach Hilfssatz I stets eine nichttriviale Lösung haben, sind $\ell_1, \dots, \ell_{k+2}$ in der Tat stets linear abhängig. k+1 unabhängige Vektoren gibt es aber, nämlich die „Einheitsvektoren" $\mathfrak{e}_r$ $(r=1 \dots k+1)$ mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} e_r^i &= 1 \quad \text{für } i = r \\ e_r^i &= 0 \quad \text{„} \quad i \neq r \end{aligned} \qquad (i = 1, \dots, k+1)$$

Aus $\sum_{r=1}^{k+1} z^r \mathfrak{e}_r = \mathfrak{o}$ folgt in der Tat

$$\sum_{r=1}^{k+1} z^r e_r^i = 0 \qquad (i = 1, \dots k+1) \quad \text{also}$$

$$z^i = 0 \qquad (i = 1, \dots k+1)$$

Wir haben somit die in § 12 aufgestellte Behauptung bewiesen:

Ein linearer Raum hat dann und nur dann die Dimension k, wenn er von k+1 Punkten allgemeiner Lage aufgespannt wird.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

III. Kollineationen.

Wir spezialisieren II auf den Fall $k = n$. Dann durchläuft $\mathfrak{y}$ den ganzen R_n und $\mathfrak{l}$ durchläuft ebenfalls einen projektiven Raum $\mathfrak{L}_n$. Die Abbildung $R_n \leftrightarrow \mathfrak{L}_n$, die durch $\mathfrak{y} \leftrightarrow \mathfrak{l}$ vermittelt wird, heisst eine Projektivität oder Kollineation. Bezeichnen wir mit a^i_r $(i = 1, \dots, n+1)$ die Komponenten von $\mathfrak{a}_r$ $(r = 1, \dots, n+1)$, so ist bekanntlich die lineare Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_r$ äquivalent mit $|a^i_r| \neq 0$.

Ersetzen wir noch die Buchstaben λ, $\mathfrak{l}$ durch y, $\mathfrak{x}$, so erhält die allgemeinste Kollineation $\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{y}$ die Gestalt:

$$(40) \qquad x^i = \sum_{r=1}^{n+1} a^i_r y^r \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad |a^i_r| \neq 0$$

Faßt man y^r als projektive Koordinaten in R_n auf, so gibt (40) eine „Kollineation des R_n in sich". Jede Kollineation führt umkehrbar eindeutig und inzidenztreu alle linearen Räume in solche derselben Dimension über. /$^=$

IV. Gleichungssystem linearer Räume.

Der Ausdruck $a_1 x^1 + \dots + a_{n+1} x^{n+1}$ werde mit $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ abgekürzt; $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{x}$ sind also die Vektoren mit den Komponenten a_i bzw. x^i $(i = 1, \dots, n+1)$. Es gilt $(\lambda \mathfrak{a})\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(\lambda \mathfrak{x}) = \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{x})$
$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{a}(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{y}$.

/$^=$ Sind alle a^i_r reell, so heisst (40) eine reelle Kollineation. Reelle Kollineationen führen konjugiert komplexe Räume in ebensolche über, also insbesondere reelle in reelle.

Sei das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1 \mathfrak{x} = 0 \\
(41) \qquad &\mathfrak{a}_2 \mathfrak{x} = 0 \\
&\mathfrak{a}_k \mathfrak{x} = 0
\end{aligned}
$$

vorgelegt. Sei s die Maximalanzahl linearer unabhängiger Lösungen $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_s$ von (41). ($s \leqq n+1$) Dann ist $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda^i \mathfrak{x}_i$ bei beliebigen λ^i auch eine Lösung von (41). Umgekehrt, ist $\mathfrak{x}$ irgendeine Lösung von (41), so sind die $s+1$ Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_s$ linear abhängig, also besteht eine Relation $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda^i \mathfrak{x}_i$, was analog § 13 aus der Unabhängigkei von $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_s$ folgt. Zusammenfassend:

<u>Die Lösungen von (41) bilden einen R_{s-1}.</u>

Wir suchen aus den $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_k$ (41) die Zahl s zu bestimmen. Sei r der Rang des von $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k$ aufgespannten Raumes (also $r \leqq k$) , dann beweisen wir:
$r \leqq n+1$

(42) <u>$r + s = n + 1$</u>

Beweis:

Ist $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \mathfrak{a}_i$, so folgt aus (41) : $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$. O.B.d.A. Dürfen wir annehmen, dass die ersten r Vektoren $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r$ linear unabhängig sind, während $\mathfrak{a}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{a}_k$ von $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r$ abhängen. (41) ist also äquivalent mit

$$
(41') \qquad
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1 \mathfrak{x} = 0 \\
&\cdots\cdots \\
&\mathfrak{a}_r \mathfrak{x} = 0
\end{aligned}
$$

Wir bestimmen nun einen Vektor $\mathfrak{b}_1$, sodass $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_1$ linear unabhängig sind. Einen solchen Vektor gibt es, falls

$r < n+1$. Ebenso gibt es demnach ein Vektor b_2, sodass $a_1 \cdots a_r\, b_1 b_2$ unabhängig sind, falls $r+1 < n+1$. 96.

. So fortfahrend kann man $b_1, \cdots, b_{n-r+1}$ so bestimmen, dass die $n+1$ Vektoren $a_1, \cdots, a_r, b_1 \cdots b_{n-r+1}$ linear unabhängig sind. Seien $a_{\varrho i}$ bezw. $b_{\varrho i}$ die Komponenten von a_ϱ bezw. b_ϱ. Dann ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,n+1} \\ b_{11} & \cdots & b_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-r+1,1} & \cdots & b_{n-r+1,n+1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Also stellt die Abbildung

$$\mathfrak{x} \longleftrightarrow \mathfrak{y}$$

$$(42) \qquad \begin{aligned} y^1 &= a_1 \mathfrak{x} \\ &\cdots \\ y^r &= a_r \mathfrak{x} \\ y^{r+1} &= b_1 \mathfrak{x} \\ &\cdots \\ y^{n+1} &= b_{n-r+1} \mathfrak{x} \end{aligned}$$

eine Kollineation dar. Die allgemeine Lösung von (41') ist identisch mit der Gesamtheit der Vektoren $\mathfrak{y}$ mit $y^1 = \cdots = y^r = 0$. Da bei einer Kollineation alle Dimensionen erhalten bleiben, genügt es, die Dimension dieses Raumes zu betrachten. Bedeuten wieder e_ϱ $(\varrho = 1, 2 \cdots, n+1)$ die (linear unabhängigen) Vektoren mit den Komponenten

$$e^i_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{für } i = \varrho \\ 0 & \text{„} \ i \neq \varrho \end{cases}$$

und hat der Vektor (Komponenten y^i) die Eigenschaft $y^1 = \ldots = y^r = 0$, so ist

$$\mathfrak{y} = \sum_{\varrho = r+1}^{n+1} y^\varrho e_\varrho .$$

<u>Der Raum $y^1 = \cdots = y^r = 0$, also auch der Lösungsraum von (41) hat somit den Rang $\varrho = n - r + 1$.</u> q.e.d.

Sind die Vektoren $a_1 \cdots a_r$ reell, so ist ~~mit~~ jedem Vektor auch sein konjugiert komplexer Lösung von (41); der Durch

(41) bestimmte Raum ist reell. Ebenso ist der Raum (41) reell, wenn die $\mathfrak{a}_k$ teils reell, teils paarweise konjugiert komplex sind. Der Raum (41) ist stets konjugiert komplex zu dem Raum $\bar{\mathfrak{a}}_1\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{a}}_2\mathfrak{x} = \dots = \bar{\mathfrak{a}}_r\mathfrak{x}$.

V. Doppelverhältnis auf geraden Punktreihen und in Hyperebenenbüscheln. Dualitätsprinzip.

Seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ linear unabhängig. Dann liegen die vier Punkte A $(\mathfrak{x})$, B $(\mathfrak{y})$, C $(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})$, D $(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})$ auf einer Geraden. Es sei $\lambda \neq 0$. Dann heisst $\frac{\mu}{\lambda}$ = (A,B,C,D) das Doppelverhältnis von A,B,C,D.

<u>Bei Kollineationen bleibt jedes Doppelverhältnis ungeändert.</u> Dann ist $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y} \to \mathfrak{y}'$ bei einer Kollineation, so ist wegen der Linearität von (40) :

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}'+\mathfrak{y}', \quad \lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y} \to \lambda\mathfrak{x}'+\mu\mathfrak{y}'.$$

λ, μ sind gemäss II projektive Koordinaten auf der Graden durch A,B. Also haben diese Koordinaten im R_n dieselbe Bedeutung wie die früher gefundene.

Sei $\mathfrak{a} \neq 0$. Dann stellt $\mathfrak{a}\mathfrak{x} \neq 0$ einen R_{n-1} dar, oder wie man häufig sagt, eine „Hyperebene". (Die Graden sind die „Hyperebenen" der projektiven Ebene, die Ebenen sind die Hyperebenen des dreidimensionalen projektiven Raums).

Das Gleichungssystem $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$ stellt gemäss IV eine Hyperebene R_{n-1} oder einen R_{n-2} dar, jenachdem $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$ gilt oder nicht. Im ersten Fall wird die Hyperebene $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$ dargestellt. Zwei Hyperebenen fallen dann und nur dann zusammen, wenn ihre Gleichungen proportional sind.

Seien a, b unabhängige Vektoren. Wir betrachten die variable Hyperebene

$$(43) \quad \lambda\, \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mu\, \mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0.$$

Durchlaufen λ, μ alle Zahlenpaare ausser 0,0, so sagt man, die Hyperebenen (43) durchlauft ein „Büschel". Stets enthält (43) den R_{n-2} $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$, den „Träger" des Büschels. Ist $\lambda \neq 0$, so heisst $\frac{\mu}{\lambda}$ das Doppelverhältnis der vier Hyperebenen $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$, $\lambda\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$.

Eine Grade R_1 und ein R_{n-2} haben im allgemeinen keinen Punkt gemein. Sind nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$ die Gleichungen des R_{n-2} und ist $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}$ eine Parameterdarstellung der Graden, so müssten λ, μ dem System genügen:

$$\begin{aligned} \lambda\, \mathfrak{a}\mathfrak{y} &+ \mu\, \mathfrak{a}\mathfrak{z} = 0 \\ \lambda\, \mathfrak{b}\mathfrak{y} &+ \mu\, \mathfrak{b}\mathfrak{z} = 0 \end{aligned}$$

Ein gemeinsamer Punkt existiert also nur für den Fall

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{y} & \mathfrak{a}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{y} & \mathfrak{b}\mathfrak{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Sei diese Bedingung nicht erfüllt. Dann schneidet jede Hyperebene des Büschels (43) die Grade in genau einem Punkt. Denn aus

$$\begin{aligned} \varrho\, \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \sigma\, \mathfrak{b}\mathfrak{x} &= 0 \quad (\varrho, \sigma \neq 0,0) \\ \mathfrak{x} &= \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z} \end{aligned}$$

folgt $\lambda(\varrho\, \mathfrak{a}\mathfrak{y} + \sigma\, \mathfrak{b}\mathfrak{y}) + \mu(\varrho\, \mathfrak{a}\mathfrak{z} + \sigma\, \mathfrak{b}\mathfrak{z}) = 0$.

Wegen $\varrho, \sigma \neq 0,0$ und $\begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{y} & \mathfrak{b}\mathfrak{y} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{z} & \mathfrak{b}\mathfrak{z} \end{vmatrix} \neq 0$ verschwinden die Koëffizienten von λ, μ nicht beide zugleich, also ist der Schnittpunkt jener Hyperebene mit der Graden g eindeutig bestimmt.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Verschiedene Hyperebenen e, e' aus (43) schneiden g in verschiedenen Punkten P, P'. Denn hätte g den Punkt P mit e,e' gemein, so auch mit dem gemeinsamen R_{n-2} von e,e'. Das wäre aber der Raum $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$, denn dieser R_{n-2} ist allen Hyperebenen (43) gemein.

Sei nun $\alpha\mathfrak{y}'$ der Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$, $\beta\mathfrak{z}'$ der mit $\mathfrak{b}\mathfrak{x}=0$. Also $\mathfrak{a}\mathfrak{y}' = \mathfrak{b}\mathfrak{z}' = 0$, $\mathfrak{a}\mathfrak{z}' \neq 0$, $\mathfrak{b}\mathfrak{y}' \neq 0$. Wir bestimmen $\alpha, \beta \neq 0,0$ so, dass $\alpha\mathfrak{y}' + \beta\mathfrak{z}'$ auf $\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$ liegt. Das heisst: $\alpha(\mathfrak{b}\mathfrak{y}') + \beta(\mathfrak{a}\mathfrak{z}') = 0$. Setzen wir noch $\alpha\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}$, $\beta\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$, so wird

der Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$: $\mathfrak{y}$

„ „ „ „ „ $\mathfrak{b}\mathfrak{x} = 0$: $\mathfrak{z}$

„ „ „ „ „ $\mathfrak{a}\mathfrak{x}+\mathfrak{b}\mathfrak{x}=0$: $\mathfrak{y}+\mathfrak{z}$ (also $\mathfrak{a}\mathfrak{z} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} = 0$)

„ „ „ „ „ $\lambda\mathfrak{a}\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{b}\mathfrak{x}=0$: $\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}$. In der Tat

ist $(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b})(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}) = \lambda\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{z} + \mathfrak{b}\mathfrak{y}) = 0$.

Damit haben wir den wichtigen Satz:

Vier Hyperebenen eines Büschels, die das Doppelverhältnis $\frac{\mu}{\lambda}$ haben, schneiden jede Grade, die mit dem Träger des Büschels keinen Punkt gemein hat, in 4 Punkten des Doppelverhältnisses $\frac{\mu}{\lambda}$.

Wir betrachten die „Korrelation" K_o, die jeder Hyperebenen $\mathfrak{a}\mathfrak{x}=0$ den Punkt $\mathfrak{a}$ zuordnet. K_o führt gemäss IV inzidenztreu jeden R_k in einen R_{n-k-1} über. Den Punkten einer Graden entsprechen gemäss IV doppelverhältnistreu die Hyperebenen eines Büschels.

Korrelation nenen wir jede Abbildung, die aus K_o und einer Kollineation hervorgeht. Wie bei der projektiven Ebene zeigt man, dass jede Korrelation $6 \to 9$ durch eine Gleichung der Form dargestellt wird

$$(44) \quad \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik} x^i y^k = 0 \qquad |a_{ik}| \neq 0$$

Jede Korrelation führt alle R_k in R_{n-k-1} inzidenztreu über und bildet die graden Punktreihen doppelverhältnistreu auf die Hyperebenen eines Büschels ab (die Grade entspricht dem Träger).

Sind alle a_{ik} reell, so heisst die Korrelation reell. Dann gehen konjugiert komplexe bezw. reelle R_k in ebensolche R_{n-k-1} über.

VI. Der dreidimensionale projektive Raum.

Wir setzen $n = 3$. Es zeigt sich, dass der gewöhnliche Raum zum R_3 in einer ähnlichen Beziehung steht wie die gewöhnliche Ebene zum R_2. Nur lässt sich der Uebergang nicht mehr aus der Anschauung ableiten.

Im R_3 sind die Hyperebenen projektive Ebenen R_2. Zwei Ebenen fallen zusammen oder haben eine Grade gemein $(R_{n-2} = R_1)$ Zwei Graden sind im allgemeinen punktfremd (windschief). Haben sie einen Punkt gemein, so auch eine Ebene. Denn liegt P auf g und h und ist Q ein weiterer Punkt von g, R ein weiterer von h, so enthält die Ebene P,Q,R beide Graden g,h.

Eine Ebene und eine Grade haben mindestens einen Punkt gemein. Also haben drei Ebenen einen Punkt gemein, ebenso zwei Graden einer Ebene.

Die Verbindungsgrade konjugiert komplexer (nicht reeller

Punkte und die Schnittgrade konjugiert komplexer (nicht reeller) Ebenen sind reell.

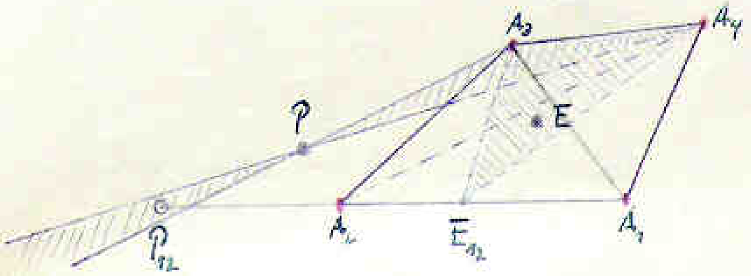
Konjugiert komplexe Graden sind im allgemeinen windschief. Andernfalls liegen sie in einer reellen Ebene und haben einen reellen Schnittpunkt.

Eine Korrelation führt Punkte in Ebenen über, Graden werden Graden. Die Punkte einer Graden g entsprechen dabei doppelverhältnistreu den Ebenen durch die Bildgrade h.

Die Graden und Ebenen durch einen festen Punkt heissen ein Bündel. Wie schon in § 1 hervorgehoben, sind die Graden und Ebenen eines Bündels die Punkte und Graden einer projektiven Ebene. Jede Korrelation führt die Punkte und Graden einer Ebene in die Ebenen und Graden eines ~~Büschels~~ Bündels über.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_4$ bestimmen die vier Grundpunkte $A_1, \dots, A_4$ des zugrundegelegten Koordinatensystems des R_3. Die $A_1, \dots, A_4$ sind in allgemeiner Lage und heissen auch die Ecken des „Koordinatentetraeders". Seine Seitenflächen sind die vier „Grundebenen" $x^1 = 0, \dots; x^4 = 0$; seine sechs Kanten sind deren Schnittgraden; z.B. wird A_1A_2 durch $x^3 = 0, x^4 = 0$ gegeben.

Wie in der Ebene haben die Verhältnisse der x^i die Bedeutung von Doppelverhältnissen. Sei nämlich (Fig. 40) E der Punkt $x^1 = x^2 = \dots = x^4 = 1$ („Einheitspunkt"),



(Fig. 40)

und sei E_{12} der Durchstosspunkt der Ebene A_3A_4E mit der Graden A_1A_2 sei $P\,(x^1 \dots x^4)$ ein beliebiger Punkt ausserhalb der Graden A_3A_4 und sei P_{12} der Durchstosspunkt der Ebene A_3A_4P mit A_1A_2. Dann ist, wie der Leser bestätige,

$$\frac{x^2}{x^1} = (A_1A_2E_{12}P_{12}).$$

Wir betrachten nun den affinen (bezw. euklidischen) Raum $\mathfrak{A}_3$. Seien in $\mathfrak{A}_3$ ξ^1, ξ^2, ξ^3 affine (z.B. kartesische) Koordinaten, dann ordnen wir jedem Punkt $P\,(\xi^i)$ aus $\mathfrak{A}_3$ den Punkt Q zu: $x^1 = \varrho\xi^1;\ x^2 = \varrho\xi^2;\ x^3 = \varrho\xi^3;\ x^4 = \varrho \neq 0$, ϱ beliebig. Man nennt dann $x^1 \dots x^4$ homogene affine (bezw. kartesische) Koordinaten in $\mathfrak{A}_3$. $\mathfrak{A}_3$ ist dadurch auf die Punkte des R_3 ausser der Ebene $\varepsilon^\infty: x^4 = 0$ abgebildet. Die Punkte dieser Ebene ε^∞ ordnen wir den von Null verschiedenen Vektoren aus $\mathfrak{A}_3$ zu: dem Vektor $\mathfrak{v}\,(v^1v^2v^3)$ entspreche der Punkt $x^1 = \varrho v^1$; $x^2 = \varrho v^2;\ x^3 = \varrho v^3;\ x^4 = 0$ ($\varrho \neq 0$ beliebig). Parallele Vektoren haben also denselben Bildpunkt.

Die Zuordnung $\mathfrak{A}_3 \Leftrightarrow R_3 - \varepsilon^\infty$ ist punkt- graden- und ebenentreu. Die Ebenen aus $\mathfrak{A}_3$ werden durch Gleichungen der Form

$$u_1\xi^1 + u_2\xi^2 + u_3\xi^3 + u_4 = 0 \quad (u_1, u_2, u_3 \neq 0, 0, 0)$$

gegeben. Sie entsprechen der Gesamtheit der Ebenen aus R_3:

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 = 0$$

ausser ε^∞ $(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$.

Den Graden aus $\mathfrak{A}_3$:

$$\text{(45a)} \qquad \xi^i = \xi^i_0 + tv^i \quad (v^1, v^2, v^3 \neq 0, 0, 0)$$

entsprechen Graden aus R_3:

$$\text{(45)} \qquad \begin{array}{ll} x^1 = \varrho x^1_0 + \sigma v^1 & x^3 = \varrho x^3_0 + \sigma v^3 \\ x^2 = \varrho x^2_0 + \sigma v^2 & x^4 = \varrho x^4_0 + (\sigma \cdot 0) \end{array}$$

Umgekehrt lässt sich jede Grade aus R_3, die nicht ganz in e_∞ liegt, in der Form (45) darstellen; $v^1, v^2, v^3, 0$ seien die Koordinaten ihres (einzigen) Schnittpunktes mit e_∞; $x_0^1 \dots x_0^4$ die eines anderen Punktes auf ihr; dann ist $x_0^4 \neq 0$, und der Graden entspricht die Grade (45a) aus $\mathfrak{A}_3$. Der Leser entwickele die entsprechende Korrespondenz für die Parameterdarstellung der Ebene. Somit folgt: <u>Parallele Graden und Ebenen entsprechen solchen Graden und Ebenen aus R_3, die sich auf e_∞ schneiden.</u>

Man nennt den R_3, wenn er in der angegebenen Weise auf den $\mathfrak{A}_3$ bezogen ist, „erweiterten affinen Raum". Die Ebene e_∞ und ihre Punkte und Graden heissen die „uneigentlichen" oder „unendlich fernen" Elemente dieses Raums.

Durch eine Kollineation $x \leftrightarrow y$ kann man erreichen, dass e_∞ eine beliebig vorgegebene lineare Bestimmungsgleichung erhalt. (y) heissen dann „projektive" oder „Tetraederkoordinaten"; die 4 Grundpunkte des Systems (y) liegen nämlich im allgemeinen sämtlich ausserhalb e_∞, bilden also ein Tetraeder im gewöhnlichen Sinne.

<u>Aufgabe:</u> Man zeige, dass auch im Raum die beryzentrischen Koordinaten, sowie die Abstände von den Seitenflächen eines Tetraeders projektive Koordinaten sind. Den affinen Transformationen in $\mathfrak{A}_3$ entsprechen ersichtlich alle und nur die Kollineationen aus R_3, die e_∞ festlassen.

Wie den R_3, kann man jeden R_n als erweiterten n-dimensionalen affinen Raum auffassen. Man bezeichne die linearen Raume, die in einer beliebigen Hyperebene R_{n-1} liegen, als unendlich fern, und nenne zwei lineare Räume gleicher Dimension parallel, wenn sie nicht ganz in R_{n-1} , liegen und wenn sie alle und nur ihre unendlich fernen Punkte gemein haben.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

§ 14. Hyperflächen zweiter Ordnung.

Hyperfläche 2.Ordnung (F_2) heisst die Menge aller Punkte des R_n, deren Koordinaten eine Gleichung folgender Form erfüllen:

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik} x^i x^k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{46}$$

Wir setzen im Folgenden stets alle a_{ik} reell voraus („reelle "F_2). Liegt P auf F_2, so auch $\overline{P}$ .F_2 braucht keine reellen Punkte zu besitzen.

(Reelle) Kollineationen führen (reelle) F_2 in (reelle) F_2 über.

Als Rang einer F_2 wird der Rang der Matrix (a_{ik}) bezeichnet, d.h. die Maximalanzahl linearer unabhängiger Zeilen in ihr. Ist der Rang kleiner als n+1, so heisst F_2 ausgeartet. Ausartung ist also äquivalent mit $|a_{ik}| = 0$.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\sum a_{ik} x^i y^k = (\xi, \eta) \tag{47}$$

Dann hat F_2 die Gleichung $(\xi, \xi) = 0$. Zwei Punkte ξ, η heissen „bezüglich F_2 konjugiert", wenn $(\xi, \eta) = 0$. Die Punkte von F_2 sind alle und nur die, die sich selbst konjugiert sind.

Für (ξ, η) gelten die Rechenregeln

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda(\xi, \eta) = (\lambda\xi, \eta) \\ (\xi + \xi', \eta) = (\xi, \eta) + (\xi', \eta) \\ (\xi, \eta) = (\eta, \xi) \end{array}\right. \tag{48}$$

Wir bringen F_2 zum Schnitt mit einem R_k des R_n. R_k sei von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k+1}$ aufgespannt, also hat die Darstellung $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \mathfrak{a}_i \lambda^i$. Die gemeinsamen Punkte von F_2 und R_k sind also nach (48)

$$(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = (\sum \mathfrak{a}_i \lambda^i, \sum \mathfrak{a}_i \lambda^i) = \sum_{i,k=1}^{k+1} (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)\, \lambda^i \lambda^k = 0$$

Nach § 13 II sind die λ^i projektive Koordinaten in R_k. Also ~~folgt~~: der Schnitt einer F_2 mit irgendeinem R_k ist eine F_2 in R_k. Insbesondere wird F_2 von jeder Graden in einem Punktepaar geschnitten.

R_k heisst Tangentialraum an F_2, wenn die Schnitt-F_2 ausartet.

Tangenten sind also alle Graden, die ganz in F_2 liegen, oder mit F_2 einen Doppelpunkt gemein haben.

Sind die Punkte $\mathfrak{x} = \sum \lambda^i \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{y} = \sum \mu^i \mathfrak{a}_i$ aus R_k konjugiert bezüglich F_2, so gilt noch (48)

$$(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = (\sum \lambda^i \mathfrak{a}_i, \sum \mu^i \mathfrak{a}_i) = \sum (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)\, \lambda^i \mu^k = 0$$

Die Punkte sind also dann und nur dann konjugiert, wenn sie es bezüglich der Schnitte F_2 in R_k sind. Für $k=1$ erhalten wir: Zwei verschiedene Punkte sind dann und nur dann bezüglich F_2 konjugiert, wenn sie es bezüglich des Punktepaares sind, das ihre Verbindungsgrade mit F_2 gemein hat.

Da diese Beziehung (vergl. § 6) durch Kollineation nicht zerstört wird, folgt: Konjugiertheit bleibt bei Kollineation

~~erhalten.~~ Dann und nur dann, wenn F_2 ausartet, besitzt das System (49)

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ik} x^i = 0 \qquad (k=1,\dots,n+1)$$

einen Lösungsraum S. Hat F_2 den Rang r, so hat S (der „Scheitel" von F_2) nach § 13 IV den Rang n+1-r, also die Dimension n-r.

Nach (47) besteht S aus allen und nur den Punkten, die zu allen Punkten konjugiert sind; insbesondere zu sich selbst; S liegt auf F_2. Bei Kollineationen müssen Scheitelpunkte in ebensolche übergehen; also ist insbesondere der Rang von F_2 invariant gegenüber Kollineationen.

In jedem Tangentialraum T_k heissen die Scheitelpunkte Σ_1, der ausgearteten Schnitt-F_2 „Berührungspunkte". Man erkennt: Ein Unterraum von T_k ist ~~dann und nur dann~~ selbst Tangentialraum, wenn er einen Punkt aus Σ enthält. Insbesondere ist jede Grade in T_k durch einen Punkt von Σ_1 Tangente. Liegt irgendein Punkt P nicht auf S (was bei nicht ausgearteten F für jeden Punkt stimmt), so erfüllen die zu P konjugierten Punkte eine Hyperebene p (P), die „Polarhyperebene" von P. Die Polarhyperebene eines reellen Punktes ist stets reell. Liegt P nicht auf F_2, so ist P nicht zu sich konjugiert, also liegt P nicht auf p(P). Sei Φ_2 die Schnitt-F_2 von p und F_2. Dann gilt: Eine Grade g durch P ist dann und nur dann Tangente, wenn g durch einen Punkt von Φ_2 geht. Geht nämlich g durch $Q \subset \Phi_2$, so ist Q~Q („Q konjugiert Q") wegen $\Phi_2 \subset F_2$, und Q~P wegen $\Phi_2 \subset p(P)$. Also ist nach § 6 Q Doppelpunkt auf g; g ist Tangente an F_2 in Q. Ist umgekehrt g Tangente durch P an F_2 in Q, so ist Q mit allen Punkten von g konjugiert; insbesondere $Q \sim Q$, also $Q \subset F_2$, und $Q \sim P$, also $Q \subset p(P)$; Q gehört in der Tat zum Schnitt von p mit F_2.

Man kann hieraus leicht folgern, dass die Tangenten durch P eine Fläche 2. Ordnung T erfüllen, die ausgeartet ist und P im Scheitel enthält. Es genügt nämlich, dass für ein spezielles Koordinatensystem zu beweisen.. Wir machen nun p zur Hyperebene $x^1 = o$ und P zum Punkt A_1. Dann erhält Φ_2 eine Gleichung der Form

$$(50) \qquad \sum_{i,k=2}^{n+1} b_{ik}\, x^i x^k = 0$$

denn $x^2, \ldots, x^{n+1}$ sind Koordinaten in $x^1 = o$.

(50) ist aber auch die Gleichung von T, wenn man (50) als Gleichung in $x^1, \ldots, x^{n+1}$ mit $b_{11} = b_{12} = o$ auffasst. Denn zu T gehören alle und nur die Punkte, die von P ~~gleich~~ = A_1 aus auf $x^1 = o$ in Φ_2 projiziert werden, deren zweite bis letzte Koordinate also (50) erfüllen. Der Punkt P, der jetzt $x^2 = \ldots = x^{n+1} = 0$ erhält, genügt offenbar dem bezüglich (50) gebildeten System (49), ist also Scheitelpunkt von T.

Allgemein gilt über ausgeartete F_2: Liegt P auf F_2, so liegt auch der ganze Verbindungsraum P + S auf F_2.–

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu allen Punkten eines R_k konjugiert sind, bilden wieder einen linearen Raum R_ℓ.

Dies folgt aus § 13 IV. R_ℓ heisst zu R_k „Polar".

Ist F_2 nicht ausgeartet, so ist die Abbildung $P \to p(P)$ eine Korrelation; denn diese Abbildung wird durch

$$\sum a_{ik} x^i y^k = 0$$

gegeben und n.V. ist $|a_{ik}| \neq 0$. Jetzt wird auch jeder Hyperebene p genau ein Punkt P zugeordnet, dessen Polarhyperebene p ist; P heisst der Pol von p. (Bei ausgeartetem F_2 lässt sich der Pol nicht eindeutig definieren).

Die Punkte von F_2 werden bei dieser Abbildung ihren Tangentialhyperebenen zugewiesen und umgekehrt; wir haben den wichtigen Satz: Die Tangentialebenen jeder nichtausgearteten F_2 gehen bei jeder Korrelation in Punkte einer nichtausgearteten F_2' über.

Wir wollen noch die Gleichung dieser F_2' für die Korrelartion K_0 bestimmen. $\mathfrak{u}\mathfrak{y} = 0 \Longleftrightarrow \mathfrak{u}$. Man nennt die Koordinaten von $\mathfrak{u}$ „Hyperebenenkoordinaten" im R_n; wir haben also die „Gleichung der Tangentialhyperebenen" einer $F_2 (\sum a_{ik} x^i x^k = 0)$ in Hyperebenenkoordinaten zu suchen. Sei $\mathfrak{y}$ der Pol irgendeiner Hyperebene $\mathfrak{u}\mathfrak{y} = 0$. Dann gilt

$$\sum a_{ik} x^i y^k = 0,$$

also

$$(51) \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} y^k = \lambda u_i \qquad (i=1, \dots, n+1)$$

Die Hyperebene ist dann und nur dann tangential, wenn $\mathfrak{y}$ auf ihr liegt, wenn also die (durch (51) wegen $|a_{ik}| \neq 0$ eindeutig bestimmten) y^i ausserdem

$$(52) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} u_k y^k = 0$$

erfüllen. Verträglichkeit von (51), (52) ist aber äquivalent mit

$$(53) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} & u_{n+1} \\ u_1 & \cdots & u_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Das ist die gesuchte Gleichung.

Wir ~~haben~~ führen jetzt die Gleichung einer gegebenen F_2 durch Kollineation, d.h. durch Uebergang zu einem möglichst geeigneten Koordinatensystem, auf eine Normalform zu bringen und damit zugleich eine Uebersicht über alle projektiv verschiedenen F_2-Typen zu erhalten.

Hilfssatz 1: $a_{ik} = 0$ ist äquivalent mit $A_i \sim A_k$.

Beweis: $a_{ik} = (\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_k)$.

Hilfssatz 2: Wenn F_2 den ganzen Raum erfüllt, müssen alle a_{ik} verschwinden.

Beweis: Jede beliebige Grade liegt n.V. ganz in F_2, also ist auf ihr jeder Punkt jedem konjugiert. Also ist jeder Raumpunkt jedem konjugiert, also ist der ganze R_n Scheitel, also hat (a_{ik}) den Rang 0, d.h. alle a_{ik} verschwinden.

Jetzt können wir $(\varphi_0, \varphi_0) = 0$ auf eine Form bringen, wo alle gemischten Glieder $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

Induktionsbeweis nach Dimensionszahl:

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

für $n = 0$ gibt es kein a_{ik} mit $i \neq k$, es ist nichts zu beweisen. Die Behauptung sei nun im R_{n-1} bewiesen. Wir unterscheiden im R_n zwei Fälle:

1) Alle a_{ik} sind Null; nichts mehr zu beweisen.

2) nicht alle a_{ik} sind Null. Denn gibt es nach Hilfssatz 2 einen Punkt B_1, der nicht auf F_2 liegt. $p\ (B_1)$ geht nicht durch B_1 und schneide F_2 in Φ_2. Nach Induktionsvoraussetzung können wir in $p\ (B_1)$ ein Koordinatensystem mit den Grundpunkten $B_2, \dots, B_{n+1}$ finden, in dem Φ eine Gleichung ohne gemischte Glieder hat. Nach Hilfssatz 1 ist das gleichbedeutend mit $B_i \sim B_k$ $(i \geq 2,\ k \geq 2\ ,\ i \neq k)$. Da B_2 bis B_{n+1} in $p\ (B_1)$ liegen, ist auch $B_1 \sim B_i$ $(\ i \geq 2)$. Also gilt allgemein $B_i \sim B_k (i \neq k)$. Da B_2 bis B_{n+1} die Hyperebene p aufspannen, die B_1 nicht enthält, so haben $B_1\ , \dots ,\ B_{n+1}$ allgemeine Lage im R_n. Durch eine Kollineation kann man diese Punkte also zu Grundpunkten eines Koordinatensystems machen, das die verlangte Eigenschaft hat.-

Somit kann man (φ, φ) auf die Form bringen $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}(x^i)^2$

Auch von den a_{ii} können einige verschwinden. (~~Denn den Fall~~ trivialen Fall, dass alle verschwinden, lassen wir beiseite). Wir denken die Variabeln passend nummeriert, so dass wir (φ, φ) die Form geben:

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}(x^i)^2 \qquad (1 \leq r \leq n+1)$$

wobei wir jetzt $a_{ii} \neq 0$ $1 \leq i \leq r$ annehmen dürfen. Wir machen noch die Kollineation

$$x^i = \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}\, y^i \qquad (1 \leq i \leq r)$$

$$x^i = y^i \qquad (r < i \leq n+1) \qquad (\text{Determinante} \neq 0)$$

und haben erhalten

$$(\varphi,\varphi) = \sum_1^r \pm (y^i)^2$$

Da die Fläche ebenso durch $(\varphi,\varphi) = 0$ wie durch $-(\varphi,\varphi) = 0$ gegeben wird, können wir die Anzahl der positiven Glieder in der Summe als die nicht kleinere voraussetzen, erhalten also durch eventuelle Umnummerierung der Variabeln:

$$(60) \qquad (\varphi,\varphi) = +\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 - \sum_{i=s+1}^{r}(x^i)^2 \qquad (0 < s \leq r \leq 2s) \; (\leq n+1)$$

Die $\sum\limits_{s+1}^{r}$ hat im Falle $r = s$ weggelassen zu werden.-

Der Scheitel hat jetzt die Gleichungen

$$(S) \qquad \begin{aligned} x^1 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ x^r &= 0 \end{aligned}$$

<u>Der Rang von F_2 ist also r.</u>

Da der Rang projektiv invariant ist, folgt;

Von der Art der Reduktion unabhängig ist die Anzahl der in der Normalform auftretenden Quadrate; sie ist gleich dem Rang von F_2.

Durch eine <u>komplexe</u> Kollineation kann man die negativen Quadrate $\left(\sum\limits_{s+1}^{r} \text{ in } (60)\right)$ auch in positive verwandeln.

Damit haben wir erkannt: <u>Alle und nur die F_2 gleichen Ranges sind durch komplexe Kollineationen ineinander überführbar.</u>

Seien nämlich F, G zwei Hyperflächen 2.Ordnung vom selben Rang r. Dann gibt es , wie bewiesen, zwei Kollineationen A bezw. B, die die Gleichung von F bezw. G auf die Form

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

$$\sum_{i=1}^{r} (x^i)^2 = 0$$

bringen. Führe ich erst A, dann die zu B inverse Kollineation aus, so geht F offenbar in G über.

Der Scheitel S wird jetzt (für $r \leq n$) von η_{r+1} bis η_{n+1} aufgespannt; ist P ein beliebiger Punkt, und Q ein beliebiger Punkt des Verbindungsraumes P + S, so kann die erste bis r -te Koordinate von P sich von den entsprechenden von Q nur um einen Faktor unterscheiden.

Da nun die Normalform (60) nur $x^1, \dots, x^r$ enthält, haben wir den Beweis der früher aufgestellten Behauptung: Liegt P auf F_2, so auch der ganze Verbindungsraum P + S.

Wir fragen nun, wann zwei F_2 durch eine reelle Kollineation ineinander überführbar sind.
Wir behaupten: Das ist dann und nur dann der Fall, wenn für beide Flächen in der Normalform (60) nicht nur r sondern auch s denselben Wert hat.

Die Normalform (60) ist offenbar durch reelle Kollineation erreichbar(reelle Punkte haben reelle Polarhyperebenen). Damit ist gezeigt, dass die Uebereinstimmung von r,s hinreicht. Ihre Notwendigkeit folgt aus dem jetzt zu beweisenden Satz:

Es gibt einen reellen R_{s-1}, der mit $(\varphi,\varphi) = 0$ keinen reellen Schnittpunkt hat, dagegen keinen solchen reellen R_s.

Für $s = n+1$, $s-1 = n$ ist $(\varphi,\varphi) = \sum_{1}^{n+1} (x^i)^2$. R_n besitzt also in der Tat keinen reellen Punkt von $(\varphi,\varphi) = 0$, und ei-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

nen R_{n+1} gibt es im R_n nicht. Sei nun $s \leq n$. Dann bestimmen nach § 13 IV die Gleichungen $x^{s+1} = \dots = x^{n+1} = 0$ einen reellen R_{s-1}. Jeder Punkt von $(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = 0$ in diesem R_{s-1} erfüllt die Gleichung $\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 = 0$; also gibt es keinen reellen. Sei nun irgend ein reeller R_s gegeben. Dann betrachten wir den reellen R'_t, der durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$
\begin{aligned}
x^1 - x^{s+1} &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \\
x^{r-s} - x^r &= 0 \\
x^{r-s+1} &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \\
x^s &= 0
\end{aligned}
$$

Im Fall $r = s$ soll stattdessen das Gleichungssystem lauten:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= 0 \\
\dots\dots\dots & \\
x^s &= 0
\end{aligned}
$$

Im Fall $r = 2s$ soll es lauten:

$$
\begin{aligned}
x^1 - x^{s+1} &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots & \\
x^s - x^r &= 0.
\end{aligned}
$$

Jedenfalls liegt R'_t ganz in $(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = 0$, und da die s Bestimmungsgleichungen linear unabhängig sind, hat R'_t die Dimension $t = n - s$. Es gibt einen reellen Punkt P, der R'_t und R_s gemein ist. Seien nämlich $\mathfrak{x}_1$ bis $\mathfrak{x}_{n-s+1}$ unabhängige Vektoren, die R'_t aufspannen, seien $\mathfrak{y}_1$ bis $\mathfrak{y}_{s+1}$ entsprechende Vektoren für R_s. Das sind im ganzen $n + 2$ Vektoren im R_n. Also gibt es eine Relation

$$(61) \qquad \sum_{i=1}^{n-s+1} \lambda_i \mathfrak{x}^i + \sum_{i=1}^{s+1} \mu_i \mathfrak{y}^i = 0$$

Wegen der Unabhängigkeit der $\mathfrak{x}_i$ ist

$$\mathfrak{x} = \sum^{n-s+1} \lambda_i \mathfrak{x}^i$$

ein von Null verschiedener Vektor aus $R'_{t\lambda}$. Nach (61) ist aber auch $\mathfrak{z} = -\sum_{1}^{s+1} \mu^{i} \mathfrak{y}_{i}$. Also liegt $\mathfrak{z}$ auch in R_s. Da R_s und und $R'_{t\lambda}$ reell sind, liegt auch $\bar{\mathfrak{z}}$ in R_s, $R'_{t\lambda}$; <u>also auch der reelle Punkt P, der von dem (von Null verschiedenen!) Vektor Vektor $\mathfrak{z}+\bar{\mathfrak{z}}$ bestimmt wird.</u>

Da $R'_{t\lambda}$ ganz in $(\mathfrak{z},\mathfrak{z}) = 0$ liegt, haben wir in der Tat bewiesen, dass R_s einen reellen Punkt P mit $(\mathfrak{z},\mathfrak{z}) = 0$ gemein hat.

§ 15.

Die Flächen 2. Ordnung im R_3.

I.

Wir diskutieren die möglichen Typen nach steigendem Rang und steigendem s (§ 14 Ende) geordnet.

<u>r = o:</u> Der ganze R_3. s = o besagt in der Tat: Jedes reelle R_o hat einen reellen Punkt mit F gemein.

<u>r = 1:</u> $(x^1)^2 = o$. Das ist eine reelle Ebene; sie ist mit dem Scheitel identisch. s=1; es gibt einen R_o ausserhalb der Ebene, jede reelle Grade R_1 scheidet reell.

<u>r = 2:</u> a) $s = 1 : (x^1)^2 - (x^2)^2 = o = (x^1 + x^2)(x^1 - x^2)$

b) $s = 2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = o = (x^1 + i x^2)(x^1 - i x^2)$

F besteht also aus zwei Ebenen, die in a) reell, in b) konjugiert imaginär sind. Ihre reelle Schnittgrade ist der Scheitel. Bedeutung von s=1 wie oben, im Fall b), s=2, hat keine reelle Grade ($R_{s-1} = R_1$) die die Scheitelgrade nicht trifft, einen reellen Punkt mit F gemein. Dagegen jede reelle Ebene ($R_s = R_2$); nämlich ihren Schnittpunkt mit der Scheitelgraden.

<u>r = 3</u> a) $s=2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = o$

b) $s=3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = o$

Man nennt F dann einen „Kegel 2.Ordnung". Der Scheitel ist der Punkt $A_4: x^1 = x^2 = x^3 = o, x^4 \neq o$. Die Ebene $x^4 = o$ schneidet F in dem nicht ausgearteten Kegelschnitt $\Phi : (x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 = 0$ (x^1, x^2, x^3 sind projektive Koordinaten in $x^4 = o$!) F besteht ersichtlich aus den Punkten aller „ Projektionsstrahlen " von A_4 nach Φ. Also gilt allgemein: Ein Kegel 2.Ordnung besteht aus den Verbindungsgraden aller Punkte eines nicht-ausgearteten Kegelschnittes Φ mit einem Punkt ausserhalb der Ebene von Φ. (Daher der Name Kegelschnitt).

Besitzt Φ einen reellen Punkt, so heisst der Kegel „ reell " (Fall a). Er besitzt also eine reelle Grade, wird daher von jeder Ebene reell geschnitten. Wegen $s=2$ muss es dagegen Graden geben, die den Kegel nicht reell schneiden. z.B. $x^3=x^4=0$. Im Fall b) heisst der Kegel „ imaginär ". Die Spitze ist sein einziger reeller Punkt, und im Einklang mit $s=3$ gibt es reelle Ebenen, die ihn nicht reell schneiden; nämlich jede Ebene, die nicht durch die Spitze geht.

r = 4. Die nicht ausgearteten Flächen 2.Ordnung.

Wir betrachten sie zunächst ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse. Dann dürfen wir von der Normalform ausgehen:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0,$$

die vermittels der Kollineation

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 + x^3 \\ y^2 &= x^1 - x^3 \\ y^3 &= x^2 + x^4 \\ y^4 &= x^3 - x^4 \end{aligned} \qquad \text{(Determinante } + 4 \neq 0 \text{ !)}$$

übergeht in

$$(65) \quad y^1 y^2 + y^3 y^4 = 0$$

Sei $(\overset{*}{y}{}^i)$ irgendein Punkt der Fläche. Dann können wir wegen (65) λ, μ so wählen, dass

$$\begin{aligned} (66) \qquad \lambda y^1 + \mu y^3 &= 0 \\ \lambda y^4 - \mu y^2 &= 0 \end{aligned}$$

und ρ, σ so dass

$$\begin{aligned} \rho y^1 + \sigma y^4 &= 0 \\ (67) \qquad \rho y^3 - \sigma y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Umgekehrt: Wir betrachten das System (66) bei veränderlichem λ, μ ohne zunächst (65) vorauszusetzen. Die erste Gleichung stellt das Ebenenbüschel λ S_{24} durch $A_2 A_4$ dar, die zweite das Büschel S_{13} durch $A_1 A_3$. Die Büschel sind durch das gemeinsame Auftreten von λ, μ projektiv aufeinander bezogen, und für festes λ, μ durchläuft (y^i) die Schnittgrade der beiden einander entsprechenden Ebenen aus S_{13}, S_{24}, die zu diesen (λ, μ) gehören.

Durch Elimination von λ, μ aus (66) ergibt sich aber, dass (y^i) (65) erfüllt. Damit ist bewiesen: F ist der geometrische Ort der Schnittgeraden entsprechender Ebenen des Büschels S_{13}, S_{24}. Durch jeden Punkt von F geht eine und nur eine solche Grade.

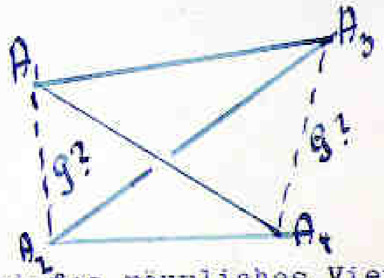
Als Doppelverhältnis vierer solcher Graden bezeichnet man das Doppelverhältnis der zugehörigen Ebenen. Schneidet man F mit einer beliebigen Ebene e, so wird die Schnittkurve Φ projektiv erzeugt durch die Gradenbüschel in e, die l aus dem Ebenenbüschel S_{13}, S_{24} ausschneidet. Das Doppelverhältnis ihrer vier Durchstosspunkte mit e auf Φ, wie
vierer Graden der Schar ist also gleich dem

auch e gewählt sein mag.

Dieselbe Betrachtung lässt sich nun auf das System (67) anwenden. Hierdurch erhalten wir eine zweite Gradenschar, die ebenfalls F überdeckt, sodass eine und nur eine Grade durch jeden Punkt von F geht. Keine Grade der Schar (66) fällt mit einer aus (67) zusammen, jede Grade der einen Schar trifft jede andere und zwei Graden derselben Schar treffen sich nicht.

Sind nämlich g_1, g_2 eine Grade der Schar (66) bezw. (67), so muss g_1 die Träger der Büschel S_{13}, S_{24} also A_1A_3 und A_2A_4 treffen. g_2 trifft aus demselben Grund A_1A_4 und A_2A_3. Käme es vor, dass g_1, g_2 in eine Grade g zusammenfielen, so müsste g alle vier Träger treffen (Fig.35), also müsste g, weil

(Fig.35)



$A_1A_2A_3A_4$ ein windschiefes räumliches Viereck ist, entweder A_1A_2 oder A_3A_4 sein. g müsste ganz in F liegen und hätte entweder die Gleichungen $y^3 = y^4 = 0$ oder $y^1 = y^2 = 0$. Durch Einsetzen dieser Gleichungen in 65 folgt die Unmöglichkeit der Annahme.

Seien g_1, g_2 zwei Graden aus (66),(67), die durch (λ, μ) bezw. (ϱ, σ) gekennzeichnet sind, so schneiden sich die Graden in folgendem Punkt, der (66),(67) also auch (65) erfüllt:

$$
\begin{aligned}
(68)\qquad \mathfrak{y}^1 &= -\mu\sigma \\
\mathfrak{y}^2 &= \lambda\rho \\
\mathfrak{y}^3 &= \lambda\sigma \\
\mathfrak{y}^4 &= \mu\rho
\end{aligned}
$$

(68) ist die Parameterdarstellung von F, bezogen auf die Büschelparameter von (66) (67). Umgekehrt bestimmt jeder Punkt von F die Verhältnisse $\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\mathfrak{y}^1}{\mathfrak{y}^3}$ und $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{y}^3}$ eindeutig, d.h. durch jeden Punkt geht genau eine Grade jeder Schar.

Das Koordinatentetra~~nder~~eder $A_1A_2A_3A_4$ liegt zu F so, dass die Graden A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 ganz zu F gehören.

Wir behaupten weiter:

Sind g_1, g_2, g_3 drei paarweise Windschiefe, sonst ganz beliebige Graden, so ist der geometrische Ort aller Graden h, die g_1, g_2, g_3 treffen, eine nicht ausgeartete Fläche 2.Ordnung F; h durchläuft dabei eine Gradenschar von F g_1, g_2, g_3 gehören zur andern.

Zum Beweise ordnen wir die Ebenenbüschel (g_1), (g_2) einander so zu, dass sich immer die Ebenen entsprechen, die durch denselben Punkt von g_3 gehen. Die Zuordnung ist projektiv, denn beide Büschel sind projektiv auf die Punktreihe g_3 bezogen, und h ist die Schnittgrade entsprechender Ebenen. Wir wählen willkürlich zwei Lagen h_1, h_2 ~~und~~ von h aus, die g_1 in A_1, A_3 und g_2 in A_4, A_2 schneiden mögen. Dann sind A_1,---,A_4 Punkte allgemeiner Lage, können also zu Grundpunkten eines Koordinatensystems gemacht werden.

Ersichtlich entsprechen sich die Ebenen

$$\begin{array}{llcll} & (g_1) & & (g_2) & \\ (x^2 = 0) & A_1\ A_3\ A_4 & \longleftrightarrow & A_1\ A_2\ A_4 & (x^3 = 0) \\ (x^4 = 0) & A_1\ A_2\ A_3 & \longleftrightarrow & A_2\ A_3\ A_4 & (x^1 = 0) \end{array}$$

Die Korrespondenz zwischen (g_1) (g_2) (vergl. S. 38, 39)

$$\lambda x^2 + \mu x^4 = 0 \longleftrightarrow \alpha x^1 + \beta x^3 = 0$$

$$\alpha = a\lambda + b\mu \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$
$$\beta = c\lambda + d\mu$$

muss also $\lambda = 0 \longleftrightarrow \beta = 0$; $d = 0$, $c \neq 0$

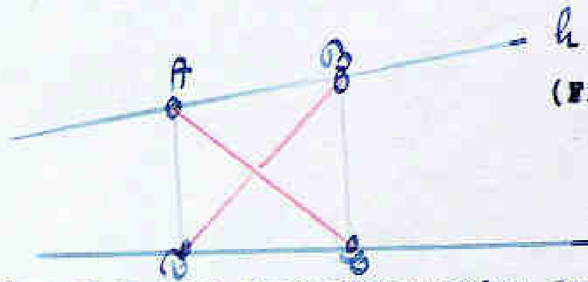
und $\mu = 0 \longleftrightarrow \alpha = 0$; $a = 0$, $b \neq 0$

liefern. Die Koordinaten (x^i) von h berechnen sich daher aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x^2 + \mu x^4 &= 0 \\ (69) \qquad c\lambda x^3 + b\mu x^1 &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt $b x^1 x^2 - c x^3 x^4 = 0$. Diese Gleichung ist aber mit (65) äquivalent, d.h. h überstreicht in der Tat eine nicht-ausgeartete F_2. Gleichzeitig ist bewiesen: die Fläche lässt sich projektiv durch Ebenenbüschel erzeugen, die zwei beliebige Graden derselben Schar zu Trägern haben. Man spricht von dem „Erzeugenden" der Fläche, die zwei Regelscharen bilden. Ist P ein beliebiger Punkt von F und sind g_1, g_2 die Graden der Fläche durch P, so ist die Ebene $e = (g_1, g_2)$ die Tangentialebene in P. Denn e schneidet F in einem Gradenpaar mit P als Scheitel. Aus der projektiven Erzeugung folgt ferner leicht: Ist g eine Grade von F, so ist jede Ebene durch g Tangentialebene, jeder Punkt von g ist Berührungspunkt einer solchen Ebene und die Berührungspunktreihe g ist auf das Tangential-Ebenenbüschel (g) projektiv bezogen, wenn man jedem Punkt seine Tangentialebene zuweist (das lässt sich auch aus dem Dualitätsprinzip beweisen).

Sei h irgendeine Grade, die F in zwei verschiedenen Punkten A,B schneidet (Fig.36),



(Fig.36)

so treffen sich die vier Erzeugenden durch AB in zwei Punkten CD von F. Die Grade CD=l ist zu h polar. Es ist nämlich $A \sim C$ weil AC ganz in F liegt. Ebenso $A \sim D$. Also $A \sim \lambda C + \mu D$, d.h. zu allen Punkten von l. Ebenso sind alle Punkte von l auch zu B konjugiert, also zu $\lambda A + \mu B$, d.h. zu allen Punkten von h, d.h. h, l sind polar. Die Konstruktion ist eindeutig, d.h. es gibt keine andere Polare zu h, als l. In der Tat: sowohl p(A) als auch p(B) müssen l enthalten. Da F nichtausgeartet ist, haben verschiedene Punkte verschiedene Polarebenen, d.h. $p(A) \neq p(B)$, und l ist als Schnitt jener beiden Ebenen eindeutig festgelegt.

Wir betrachten jetzt die Realitätsverhältnisse der nichtausgearteten Flächen 2.Ordnung.

a) s=2 $\quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0.$

Das ist grade die bisher zugrunde gelegte Normalform. Alle Konstruktionen des Vorigen sind jetzt reell ausführbar. Durch jeden reellen Punkt von F gehen zwei reelle Erzeugenden; durch sie geht die Tangentialebene des Punkts. Man nennt F dann „Regelfläche" 2. Ordnung. (Jede Fläche mit einer Schar reeller Graden heisst Regelfläche). Da F reelle Graden enthält, wird F von jeder reellen Ebene reell getroffen. Hat eine Grade zwei reelle Punkte mit F gemein, so auch ihre Polare; also muss auch umgekehrt gelten: sind die Schnittpunkte einer Graden mit F konjugiert imaginär, so auch die der Polaren.

b) s=3 : $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0.$

Deuten wir die Koordinaten als homogene kartesische so dass $x^4 = 0$ die unendlich ferne Ebene darstellt, dann erhalten wir die Gleichung der Einheitskugel. r = 4, s = 3 sind also alle und nur die Flächen, die durch reelle Kollineation aus einer Kugel entstehen können. Wegen s = 3 gibt es eine Ebene (z.B. $x^4 = 0$) die F nicht reell trifft. F besitzt also keine reelle Erzeugende. Die beiden Erzeugenden durch einen reellen Punkt P von F sind konjugiert imaginär. Denn ist g die eine, so liegt auch $\bar{g}$ in F und geht durch P. Wegen $g \neq \bar{g}$ ist $\bar{g}$ die andere Erzeugende durch P. Die Erzeugenden der einen Schar sind also die konjugiert-imaginären der andern. Aus Fig. 36 kann man jetzt schliessen: Trifft von zwei Polaren die eine F in verschiedenen Punkten (also auch die andere), so sind von den beiden Schnittpunktepaaren stets das eine reell, das andere konjugiert komplex. In der Tat: Wären A,B,C,D reell, so besässe F eine reelle Erzeugende A C. Sind nun A,B konjugiert komplex; $B=\bar{A}$ und sind g,h die Erzeugenden durch A, so sind $\bar{g},\bar{h}$ ebenfalls Erzeugende und gehen durch $\bar{A}=B$. $g,\bar{g}$ gehören aber zu verschiedenen Scharen, schneiden sich also in einem, notwendig reellen, Punkt. Ebenso $h,\bar{h}$. Diese reellen Punkte sind grade C,D.

Als „ausseren " oder „ inneren " Punkt von F bezeichnet man einen nicht auf F liegenden reellen Punkt, jenachdem durch ihn reelle Tangenten an F existieren oder nicht. Das ist äquivalent damit, ob seine Polarebene F reell ~~heisst~~ trifft oder nicht.

c) s=4 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0.$

F besitzt keinen reellen Punkt. Ist g eine Erzeugende von F, so betrachten wir $\bar{g}$. Das ist auch eine Erzeugende. Da F keinen reellen Punkt hat, dürfen sich $g,\bar{g}$ nicht schneiden, müssen also zur selben Schar gehören. Im Gegensatz zu b) sind die Erzeugenden komplexe~~n~~ Graden ohne reellen Punkt („ komplexe Graden zweiter Art").

II.

Wir dualisieren das Vorige, bei den nichtausgearteten Flächen beginnend. Links stehen frühere Sätze, rechts die daraus folgenden Dualen. F bedeutet irgendeine nichtausgeartete Fl. 2. Ordnung.

1. Jede Ebene e schneidet F in einem Kegelschnitt k. Falls e nicht F berührt, ist k nicht ausgeartet.	1. Die Tangentialebenen an F durch jeden Punkt E ~~über~~umhüllen einen Kegel 2. Ordnung k, falls E nicht auf F liegt.
2. Jede Grade g, die F nicht berührt, trifft F in zwei Punkten P, Q. Zwei Punkte R, S auf g sind bezüglich F genau dann konjugiert, wenn sie es bezüglich P, Q sind. R liegt dann auf der Polarebene von S.	2. Durch jede Grade g, die F nicht berührt, gehen 2 Tangentialebenen p, q. Zwei Ebenen r, s durch g sind (~~nun~~ nach Definition !) bezüglich F konjugiert, wenn sie es bezüglich p, q im Büschel (g) sind. r geht dann durch den Pol von s.
3. Trifft g F in verschiedenen Punkten P, Q, so schneiden sich die Tangentialebenen in P, Q an F auf der Polaren h von g und die Tangentialebenen durch g treffen F in den Durchstosspunkten von h.	3. Selbstdual.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

4. Wenn eine Ebene e F berührt, hat sie mit F ein Gradenpaar gemein. Jede Ebene durch eine Grade des ~~Polars~~ Paares ist Tangentialebene.	4. Wenn eine Punkt E auf F liegt, bilden die Tangentialebenen durch E ein Büschelpaar; die beiden Trägergraden sind die beiden Erzeugenden von F durch E.
5. Eine Grade, die an drei windschiefen Graden entlanggleitet, erzeugt eine nichtausgeartete Fläche 2.Ordnung.	5. Selbstdual !
6. Die Schnittgraden entsprechender Ebenen in projektiven Ebenenbüscheln mit windschiefen Trägern erzeugen eine nichtausgeartete Fläche 2.Ordnung.	6.(Wichtig !) Die Verbindungsgraden entsprechender Punkte projektiver windschiefer Punktreihen erzeugt eine nichtausgeartete Fläche 2.Ordnung.

Wir nennen „ Ebenenbündel 2.Ordnung " alle Ebenen, die durch Korrelation aus einer F_2 hervorgehen. Ihre Ebenenkoordinaten $u_1, \dots, u_4$ (Vektor $\check{u}$) erfüllen also eine Gleichung der Form, $(\check{u}, \check{u}) = 0$. Sie spielen in der Fokaltheorie eine wichtige Rolle.

Die „ nichtausgearteten " Ebenenbündel kennen wir schon als die Tangentialebenen der nichtausgearteten Flächen. Wir diskutieren die ausgearteten nach folgendem Rang durch Dualisierung der entsprechenden Flächen. Es ist zu beachten, dass die ausgearteten Ebenenbündel keineswegs Tangentialebenen ausgearteter Flächen sind.

Den Kegeln entsprechen alle Ebenen, die durch die Tangenten eines reellen nicht ausgearteten Kegelschnitts k in einer reellen Ebene e gehen. Je nachdem k nullteilig ist oder reelle Punkte hat, haben wir das Gegenstück zu den reellen oder den nullteiligen Kegeln. e ist der Scheitel des Bündels und ist zu allen Ebenen des Raumes konjugiert bezüglich des Bündels.

Den Ebenenpaaren entsprechen Paare von Bündeln „erster Ordnung", (d.h. Bündel im früher definierten Sinn) deren Zentren P, Q reelle oder konjugiert imaginäre Punkte sind. Der Scheitel besteht aus allen Ebenen durch die (notwendig reelle) Grade P Q.

Den Doppelebenen entsprechen alle Bündel erster Ordnung mit reellen Zentrum. Sie sind sämtlich Scheitelebenen.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

§ 16.

Die Flächen 2. Ordnung im $\mathfrak{A}_3$.

I. Die Typen.

Die bisherige Theorie muss durch die Konsequenzen vervollständigt werden, die aus der Lage von F relativ zur unendlich fernen Ebene e_∞ entspringen.

In den Fällen r = o, 1,2 bleibe die Diskusion dem Leser überlassen. Im Fall der Kegel (r = 3) haben wir zu unterscheiden, ob e_∞ durch den Scheitel S geht oder nicht. Im ersten Fall ($S = S_\infty$) heisst der Kegel ein Zylinder. Wir haben reelle und nullteilige Zylinder zu unterscheiden. Der reelle Zylinder kann mit e_∞ ein reelles Gradenpaar oder eine reelle Grade oder ein konjugiert komplexes Gradenpaar gemein haben; hyperbolische, parabolische, elliptische Zylinder. Sei im ersten Fall e eine beliebige Ebene, die nicht durch S_∞ geht, g_∞ ihr Schnitt mit e_∞. Dann hat g_∞ mit den beiden reellen unendlich fernen Graden des Zylinders zwei reelle Punkte P,Q gemein. Diese liegen auf dem (notwendig nichtausgearteten) Kegelschnitt k, den e mit dem Zylinder gemein hat; also besitzt k zwei reelle unendlich ferne Punkte; k ist eine Hyperbel. Alle Ebenen-Schnitte des hyperbolischen Zylinders sind Hyperbeln, ausser wenn die schneidende Ebene durch S_∞ geht. Entsprechend sind „fast alle ebenen Schnitte des ~~herebolischen~~ parabolischen, bezw. elliptischen Zylinders Parabeln bezw. Ellipsen; man erhält die hyp., par., ell. Zylinder, indem man eine Grade längs einer Hyperbel, Parabel, Ellipse parallel verschiebt (nur darf die Grade nicht in die Ebene des Kegelschnitts fallen).

Der nullteilige Zylinder liefert keine Fallunterscheidung. Ebensowenig der nullteilige Kegel.

Der reelle Kegel K wird von jeder reellen Ebene, die nicht durch die Spitze S geht, in einem nicht-ausgearteten Kegelschnitt getroffen, der reelle Punkte hat; das gilt also insbesondere vom Schnitt k_∞ des Kegels mit e_∞. Sei nun e eine beliebige nicht durch S gehende reelle Ebene und g_∞ deren uneigentliche Grade, k ihr Schnitt mit K. Dann ist k eine Hyperbel, Parabel, Ellipse, jenachdem die Schnittpunkte P_∞, Q_∞ von g_∞ mit k_∞ reell und verschieden, oder reell zusammenfallend, oder konjugiert komplex sind. Wir legen durch S die Parallelebene f zu e . Dann geht auch f durch g_∞ und S P_∞ und S Q_∞ sind Erzeugende von K. Welchen affinen Typus k hat, hängt also allein davon ab, ob die beiden Erzeugenden p, q, in denen f den Kegel schneidet, reell verschieden sind, zusammenfallen (f berührt K !), oder imaginär sind. p, q sind den Asymptoten von k parallel.

Parallele Ebenen schneiden K in Kegelschnitten mit parallelen Asymptoten (Zeichnen !). Alle und nur die reellen Ebenen, die einer Tangentialebene / von K parallel sind

schneiden K in Parabeln.
Der nullteilige Kegel liefert keine affinen Fallunterscheidungen.

(Der Leser stelle die Ungenauigkeit richtig, die in diesem Ausdruck liegt !)

Wir leiten nun affine Normalformen für die Gleichung eines Kegels oder Zylinders ab; wir deuten $x^4 = 0$ als Gleichung von e_∞ in $\mathfrak{R}_3$; dann sind

$$\xi = \frac{x^1}{x^4} \qquad \eta = \frac{x^2}{x^4} \qquad \zeta = \frac{x^3}{x^4}$$

inhomogene, affine Koordinaten.

Ist der Scheitel S des Kegels ein eigentlicher Punkt, so dürfen wir auf die früher abgeleitete Normalform $(x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 = 0$ zurückgreifen. Sie liefert:

(80) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ (nullteiliger Kegel)

(81) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$ (reeller Kegel)

Der Scheitel ist $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Um die Zylinder zu erhalten, gehen wir von der Normalform aus:

$$\pm (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0$$

Der Scheitel $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ liegt jetzt in der Tat auf e_∞. e_∞ schneidet in dem Gradenpaar $(x^2)^2 \pm (x^3)^2 = 0$, also nicht in einer Doppelgraden. Wir können also den parabolische Zylinder so nicht erhalten.

Die Vorzeichenverteilung der ersten Glieder bedeutet offenbar:

+	+	nullteiliger Zylinder
+	−	hyperbolischer " "
−	−	elliptischer " ".

Wir erhalten die Gleichungen

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

(82) $\eta^2 + \zeta^2 + 1 = 0$ (nullteiliger Zylinder)

(83) $\eta^2 - \zeta^2 = 1$ (hyperbolischer " ")

(84) $\eta^2 + \zeta^2 = 1$ elliptischer " " .

Als Normalform des parabolischen Zylinders können wir offenbar $(x^2)^2 + x^3 x^4 = 0$ verwenden. Der Scheitel ist wieder $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ und $x^4 = 0$ schneidet in $x^2 = 0$, also tatsächlich in einer Doppelgraden.

Wir erhalten

(85) $\eta^2 - \zeta = 0$ (parabolischer Zylinder) .

Bei den angegebenen Normalformen aller Zylindergleichungen geht die ξ -Achse durch den unendlich fernen Scheitel, d.h. die ξ -Achse ist allen Erzeugenden parallel.

Wir betrachten jetzt die nichtausgearteten F_2. Ist F_2 nullteilig ($\hat{S} = 4$), so haben alle reellen Ebenen äquivalente Lage zu F_2. Es gibt keine Fallunterscheidung im $\mathcal{O}_3$ und die Gleichung von F_2 lässt sich auf die Form bringen

(86) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1 = 0$ (nullteilige nichtausgeartete F_2)

In den übrigen Fällen (s=2,3) ist zu unterscheiden, welchen Typ der Kegelschnitt k_∞ hat, in dem F von e_∞ geschnitten wird.

1) k_∞ ist nullteilig; denn muss der Fall s = 3 vorliegen, enthielte F nämlich eine reelle Grade (s = 2), so auch einen reellen P_∞ . F heisst dann Ellipsoid. Normalform

$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$ ($x^4 = 0$ schneidet in

$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$!) oder

(87) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ (Ellipsoid)

2) k_∞ ist nichtausgeartet reell; dann heisst F ein Hyperboloid.

Enthält F keine reelle Grade ($s = 3$), so heisst das Hyperboloid zweischalig. In der Tat zerfällt F in zwei getrennte Stücke; wegen $s = 3$ gibt es nämlich eine reelle Ebene e, die keinen reellen Punkt mit F gemein hat; also $e \neq e_\infty$. Ist $g_\infty = (e, e_\infty)$, so betrachten wir das Parallelebenenbüschel durch g_∞; wir durchlaufen es mit e_∞ beginnend und endend. Da e_∞ F reell nichtausgeartet schneidet, gibt es zwei Ebenen $e_1 \neq e_\infty$, $e_2 \neq e_1, \neq e_\infty$, die F ebenfalls reell schneiden und e zwischen sich lassen, d.h. zu beiden Seiten von e besitzt F reelle Punkte, auf e nicht; F besitzt zwei durch e getrennte Stücke. Als Normalform können wir z.B. $(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$ verwenden und erhalten

(88) $\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 1$ (zweischaliges Hyperboloid).

Im Fall $s = 2$ besitzt F reelle Grade, wird also von jeder Ebene reell getroffen, zerfällt also nicht; man spricht vom einschaligen Hyperboloid. Gleichung z. B.

(89) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$ (einschaliges Hyperboloid).

3) k_∞ ist ausgeartet; e_∞ ist also Tangentialebene. Dann heisst F ein Paraboloid.

a) $s = 2$; dann muss e_∞ wie jede Tangentialebene zwei reelle Graden g_∞, h_∞ mit F gemein haben. Aus ihnen be-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

steht k_∞. F heisst hyperbolisches Paraboloid. Wir können von der Gleichung $x^1x^2 + x^3x^4 = 0$ ausgehen. Sie ergibt

(90) $\xi\eta + \zeta = 0$ (hyperbolisches Paraboloid)

b) s = 3; dann müssen g_∞, h_∞ konjugiert imaginär sein.

F heisst elliptisches Paraboloid. Wir können von der Gleichung ausgehen: $(x^1)^2 + (x^2)^2 + x^3x^4 = 0$. In der Tat liegt dann auf $x^4 = 0$ das imaginäre Gradenpaar $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$.

Also erhalten wir:

(91) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta = 0$ (elliptisches Paraboloid).

II. Mittelpunktseigenschaften.

F ist als nichtausgeartet vorausgesetzt.

Bezeichnungen:

Schnitt von e_∞ und F : k_∞

Pol von e_∞ : M (Mittelpunkt)

Polare irgendeiner g_∞ : d (g_∞) (Durchmesser)

Polarebene irgendeines P_∞ : $\delta(P_\infty)$ (Durchmesserebene)

d, δ sind alle Graden und Ebenen durch M. Liegt P_∞ nicht auf F, so halbiert $\delta(P_\infty)$ alle Sehnen durch P_∞. Ist φ der Schnitt δ, F, so wird F von dem Zylinder mit der Basis φ und der Spitze P_∞ in φ umhüllt.

Ist g_∞ nicht Tangente an k_∞, so sind alle Schnitte φ des Parallelebenenbüschels durch g_∞ mit F Ellipsen oder Hyperbeln (je nachdem k_∞ von g_∞ reell oder imaginär ge-

~~bisweilen auch - „ Sattelfläche “~~ genannt.

troffen wird); ihre Mittelpunkte liegen auf d (g_∞). Die beiden Tangentialebenen in den Punkten (F, d) gehören ebenfalls jenem Büschel an. Ist P irgend ein Punkt auf d, so berührt der Tangentialkegel an F durch P F in einer der Kurven φ.

Ist e_∞ nicht Tangentialebene an F, ist also F ein Ellipsoid, Hyperboloid oder nullteilig („ Mittelpunktsflächen" 2.Ordnung), so liegt M nicht auf e_∞, ist ~~s~~ also eigentlicher Punkt.

M halbiert alle Durchmesser, ist also Mittelpunkt aller Diametralschnitte von F, soweit diese nicht F berühren.

Der Kegel K mit der Spitze M und der Basis k_∞ heißt „ Asymptotenkegel " von F. Jede Erzeugende von K heißt „Asymptote von F. Jede Asymptote berührt F in einem Punkt von k_∞.

Jede Tangentialebene an K berührt F in einem Punkt von k_∞, hat daher mit F zwei parallele Graden gemein.

In einer Parabel wird F von genau denjenigen Ebenen geschnitten, die einer Tangentialebene von K parallel sind (ausgeartetes Ebenenbündel 2.Ordnung).

Ist e keine solche Ebene, ist f die Parallelebene zu e durch M, g, h die Erzeugenden von K in f, φ der Schnitt (e,F), so sind g,h den Asymptoten von φ parallel.

Jede Erzeugende von F ist einer Asymptote parallel.

Die letzten Sätze gelten nicht, wenn F ein Paraboloid ist. e_∞ berührt dann F, und k_∞ zerfällt in zwei Graden g_∞, h_∞, die sich in $M = M_\infty$ schneiden. Dann ergibt sich :

Alle Durchmesser eines Paraboloids sind parallel.

Alle und nur die Diametralebenen schneiden F in Parabeln.

Alle Ebenen des Parallelbüschels (g_∞) schneiden F in Graden. Ebenso das Büschel (h_∞). M.a.W. Die beiden Scharen Erzeugender sind zwei Ebenen parallel.

Alle reellen Ebenen Schnitte des Hyperbolischen Paraboloids sind Gradenpaare, Graden, Hyperbeln, Parabeln.

Alle reellen ebenen Schnitte des elliptischen Paraboloids sind Parabeln und Ellipsen.

Weitere Sätze ähnlicher Art findet man in Reye, Geometrie der Lage, Bd. 2.

§ 17.

Absoluter Kegelschnitt und räumliche Metrik.

Seien $x^1, - - -, x^4$ bezw. $\xi = \frac{x^1}{x^4}, \eta = \frac{x^2}{x^4}, \zeta = \frac{x^3}{x^4}$ homogene bezw. inhomogene kartesische Raumkoordinaten. Indem wir die anschauliche Definition ins komplexe erweitern, nennen wir „ Kugel " jede F_2, die einer Gleichung folgender Form genügt (alle a_i reell):

$$a_0(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+2(a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta)+a_4=0$$

Also in den x^i:

$$a_0\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right]+x^4\left[2(a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3)+a_4x^4\right]=0$$

Alle Kugeln haben mit e_∞ ($x^4 = 0$) den nullteiligen Kegelschnitt k_∞

$$(95) \quad k_\infty : \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \; x^4 = 0$$

gemein, und alle F_2, die durch k_∞ gehen, sind Kugeln.

Alle Punkte von k_∞ heissen „ Kreispunkte ". Kreise sind alle und nur die reellen Kegelschnitte in eigentlichen reellen Ebenen, die durch zwei konjugiert komplexe Kreispunkte gehen (Beweis durch Hilfskugeln). Jede Grade durch einen Kreispunkt heisst „ Minimalgrade " oder „isotrope Grade ". Zwei verschiedene eigentliche Punkte haben genau dann die Entfernung Null, wenn sie auf einer Minimalgraden liegen.

Alle gradlinigen Erzeugenden aller Kugeln sind Minimalgraden. Die Minimalgraden durch einen festen Punkt P bilden einen „ isotropen Kegel "; man nennt ihn auch (mit Recht ?) „ Nullkugel um P ".

Jede eigentliche Ebene, die k_∞ berührt, heisst Minimalebene. Sie bilden also insgesamt ein ausgeartetes Bündel 2.Ordnung. Die Tangentialebenen der Null~~punkte~~ kegeln sind Minimalebenen.

k_∞ bestimmt die räumliche Winkelmessung. Zwei reelle Graden sind genau dann orthogonal, wenn ihre unendlich fernen Punkte konjugiert zu k_∞ sind.

Sind nämlich $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei jenen Graden g,h parallele Vektoren, so sind ihre Komponenten (a^i), (b^i) projektive Koordinaten der unendlich fernen Punkte G,H von g,h (vergl.S.102). $a \perp b$ ist aber gleichbedeutend mit

$$a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = 0$$

und diese Gleichung bedeutet nach (95) Konjugiertheit von g,H bezgl. k_∞.

Für komplexe Grade werde die Orthogonalität von jetzt ab durch jene Konjugiertheit definiert.

Eine reelle Grade steht auf einer reellen Ebene genau dann senkrecht, wenn die unendlich ferne Grade der Ebene die Polare des unendlich fernen Punkts der Graden bzgl. k_∞ ist.

Beweis: Alle Graden der Ebenen müssen Lote der Graden sein.

Zwei reelle Ebenen stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihre unendlich fernen Graden konjugiert bzgl. k_∞ sind.

Beweis: Die eine Ebene muss ein Lot der anderen enthalten.

Für komplexe Graden und Ebenen werde die Orthogonalität von jetzt ab entsprechend definiert.

Sei nun α der Winkel zweier reeller Graden g,h mit den unendlich fernen Punkten G,H. G H schneide k_∞ in I,J. Dann ist

$$(96) \qquad \underline{e^{2i\alpha} = (\,G\,H\,I\,J\,)}$$

Beweis: In einer beliebigen Ebene e durch G H ziehe man g' durch G, h' durch H. Dann ist g' $\|$ g, h' $\|$ h, $\sphericalangle$(g',h') $= \alpha$. Da nun I,J die Kreispunkte von e sind, folgt die Behauptung aus S.86 Formel (30).

Sind e,f zwei nichtparallele reelle Ebenen mit der Schnittgraden g, sind j_1, j_2 die Minimalebenen durch g und ist $\sphericalangle$(e,f) $= \alpha$, so gilt

$$(97) \qquad e^{2i\alpha} = (\,e, f, j_1, j_2).$$

Beweis: Polarenkorrelation an k_∞ in e_∞ führt (97) auf (96) zurück.

Aufgabe: Man beweise die Winkeltreue und Kreistreue der stereographischen Projektion durch die Theorie der Kreispunkte.-

Die Aehnlichkeitstransformationen des Raumes sind offenbar alle und nur die Kollineationen, die k_∞ in sich transformieren. Daß k_∞ in sich übergeht, ist nämlich notwendig, weil alle Kugeln in Kugeln übergehen, und hinreichend, weil dann nach (96) alle Winkel erhalten bleiben. Somit führt die Metrik auf das Studium gewisser Kollineationen, die sich durch rein projektive Eigenschaften kennzeichnen lassen. Wir werden uns zu dieser Betrachtung, die uns gleichzeitig auch die nichteuklidische Metrik liefern wird.

4. Kapitel.

Kollineationen, nichteuklidische Geometrie, Erlanger Programm.

§ 18.

Grundlagen.

I. Gruppenbegriff.

Zwischen je zweien von endlich oder unendlich vielen „Elementen" a, b, --- sei eine Verknüpfung definiert, so dass das „Produkt" a b wieder ein Element ist. Ferner sei stets erfüllt:

1. $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$ (Assoziativgesetz)

2. Es gebe ein „Einheitselement" e, so daß für alle Elemente a : $a\,e = e\,a = a$.

3. Zu jedem Element a gebe es ein „inverses" a^{-1}, so daß $a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = e$.

Dann sagt man, die Elemente bilden eine Gruppe G. G heisst kommutativ oder „Abelsch", wenn $a\,b = b\,a$ für alle Elemente gilt.

U heisst Untergruppe von G, wenn alle Elemente von U zu G gehören.

G' heisst homomorph zu G, wenn jedem Element von G genau ein Element G' derart entspricht, dass alle Elemente von G' vorkommen und daß aus $a \to a'$, $b \to b'$ stets folgt $ab \to a'b'$. Ist auch umgekehrt jedem a' genau ein a zugeordnet, so heissen die Gruppen isomorph. ($G' \cong G$)

Regeln: $G \cong G$; aus $G \cong G'$ folgt $G' \cong G$; aus $G \cong G'$, $G' \cong G''$ folgt $G \cong G''$. In der Gruppentheorie vertritt der Isomorphismus die Gleichheit.

II. Kollineationen.

Aus I folgt: Wenn man als Produkt zweier Kollineationen A, B des R_n in sich diejenige Abbildung (notwendig wieder eine Kollineation) definiert, die entsteht, wenn man erst A, dann B ausführt, so sind alle Kollineationen die Elemente einer Gruppe K. Beweis: Geltung des Assoziativgesetzes ist klar. Einheitselement ist die identische Kollineation. Invers zu A ist die Kollineation A^{-1}, die A rückgängig macht.

Untergruppen von K sind z. B.

1) Alle reellen Kollineationen.

2) Alle Kollineationen, die irgendein Gebilde in sich transformieren (z.B. einen R_k, oder eine F_2 usw.)

F. K l e i n hat im „ Erlanger Programm (1872) (Ges.Abh.I, S. 460) erörtert, in wieweit die ganze Geometrie sich auffassen läßt als Studium von Abbildungsgruppen und deren Iso- und Homomorphismen. Die affine Geometrie und die Zurückführung der Winkelmessung auf die Kreispunkte sind Beispiele dieser Auffassung.

III. Matrizen.

n^2 Zahlen a_k^i in quadratischer Anordnung nennt man die „Elemente" einer (quadratischen, n-reihigen) „Matrix" A. Zwei Matrizen heißen gleich, wenn es ihre gleichstehenden Elemente sind. Als Determinante ($|\mathfrak{A}|$) und Unterdeterminanten von $\mathfrak{A}$ bezeichnet man die Determinante $|a^i_k|$ und deren Minoren. Jeder Matrix $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| \neq 0$ werde nun die Kollineation A zugeordnet. Ist B die Kollineation, die zu einer zweiten Matrix $\mathfrak{B}$ ($|\mathfrak{B}| \neq 0$) gehört, so ist A B die Kollineation

$$2)\ x^i = \sum_l a^i_l y^l \qquad 1)\ y^l = \sum_k b^l_k z^k$$

Also $x^i = \sum_{lk} a^i_l b^l_k z^k$

Die Matrix, die zur Kollineation A B gehört,

also $c^i_k = \sum_l a^i_l b^l_k$, bezeichnet man aks Produkt $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$;

(also gewöhnlich) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$)!

Dann bilden die Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| \neq 0$ eine Gruppe, die zu K homomorph ist; (Isomorphismus) besteht nicht, weil die Kollineation sich nicht ändert, wenn man alle a^i_k mit $\lambda \neq 0$ multipliziert; er besteht im Vektorenraum); In der Tat

1) Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}||\mathfrak{B}|, \quad \text{also } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \neq 0 \text{ für } |\mathfrak{A}| \neq 0\ |\mathfrak{B}| \neq 0.$$

2) Ausder Beziehung zu den Kollinationen folgt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

3) Die „Einheitsmatrix" $\mathfrak{E}$ (e^i_k) erfüllt die Relation

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad \left(\sum a^i_l e^l_k = a^i_k,\ \sum e^i_l a^l_k = a^i_k \right)$$

4) Aus der Theorie der inhomogenen linearen Gleichungen folgt, daß das System $\sum_l a^i_l b^l_k = e^i_k$ $(i = 1 \cdots n)$ für alle k genau eine Lösung hat (wegen $|a^i_k| \neq 0$)

Die Matrix $\mathfrak{B}$ (b^i_k) erfüllt also die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$. Man

$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

schreibt auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}$. Ebenso existiert $\mathfrak{b}^\times$ mit $\mathfrak{b}^\times\mathfrak{a} = \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{b}^\times\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^\times = \mathfrak{b}$. Also ist auch $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{E}$. Nach dem Multiplikationssatz ist $|\mathfrak{a}^{-1}| = \frac{1}{|\mathfrak{a}|} \neq 0$. Damit ist die Existenz des inversen Elements bewiesen. Es ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$. Denn $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{E}$. Neben der Multiplikation zweier Matrizen ist die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl eingeführt; ist $\mathfrak{a} = (a^i_k)$ $\mathfrak{b} = (b^i_k)$, so ist definiert $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a^i_k + b^i_k)$, $\mathfrak{d} = \lambda\mathfrak{a} = (\lambda a^i_k)$; Es ist $(\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{b}) = \lambda\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Ferner bezeichnet $\mathfrak{a}'$ die zu $\mathfrak{a}$ „transponierte" Matrix mit den Elementen $b^i_k = a^k_i$ (Zeilen und Spalten vertauscht). Es ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})' = \sum a^\nu_k b^k_\nu = \mathfrak{b}'\mathfrak{a}'$. Eine Matrix heisst symmetrisch bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$; dagegen wenn $\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}'$, oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' = 0$. antisymmetrisch. Nullmatrix heisst $a^i_k = 0$ für alle i, k.

III. Ähnliche Matrixen.

Statt $x^i = \sum a^i_k y^k$ schreibt man auch $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{y}$. (Ist dann noch $\mathfrak{y} = \mathfrak{b}\mathfrak{z}$, so folgt angenehmerweise $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{z}$; ferner ist $\mathfrak{E}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$.) Dieselbe Kollineation $\mathfrak{a}$ werde nun in einem andern Koordinatensystem betrachtet, (x^{*i}) das mit der ersten durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}\mathfrak{x}'$, also auch $\mathfrak{y} = \mathfrak{p}\mathfrak{y}'$, zusammenhängt. Dann ist $\mathfrak{p}\mathfrak{x}' = \mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{y}'$, also $\mathfrak{x}' = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{y}'$. Daher die Definition:

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ heissen „ähnlich", wenn es $\mathfrak{p}$ mit $|\mathfrak{p}| \neq 0$ gibt, sodass $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{p}$. Offenbar haben ähnliche Matrizen alle Eigenscha ten gemein, die der Kollineation selbst, unabhängig vom Koordi-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Koordinatensystem, zu kommen. Z.B. suchen wir die „Fixpunkte" der zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Kollineation, d.h. die Punkte, die ihre eigenen Bildpunkte sind. Dafür ist notwendig und hinreichend die Existenz eines $\lambda \neq o$, so daß $\mathfrak{y} = \lambda \mathfrak{x}$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{E}\mathfrak{x}$; $\underline{(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})\mathfrak{x} = o.}$ Das System $\sum (a^i_k - \lambda e^i_k)\, x^k = o \quad (i = 1, \dots n)$ soll eine nichttriviale Lösung haben. Dafür ist aber notwendig und hinreichend $|a^i_k - \lambda e^i_k| = o$. Das ist eine Bestimmungsgleichung von λ; man nennt $|a^i_k - \lambda e^i_k| = |\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}| = \varphi(\lambda)$ das „charakteristische Polynom" von $\mathfrak{A}$. Ist λ eine Wurzel von $\varphi(\lambda) = o$ („charakteristische Wurzel"), so gibt es zu λ einen Fixpunkt $\mathfrak{y} = \lambda \mathfrak{x}$. Wir haben damit bewiesen: <u>Jede Kollineation besitzt einen Fixpunkt.</u> (Aber nicht immer einen reellen!) Zu zwei verschiedenen Wurzeln λ, μ von $\varphi(\lambda)$ gehören verschiedene Fixpunkte. Denn aus $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{x}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mu \mathfrak{x}$ folgt $\lambda = \mu$; ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, so ist

$$\mathfrak{B} - \lambda \mathfrak{E} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P} - \lambda \mathfrak{E} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P} - \lambda \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{E}\mathfrak{P}$$
$$= \mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{P} - \lambda \mathfrak{E}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E})\mathfrak{P}.$$

Also $$|\mathfrak{B} - \lambda \mathfrak{E}| = |\mathfrak{P}^{-1}|\,|\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}|\,|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}|$$

<u>Aehnliche Matrizen haben gleiches charakteristisches Polynom.</u>

Das Problem, neben diesen <u>notwendigen</u> auch <u>hinreichende</u> Kriterien der Aehnlichkeit zu finden, gehört in die „Elementarteilertheorie".

§ 19. Reelle Kollineation auf der Graden. /=x)

a. die Fixpunkte.

Dies charakteristische Polynom ist mit reellen Koeffizienten quadratisch. Also gibt es zwei reelle Fixpunkte, (hyperbolischer Fall) zwei konjugierte imaginäre (elliptisch), einen einzigen notwendig reellen (parabolisch) oder alle Punkte bleiben fest (= Identität). Wir betrachten zunächst Kollineationen $\mathfrak{A}$ mit zwei Fixpunkten $\mathfrak{F}, \mathfrak{J}$. Machen wir sie zu Grundpunkten, so erhält $\mathfrak{A}$ die Gestalt

$$x^1 = \lambda_1 y^1$$
$$x^2 = \lambda_2 y^2$$

also $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix).

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{A}$ Diagonalmatrix, so hat $\mathfrak{A}$ die Grundpunkte zu Fixpunkten. Also gilt: $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn $\mathfrak{A}$ zwei Fixpunkte hat. Es ist $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)$. Ist $\mathfrak{P}(y)$ irgend ein Punkt $\neq \mathfrak{F}, \mathfrak{J}$, und $\mathfrak{Q}(x)$ sein Bild vermöge $\mathfrak{A}$, so ist stets $(\mathfrak{F}\mathfrak{J}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Offenbar ist nämlich, wenn $\mathfrak{E}$ der Einheitspunkt ist, $\frac{x^2}{x^1} = (\mathfrak{F}\mathfrak{J}\mathfrak{E}\mathfrak{Q}) = \frac{\lambda_2 y^2}{\lambda_1 y^1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\mathfrak{F}\mathfrak{J}\mathfrak{E}\mathfrak{P})$

/=x) Wo in diesem Paragraph von Kollineationen die Rede ist, sind stets nur solche auf der Graden gemeint.

also (vergl.S.25)

$$(\mathfrak{I}\mathfrak{J}PQ) = \frac{(\mathfrak{I}\mathfrak{J}EQ)}{(\mathfrak{I}\mathfrak{J}EP)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Sind $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ reell, so auch λ_1, λ_2 und umgekehrt. Ist $\mathfrak{I} = \bar{\mathfrak{J}}$, so auch $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, also $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 1$.

Wir können das Koordinatensystem in diesem Fall reell so wählen, dass das Punktpaar I.J. die Gleichung $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ erhält.

Die Transformation (Drehung der kartesischen x^1, x^2 Ebene um den Nullpunkt um den Winkel α.)

$$x^1 = y^1\cos\alpha + y^2\sin\alpha$$
$$x^2 = -y^1\sin\alpha + y^2\cos\alpha$$

ergibt $x^1 \pm i x^2 = (y^1 \pm i y^2)(\cos\alpha \mp i\sin\alpha)$. Also bleiben $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ fest und es wird $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{-2i\alpha}$. Die elliptischen Kollineationen der Graden sind isomorph den Drehungen der Ebene um einen Punkt.

Wir betrachten nun die parabolischen Kollineationen. Der (notwendig reelle) Fixpunkt sei der Punkt $x^2 = 0$. Dann hat $\mathfrak{a}$ die Gestalt

$$x^1 = a_1y^1 + a_2y^2$$
$$x^2 = a_3y^2$$

Jetzt wird $\varphi(\lambda) = (a_1-\lambda)(a_3-\lambda)$. Wäre $a_1 \neq a_3$, so hätte $\varphi(\lambda)$ verschiedene Wurzeln, es gäbe verschiedene Fixpunkte. Also ist $a_1 = a_3$ und o.B.d.A. $a_1 = a_3 = 1$. Die Kollineation ist daher

$$x^1 = y^1 + a_2y^2$$
$$x^2 = y^2$$

Wäre $a_2 = 0$, so hätten wir die Identität. Also ist $a_2 \neq 0$, und indem wir ein neues Koordinatensystem $\mathfrak{C}'$ durch $\begin{matrix} x = x^{1'} \\ x^2 = \frac{1}{a_2} x^{2'} \end{matrix}$ einführen, erhält $\mathfrak{A}$ (wenn wir die Striche nun wieder weglassen) die Gestalt

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 + y^2 \\ x^2 &= \phantom{y^1 + {}} y^2 \end{aligned}$$

Die Matrizen aller parabolischen reellen Kollineationen sind reell ähnlich der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(also auch untereinander).

II. Direkte und indirekte Kollineationen.

Eine reelle Kollineation heisst direkt, wenn stetig auf reellem Weg aus der Identität erzeugbar. Sonst indirekt.

Alle elliptischen Kollineationen der Graden sind direkt (man lasse den „Drehwinkel" α stetig von Null anwachsen). Ebenso alle parabolischen (man lasse in $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ stetig t von Null bis Eins gehen.)

Die hyperbolischen Kollineationen sind dann und nur dann direkt, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$. In der Tat! Ist $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, so kann man eine stetige Schar von Kollineationen mit denselben Fixpunkten angeben, deren $\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'}$ stetig und monoton von Eins bis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ geht. Ist $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, so auch $\lambda_1 \lambda_2 = |\mathfrak{A}| < 0$. Wäre $\mathfrak{A}$ direkt, so wäre $|\mathfrak{A}|$ das Produkt endlich vieler beliebig wenig von Eins abweichender Determinanten, also positiv.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

III. Involutionen.

$\mathfrak{A}$ heisst Involution, wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$; $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$.

Dann gilt: Jede Kollineation, die zwei Punkte miteinander vertauscht, ist eine Involution. Jede Involution ~~besitzt~~ besitzt zwei verschiedene Fixpunkte und entsteht, indem man ~~b~~ bezüglich dieses Punktepaars jedem Punkt seinen konjugierten zuordnet.

Beweis:

$\mathfrak{A}$ vertausche P mit Q. F sei ein Fixpunkt von $\mathfrak{A}$. G sei so gewählt, dass $(FGPQ) = -1$, (also $G \neq F$). H sei das Bild von G. Dann ist $(F\,H\,Q\,P) = -1 = (F\,H\,P\,Q) = (F\,G\,P\,Q)$, also $G = H$; G ist ~~eine~~ Fixpunkt. Ordnet man bezüglich des Punktepaares F,G jedem Punkt seinen konjugierten zu, so entsteht eine Polarität auf der Graden, also eine Kollineation B, die wegen $B \neq E, B^2 = E$ eine Involution ist. B ist aber mit A identisch, denn beide Kollineationen stimmen in der Abbildung von F,G,P überein.

Man hat elliptische und hyperbolische Involutionen zu unterscheiden. Die elliptischen sind direkt, die hyperbolischen wegen $(F\,F\,P\,Q) = -1 < 0$ stets indirekt.

IV. Affine Spezialisierung.

Es ist zu unterscheiden, ob ein Fixpunkt unendlich fern ist (also notwendig reell) oder nicht. Wir beschranken uns auf den ersten Fall. Ist $x^2 = 0$ die Gleichung des unendlich fernen Fixpunktes, und setzt man $\frac{x^1}{x^2} = x$, so erhält man bei passender Wahl des Systems die Typen

1) (Hyperbolisch) $x = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} y$ (Drehung)

2) (Parabolisch) $x = y + 1$ (Translation)

§ 20.

Kollineation ~~und~~ in Büscheln und auf Kurven 2. Ordnung.

I. Kollineation in Büscheln.

Jedes Büschel von Hyperebenen (Ebenen, Graden) lässt sich ein-eindeutig und doppelverhältnistreu auf eine grade Punktreihe abbilden; Kollineation im Büschel heisse demnach jede Abbildung des Büschels auf sich, die einer Kollineation der zugeordneten Graden entspricht.

Beschränken wir uns auf Gradenbüschel in der Ebene, so ist das einfachste Beispiel einer elliptischen Kollineation jede Drehung des Büschels um den Scheitel. Ihr entspricht nämlich auf g_∞ eine Kollineation, die die Kreispunkte festlässt.

Besonders wichtig (z.B. in der Flächentheorie) sind Involutionen im Gradenbüschel. Beispiel einer elliptischen Involution: Abbildung jeder Graden auf ihr Lot (die beiden Isotropen durch den Scheitel sind die Fixgraden).

Beispiel einer hyperbolischen Involution: Umklappung des Büschels um eine Axe durch den Scheitel (die Isotropen werden vertauscht).

Direkt sind im Gradenbüschel alle und nur die Kollineationen, die den Umlaufssinn erhalten.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

II. Kollineation auf nichtausgearteten Kurven 2. Ordnung. Bedeutung der Paskal'schen Graden.

P sei irgendein Punkt einer reellen nichtausgearteten Kurve k 2. Ordnung. Kollineation in k heißt jede Abbildung der Punkte von k auf sich, der eine Kollineation im Projektionsbüschel P entspricht (P werde der Abbildung dabei nicht mit unterworfen.) Ist denn P' ein anderer Punkt von k, so entsprechen nach § 9 jeder Kollineation von k isomorphe Kollineationen in den Büscheln P, P'.

Eine Kollineation auf k heißt reell, wenn konjugierte imaginäre Punkte von k konjugierte imaginäre Bildpunkte haben.

Jede (reelle) Kollineation der Ebene in sich, die k festläßt, vermittelt offenbar eine (reelle) Kollineation auf k

Ist k nullteilig, so steht die Gruppe R der reellen Kollineationen auf k nicht in einfacher Beziehung zur Gruppe G der reellen Kollineationen der Graden.

Besitzt dagegen k einen reellen Punkt, so ist R mit G isomorph: Jedes Element r von R muss die Menge aller reellen Punkte von k in sich überführen, entspricht also einer reellen Kollineation in jedem Büschel mit reellem Scheitel auf k.

Nun mögen vermöge r die drei reellen Punkte von k A, B, C in A', B', C' übergehen. Es sei A ≠ A'. Ferner sei P ein laufender Punkt von k, P' sein Bild.

Dann sind die Büschel A'P und AQ' projektiv bezogen, und da A A' sich selbst entspricht, sogar perspektiv. Ist g die Achse der Perspektivität, auf der sich entsprechende Strahlen der Büschel (A) und (A') schneiden, so muss g durch die Punkte (A B', A' B) und (A C', A' C) gehen.

g ist also die Paskal'sche Grade im Sechseck A B' C A' B C' und geht auch durch (B' C, B C').

Jeder Punkt (P Q', Q' P) liegt auf g. Trifft g k in F, G, so sind F, G die (einzigen) Fixpunkte von r. Denn F ist genau dann fix, wenn A F, A' F' sich entsprechen, wenn also F außer auf k, auch auf g liegt. r ist elliptisch, parabolisch, hyperbolisch, jenachdem g keinen, einen oder zwei reelle Punkte mit k gemein hat.

Hierauf gründet sich folgende Steiner'sche Konstruktion:

In der Ebene sei ein Kreis k und eine Grade g_0 gegeben. Auf g_0 sei eine Kollineation r_0 durch die Angabe $A_0, B_0, C_0 \rightarrow A_0', B_0', C_0'$ bestimmt. Dann kann man alle reellen Fixpunkte von r_0 mit dem Lineal allein finden.

Lösung: Sei P irgendein Punkt auf k, nicht auf g_0. P A_0 usw. schneide k in A usw. Die Paskalgrade von A B' C A' B C' schneide k in F, G. Dann trifft P F, PG die Grade g_0 in den Fixpunkten F_0, G_0 von r_0.

Beweis: Durch die Perspektivität von P aus ist r_0 einer Kollineation r von k zugeordnet, sodaß die Fixpunkte von r perspektiv von P aus zu den Fixpunkten von r_0 liegen. Die Fixpunkte von r sind nach dem Früheren konstruiert.

Es läßt sich analytisch beweisen, daß ohne Hilfskurve 2.Ordnung die Fixpunkte einer Kollineation nicht mit dem Lineal allein konstruierbar sind.

r ist genau dann eine Involution, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte alle durch einen Punkt S gehen, der nicht auf k liegt.

Beweis:

Ist r eine Involution, so ist r durch die Fixpunkte F G bestimmt. Sei S der Pol von F G bzgl. k. Dann betrachten wir die ebene projektive Spiegelung r' mit S als Zentrum und F,G als Axe.!!! r' führt k in sich über mit F,G als Fixpunkten und es ist $(r')^2 = \mathcal{E}$.

Also induziert r' auf k die gesuchte Involution r und die Verbindungslinien vermöge r sich entsprechender Punkte von k gehen durch S. Ist umgekehrt $\mathcal{S}$ irgendein Punkt nicht auf k und ist s seine Polare, so erzeugt die Spiegelung ($\mathcal{S}$,s) eine Involution auf k, die die verlangte Eigenschaft hat.

Man kann zeigen: Ist r keine Involution, ~~auf k, die die~~ so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine nichtausgeartete Kurve 2.Ordnung.(vergl.z.B. Reye I,11.Vortrag)

§ 21.

Die hyperbolische Geometrie der Ebene.

In einer Ebene e sei ein Kegelschnitt k vom reell projektiven Typ des Kreises gegeben. K sei die Gruppe aller reellen Kollineationen in e, die k in sich überführen.

Wir geben einige Definitionen, die gegenüber K invariant sind:

„Eigentlicher Punkt" - reeller Punkt im Innern ~~Kern~~ von k, d.h. Punkt mit konjugiert imaginärem Tangentenpaar an k.

„Eigentliche Grade" - reelle Grade durch eigentlichen Punkt /=.

„Unendlich ferner Punkt (P_∞) reeller Punkt auf k.

„Aussenpunkt" - reeller Punkt ausserhalb k, d.h. mit reellen Tangenten an k.

Es gilt: Die und nur die Graden sind eigentlich, die zwei relle P_∞ haben; also die und nur die, deren Pol Außenpunkt ist.

Neben diese <u>Lagebeziehungen</u> treten <u>Ordnungs</u>beziehungen. Sind P, Q verschiedene eigentliche Punkte; R, S die P_∞ von P Q, so ist stets (R,S,P,Q) > o. Wir können die Reihenfolge R,S so wählen, dass (R,S,P,Q) > 1. Ist Q' ein weiterer eigent-

---

/= Punkt, Grade heiße von jetzt ab in diesem § stets eigentlicher Punkt, eigentliche Grade, falls nichts weiter bemerkt wird.

licher Punkt ~~mit~~ auf P Q, so sagen wir, Q liegt zwischen P und Q', wenn auch $(R,S,Q,Q') > 1$.

Von drei Punkten P, Q, Q' einer Graden liegt immer genau einer zwischen beiden andern.

Nach einer Formel S.25 ist nämlich, wenn alle vorkommenden Punkte verschieden sind und auf einer Graden liegen:

$$(R\,S\,P\,Q)\,(R\,S\,Q\,Q')\,(R\,S\,Q'\,P) = (R\,S\,P\,P) = 1.$$

R S seien wieder die P_∞ von P Q Q'. Dann sind alle drei Faktoren positiv. Weder sind alle drei > 1, noch alle < 1. Keiner ist $= 1$, da $P \neq Q \neq Q' \neq P$. Durch evtl. Vertauschung von R S erreichen wir, daß zwei Faktoren grösser als eins sind. Der Punkt außer R S, der in diesen beiden Faktoren gemeinsam vorkommt, liegt zwischen den andern.

Man kann leicht zeigen: Läuft ein Punkt Q' gradlinig stetig von P nach Q, ohne k zu treffen, so durchläuft Q' alle und nur die Punkte zwischen P und Q. Wir wählen nun willkürlich eine positive Zahl h, die im folgenden festbleibt und definieren als Abstand $|PQ|$ die Zahl

$$|PQ| = h\,|\log.\,(R\,S\,P\,Q)|$$

wo R S die P_∞ auf P Q sind.

Der Logarithmus bewirkt, daß die neuen Abstände, sowie die gewöhnlichen, additiv für Punkte einer Graden werden. Ist nämlich Q' ein Punkt zwischen P und Q, so ist

$$|P\,Q'| + |Q'\,Q| = |P\,Q.|$$

Beweis: Wir wählen die Reihenfolge R, S so, daß $(R\,S\,P\,Q') > 1$.

Dann ist auch $(R\,S\,Q'\,Q) > 1$ n.V. und

$$(R\,S\,P\,Q) = (R\,S\,P\,Q')\,(R\,S\,Q'\,Q) > 1 .$$

Durch Logarithmieren folgt die Behauptung, weil die Vorzeichen das Fortlassen der Betragsstriche erlauben.

Schwieriger zu beweisen, aber ebenfalls richtig, ist die „Dreiecksumgleichung" für beliebige Punkte P, Q, Q':

$$|P\,Q'| + |Q'\,Q| \geq |P\,Q|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn Q' mit P oder Q zusammenfällt, oder zwischen P, Q liegt.

Das Abtragen von Strecken wird durch denselben Satz geregelt, wie in der gewöhnlichen Metrik:

Ist P irgendein Punkt, g eine Grade durch P, $d > 0$ beliebig, so gibt es genau zwei Punkte Q_1, Q_2 auf g, so daß $|P\,Q_1| = d$, $|P\,Q_2| = d$. P liegt zwischen Q_1, Q_2.

Beweis: Sind R, S die P_∞ von g, so müssen alle gesuchten Punkte Q der Bedingung genügen:

$$\pm \frac{d}{k} = \log.\,(R\,S\,P\,Q)$$

Also gibt es genau zwei Punkte der gesuchten Art:

$$(R\,S\,P\,Q_1) = e^{\frac{d}{k}} \quad (>1\,!)$$

$$(R\,S\,P\,Q_2) = e^{-\frac{d}{k}} \quad (<1\,!)$$

Also $(R\,S\,Q_2\,P) = \dfrac{1}{(RSPQ_2)} > 1$; P liegt zwischen Q_2 und Q_1.

Entsprechend den Strecken lassen sich nun auch die Winkel durch Doppelverhältnisse erklären; zwei Graden heißen senkrecht, wenn konjugiert zu k. Sind allgemein g,h zwei Graden durch P, und sind j_1, j_2 die „ Isotropen " durch P (d.h. die notwendig konjugiert-imaginären Tangenten durch P an k), so wird $\sphericalangle(g,h) = \alpha$ bis aufs Vorzeichen und bis auf Vielfache von π durch die Formel erklärt:

$$e^{2i\alpha} = (j_1, j_2, g, h)$$

Die genauere Festlegung von α verläuft analog der Euklidischen Winkelmessung und werde hier übergangen. Die Winkel sind additiv, d.h. bei passender Vorzeichenwahl gilt $\sphericalangle(g,h) + \sphericalangle(h,l) = \sphericalangle(g,l)$, wenn g,h,l durch einen Punkt gehen.

Die Konstruktionsmöglichkeiten von Strecken und Winkeln werden des weiteren festgelegt durch die Kongruenzsätze, die ebenfalls der euklidischen Metrik analog sind. Wir müssen auf die Ausführung des Axiomatischen verzichten,[*] und betrachten stattdessen die Analoga zu den Bewegungen und Umlegungen der euklidischen Ebene, also die Struktur der Gruppe K; in der Tat besteht K aus allen längen- und winkeltreuen Abbildungen der eigentlichen Punkte auf sich, und alle Kongruenzsätze lassen sich vermittels solcher Abbildungen erklären.

---

[*] Literatur:

Whitehead:	Axioms of projektive Geometry, und
	Axioms of descriptive Geometry.
Hilbert:	Grundlagen der Geometrie.
F.Klein:	Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.
Baldus:	Nichteuklidische Geometrie (Göschen)

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Wir haben bewiesen, daß jedes Element k von K eine reelle Kollineation λ von k in sich erzeugt. Nun gilt aber auch die Umkehrung: Jedes λ läßt sich in ein k einbetten und zwar eindeutig. Die Eindeutigkeit ist trivial; erzeugen K, K' dasselbe λ, so wird k durch $K' K^{-1}$ punktweise festgelassen, also ist $K' K^{-1}$ die Identität, da k vier Punkte allgemeiner Lage enthält; also K' = K.

Wir können nun die Gleichung von k in der Form ansetzen: $x^1 x^2 - (x^3)^2 = 0$. Hierfür schreiben wir analog § 9, S. 69:

$$\mathrm{I} \quad \alpha x^1 - \beta x^3 = 0$$

$$\mathrm{II} \quad \alpha x^3 - \beta x^2 = 0$$

Dann wird k durch die Büschel I, II erzeugt, α, β sind projektive Koordinaten, lineare Substitution der α, β bedeutet Kollineation λ von k in sich. Aus I, II ergibt sich aber die Parameterdarstellung von k:

$$(100) \qquad \begin{aligned} x^1 &= \beta^2 \\ x^2 &= \alpha^2 \\ x^3 &= \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

Jede Substitution λ der α, β ergibt nun eine Substitution K von $\alpha^2, \beta^2, \alpha \cdot \beta$. K auf x^1, x^2, x^3 angewandt, ist eine lineare Transformation, die k in sich überführt. Da K sich umkehren läßt, ist K eine Kollineation, also die verlangte.

$K \leftrightarrow \lambda$ ist ein Isomorphismus. Wir untersuchen, was den einzelnen Typen λ entspricht.

1) λ ist elliptisch. I, J seien die konjugiert komplexen Fixpunkte auf k. g = I J ist reell; ist G der Pol von g, so

sind $G\,I$, $G\,J$ die (imaginären !) Tangenten von G an k.

G ist eigentlicher Punkt. Da g und k in sich übergehen, so auch G. Man nennt K eine Drehung ~~von~~ um G.

Sind h, l beliebige Graden durch G, so gibt es eine Drehung um G, die h in l überführt. Sei nämlich H ein P_∞ auf h, L ein P_∞ auf l, so gibt es ein λ mit den Fixpunkten I, J, so daß $H \to L$. Das zugeordnete K ist die gesuchte Drehung.

K ist zweideutig bestimmt. Nämlich bis auf eine Drehung, die l festläßt. Ist nun L' der zweite P_∞ auf l, so gibt es ein λ_0, K_0, das L mit L' vertauscht; K_0 ist nämlich die Spiegelung G, g. K_0 führt das Büschel (G) in sich über. Ist P' das Bild von P vermöge K_0, so ist $|G\,P| = |G\,P'|$ und G liegt zwischen P, P'; G ist der „ Mittelpunkt " von $P\,P'$.

Alle Drehungen sind stetig aus der Identität erzeugbar, also direkt.

Ist nun λ hyperbolisch, so sind die Fixpunkte $I\ J$ auf k reell. Ist g, G wie oben definiert, so ist G Außenpunkt und g eine eigentliche Grade. Die Gruppe λ, die I, J festläßt, ist identisch ~~nämlich~~ mit der, die g festläßt. Ist λ direkt, so spricht man von einer Schiebung an g. Sind $P\ Q$ eigentliche Punkte auf g, so gibt es eine Schiebung an G, die $P \to Q$ bewirkt. Zum Beweis ziehe man (Fig.50) $G\,P$, GQ, und bestimme von deren vier Schnittpunkten mit k zwei, P_1, Q_1, so

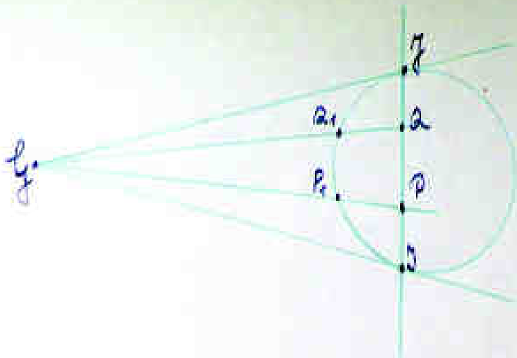


Fig.50.

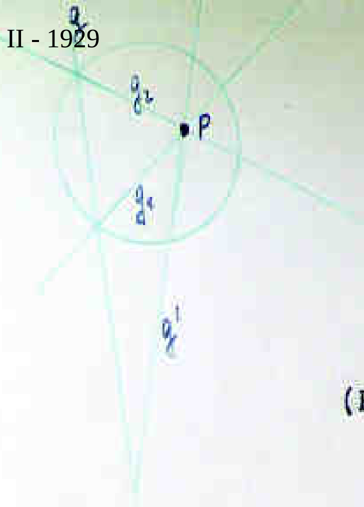
daß $(I,J,P_1Q_1) > 0$. Das durch $(I, J, P_1) \rightarrow (I\ J\ Q_1)$ bestimmte λ ist direkt und liefert das gewünschte K.

Die Spiegelung G,g ist indirekt, läßt g punktweise fest, und wird als Umklappung um g bezeichnet.

Ist λ parabolisch, so spricht man von Translationen K.

Die K, die direkten λ entsprechen, mögen „ Bewegungen " heißen. Wie in der Euklidischen Ebene läßt sich leicht zeigen: Es gibt genau eine Bewegung, die einen Pfeil (Punkt mit Richtung) in einen beliebigen anderen Pfeil überführt. Die Theorie der gegenüber K invarianten Eigenschaften heißt hyperbolische Geometrie. Wir haben bezüglich Lage, Ordnung, Stetigkeit und Kongruenz weitgehende Analogie zur euklidischen Geometrie gefunden. Demgegenüber gilt das Euklidische Parallelen-Axiom in der hyperbolischen Geometrie nicht !

Ist nämlich (Fig. 101) ein Punkt P und eine nicht durch P gehende Grade g gegeben, so müßte es nach dem euklidischen Axiom genau eine Grade durch P geben, die keinen eigentlichen Schnittpunkt mit g hat. In Wirklichkeit gibt es aber zwei Graden g_1, g_2, die nach den unendlich fernen Punkten von g gehen, und man kann stetig g_1 so in g_2 überführen, daß alle Zwischenlagen g' g in einem Außenpunkt schneiden. (Fig.101) Also gibt es einen endlichen Winkelraum um P, dessen Graden alle den euklidischen Parallelen zu g analog sind.



(Fig.101)

Wegen dieser Abweichung heißt die hyperbolische Geometrie nichteuklidisch. Ihre Entdeckung (Gauß, Bolyei, Lobatschewsky, Anfang 19.Jahrhundert) entschied die bis dahin lebhaft umstrittene Frage, ob das Parallelenaxiom aus den Axiomen der Verknüpfung, Anordnung, Stetigkeit und Kongruenz beweisbar sei; wir wisssen jetzt, daß das nicht geht. Sonst gäbe es ja keine hyperbolische Geometrie. In ähnlicher Weise durch Angabe von Beispielen entscheidet man allgemein die Frage der „ Unabhängigkeit von Axiomen ".

Aus der Abweichung im Parallelismus folgen für die hyperbolische Geometrie viele weitere: zwei seien erwähnt, die wir später beweisen.

1. Die Winkelsumme im Dreieck ist stets kleiner als zwei Rechte.

2. In der euklidischen Geometrie liegen die Punkte festen Abstands von einer Graden auf einer Parallelen zu ihr. In der hyperbolischen Geometrie erfüllen sie eine Kurve 2.Ordnung, die viele Analogie zum Kreis besitzt. /=

/= Zwei Graden, die einen Aussenpunkt gemein haben, entfernen sich nach beiden Seiten beliebig weit voneinander. Zwei Graden mit gemeinsamem P_∞ nähern sich einander in Richtung auf ihn unbegrenzt, während sie sich in umgekehrter Richtung unbegrenzt voneinander entfernen.

Wenn man Lichtstrahlen oder gespannte Seile als annähernd gradlinig voraussetzt, wäre es denkbar, durch Messung nachzuweisen, daß diese „ Materiellen Graden " keine euklidische Metrik haben; dagegen ist es prinzipiell unmöglich, ihre etwaige euklidische Struktur zu beweisen. G a u ß hat solche optische Messungen angestellt.

§ 22.

Kollineationen auf Flächen 2.Ordnung und hyperbolische Raumgeometrie.

Ist S eine Regelschar 2.Ordnung (d.h. eine Schar Erzeugender einer nichtausgearteten F_2), so besitzen 4 Graden ein Doppelverhältnis (§ 15) . Zwei Regelscharen heißen projektiv, wenn sie umkehrbar eindeutig und doppelverhältnistreu abgebildet sind.

Sind S, S' die beiden Regelscharen einer F_2, F, so heißt F projektiv auf sich abgebildet, wenn einer von folgenden zwei Fällen eintritt:

I. S ist projektiv auf sich abgebildet, S' ebenfalls.

II. S ist projektiv auf S' bezogen, S' auf S.

Da jeder Punkt P auf F als Schnitt einer Erzeugenden p aus S und einer Erzeugenden p' aus S' bestimmt ist, ist eine Projektivität auf F eine umkehrbar eindeutige Punktabbildung. Trivialerweise wird durch jede Kollineation des R_3, die F in sich überführt, eine Projektivität auf F erzeugt.

Wie bei den Kurven 2.Ordnung gilt auch hier die Umkehrung: Zu jeder Kollineation f von F auf sich läßt sich eine Kollineation k des R_3 angeben, die F in sich überführt und auf F f bewirkt. Der Beweis folgt aus den Formeln (65) - (68) S. 117 - S. 120. Durch (66) wird die eine Schar S bestimmt, durch (67) die andere S'. Projektivität von S in sich wird bewirkt durch Kollineation in den projektiven Büschelkoordinaten λ, μ. Entsprechend für S' und ρ, σ. Ist also f vom Typ I, so wird f durch irgend zwei Kollineationen in (λ, μ) und (ρ, σ) erklärt. Ist f vom Typ II, so entsteht f durch die spezielle Abbildung f_o vom Typ II: $\lambda \rightleftarrows \rho$, $\mu \rightleftarrows \sigma$ und eine Abbildung vom Typ I. In jedem Fall werden die vier Produkte $\lambda\rho$, $\mu\rho$, $\lambda\sigma$, $\mu\sigma$ linear substituiert und zwar umkehrbar; setzt man also wie S.120:

$$\begin{aligned} y^1 &= -\mu\sigma \\ y^2 &= \lambda\rho \\ y^3 &= \lambda\sigma \\ y^4 &= \mu\rho \end{aligned} \qquad (68)$$

so bestimmt f eine Kollineation k des R_3, die die verlangte Eigenschaft hat.

k ist eindeutig bestimmt, denn eine Abbildung, die F punktweise festläßt, muss die Identität sein und bis auf eine solche Abbildung ist k sicher eindeutig. Unter den Abbildungen k, die II entsprechen, haben die von der Periode zwei eine ähnlich einfache Struktur, wie die Abbildungen der Ebene, die die Involutionen eines Kegelschnitts erzeugen. f ist nämlich dadurch bestimmt, daß drei Erzeugende a,b,c von S mit drei Erzeugenden a',b',c' von S' vertauscht werden. Die Punkte A = (a,a') B = (b,b') C = (c,c') bleiben also fest. Lägen A,B,C auf einer Graden g, so träfe g a,b,c; also wäre g eine Grade aus S'. Aus demselben Grund müßte g zu S gehören; das geht nicht. Also spannen A B C eine Ebene e auf. Der Schnitt s von e mit F ist nicht ausgeartet. Denn A,B,C liegen auf s und keine Seite des Dreiecks A B C ist Erzeugende von F. Somit ist e nicht Tangentialebene und der Pol $\mathcal{E}$ von e bezüglich F liegt nicht auf e.

Die perspektive Spiegelung $(e,\mathcal{E})$ ist die verlangte Kollineation k.

k führt nämlich F in sich über (Beweis wie in der Ebene) und läßt e, also s, punktweise fest. Entweder gehen also a,b,c und a',b',c' je in sich über (das wäre die Identität auf F, geht also nicht) oder a,b,c muss in der Tat in a',b',c' übergehen. /*

Die Kollineationen k des R_3, die dem Typ I entsprechen, kann man im allgemeinen folendermassen charakterisieren: Es mögen die Graden f,g aus S und f',g' aus S' festbleiben. Dann bleiben auch die Punkte $F_1=(f,f')$ $G_1=(g,g')$, $F_2=(f,g')$, $G_2=(f',g)$ fest. Man erkennt gemäß Fig.36.S.122: $h_1=F_1G_1$ und $h_2=F_2G_2$ sind polare Graden bezüglich F, die vermöge k in sich übergehen. k hat dann Analogien zu den Schraubungen des euklidischen Raums. Bleibt außer F_1G_1 noch ein dritter Punkt H_1 auf h_1 fest, so alle Punkte von h_1. Analog einer euklidischen Drehung um die Achse h_1.

Wir stellen nun die Realitätsfrage. Die nullteiligen Flächen sind am schwierigsten zu erfassen, seien daher übergangen. Bei den reellen Regelflächen andererseits entsprechen

---

/* Der Leser prüfe die Beziehung der Konstruktion zum Paskalschen Satz, und beweise ferner: Jede Kollineation die F in sich überführt, ist durch höchstens 4 Spiegelungen vom Typ $(e,\mathcal{E})$ erzeugbar.

offenbar die reellen k einfach den reellen Substitutionen von (λ,μ) und (ϱ,σ). Am wichtigsten ist der Typ der Kugel. k ist dann und nur dann reell, wenn f die reellen Punkte der Kugel in reelle überführt.

Beweis:

Ist k reell, so hat f selbstverständlich seine Eigenschaft. Andererseits, wenn f alle reellen Kugelpunkte in ebensolche abbildet, so seien irgend 5 reelle Punkte allgemeiner Lage auf der Kugel herausgegriffen. Durch Angabe ihrer Bilder, die reell sind, ist k eindeutig und zwar als reell, bestimmt.

Nun sind die Transformationen der Regelscharen S,S' zu charakterisieren, die reelle k ergeben. S' besteht aus den zu S konjugiert komplexen Graden (vergl.S.123). Beschränken wir uns auf den Typ I, so ist für Realität notwendig und hinreichend, falls g,h zwei beliebige Graden aus S sind:

(A) Aus $g \to h$ folgt $\bar{g} \to \bar{h}$.

In der Tat: auf g liegt höchstens ein reeller Punkt, sonst wäre g reell; ein solcher Punkt liegt wirklich auf g, nämlich $(g,\bar{g})$. Offenbar muss $(g,\bar{g})$ in $(h,\bar{h})$ übergehen; die Bedingung (A) ist also notwendig. Sie reicht aber auch hin, denn durch jeden reellen Kugelpunkt P gehen konjugiert komplexe Erzeugende, vermöge (A) ist also das Bild von P reell.

Wird nun eine komplexe Kollineation $g \to h$ in S willkürlich vorgegeben, so ist die zugehörige Abbildung $\bar{g} \to \bar{h}$ in S' eindeutig bestimmt; es bleibt zu zeigen, daß $\bar{g} \to \bar{h}$ zugleich mit $g \to h$ stets eine Kollineation ist. In der Tat folgt aber aus $g_i \to h_i$ ($i = 1,2,3,4$) :

$$(g_1, g_2, g_3, g_4) = (h_1, h_2, h_3, h_4);$$

also auch

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4) = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4).$$

Also ist $\bar{g} \to \bar{h}$ eine Kollineation.

Die reellen Transformationen k, die I entsprechen, nennt man die „hyperbolischen Bewegungen" im Raum. Somit haben wir bewiesen: Die Gruppe K der hyperbolischen Bewegungen im Raum ist isomorph der komplexen Kollineationsgruppe ~~mit~~ auf der Graden. Analog wie in der Ebene bezeichnet man im Raum als „ hyperbolische Geometrie" alle Begriffe und Sätze, die gegenüber K invariant sind. Wieder betrachtet man als eigentliche Punkte die reellen Punkte im Innern der Kugel, d.h. die mit imaginärem Tangentialkegel. Eigentliche Graden sind die reellen Graden durch eigentliche Punkte.

Sind P Q zwei eigentliche Punkte und R S die (notwendig reellen) Durchstosspunkte ihrer Verbindungsgraden mit der Kugel, so ist (P Q R S) invariant gegen K. Wieder setzt man $|P\,Q| = h\,|\log P\,Q\,R\,S|$. (h reell, beliebig, fest). Sind g,h Graden durch P, und ist φ der Schnitt ihrer Ebene mit der Kugel, so ist $\sphericalangle(g,h)$ zu definieren vermöge der hyperbolischen Metrik in e bezüglich φ. Zum Begriff „ Winkel zwischen Grade und Ebene" kommt man vermittels des Tangentialkegels im Durchstosspunkt, der die Rolle des euklidischen „ Isotropenkegels" spielt. Insbesondere heißt g senkrecht auf e, wenn g durch den Pol von e geht. Zwei Ebenen heißen senkrecht, wenn eine durch den Pol der anderen geht. Wie in der Ebene ist auch im „ hyperbolischen Raum " die Gruppe K gross genug, um das Abtragen von Strecken und Winkel in dem Maß zu gestatten, wie man es für Kongruenzfragen braucht.

§ 23.

Komplexe Zahlenebene und Kreisgeometrie in Beziehung zur hyperbolischen Raumgeometrie.

Sind x, y kartesische Koordinaten in einer Ebene e, so ist jedem reellen Punkt (x, y) in e eindeutig die komplexe Zahl $z = x + iy$ zugeordnet. Faßt man in dieser Weise e als Bild aller komplexen Zahlen auf, so nennt man e „komplexe Zahlenebene". Dabei ergeben sich eine Reihe geometrischer Uebertragungen arithmetischer Aussagen. So ist $OP = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Ist $P_1 \rightarrow z_1, P_2 \rightarrow z_2$, so wird der Punkt $P \rightarrow z_1 + z_2$ durch die Vektorformel bestimmt:

$$OP = OP_1 + OP_2 .$$

Faßt man nun z als inhomogene projektive Koordinate auf der komplexen Graden g auf, so entspricht der Gruppe G aller komplexen Kollineationen auf g eine zu G isomorphe Abbildungsgruppe E in e, die wir untersuchen wollen. Um die Beziehungen der Zahlenebene e zur komplexen projektiven Graden g umkehrbar eindeutig zu machen, müssen wir e <u>einen</u> unendlich fernen Punkt ($P_\infty \rightarrow z = \infty$) zuordnen (im Gegensatz zu den Verhältnissen der projektiven Ebene!) Auch kommen nur die Punkte von e jetzt in Betracht, die im gewöhnlichen Sinn reell sind (x, y reell).

Wir beweisen: E führt die Menge der <u>Kreise und Graden</u> von e in sich über.

Die Kreise und die Graden haben in der Tat die Gleichungen (in x, y):

(105) $a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$

(a, b, c, d reell, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).

Setzen wir $b - ic = \beta$, so geht (105) über in

(106) $a z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + d = 0$

Jedes Element $w \to z$ von G hat nun die Gleichung

(107) $z = \dfrac{lw + m}{nw + h}$ $\qquad \begin{vmatrix} l & m \\ n & h \end{vmatrix} \neq 0.$

(106) ergibt also

$$a(lw+m)(\overline{lw+m}) + \beta(lw+m)(\overline{nw+h}) + \bar{\beta}(\overline{lw+m})(nw+h) + d(nw+h)(\overline{nw+h}) = 0.$$

Durch Ausmultiplikation ergibt sich wieder eine Gleichung der Form (106):

$A w \bar{w} + B w + C \bar{w} + D = 0,$

wo A, D reell sind, und $B = \bar{C}$ gilt.

Wenn man (107) in Real- und Imaginärteil spaltet, erhält man E in reellen kartesischen Koordinaten; natürlich ist das Ergebnis umständlicher als (107).

Man kann nun E durch stereographische Projektion abbilden auf die Gruppe K aller reellen Kollineationen einer Kugel F in sich, die die Regelscharen nicht vertauschen.

F ~~ver~~möge die Gleichung $x^2+y^2+t^2=1$ haben; x, y, t seien dabei kartesische Raumkoordinaten, und e habe die Gleichung $t = 0$, so daß wieder x, y kartesische Koordinaten in e sind.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Wir projizieren irgendeinen Punkt P (ξ, η, ζ) vom Nordpol N $(0,0,1)$ von F auf e . Ist Q $(x, y, 0)$ das Bild, so muß gelten: $NQ = \lambda NP$.

Also
$$x = \lambda \xi$$
$$y = \lambda \eta$$
$$-1 = \lambda(\zeta - 1)$$

oder
$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$$
$$y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

~~oder~~

und für
$$x + iy = z :$$

(108)
$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$$

Nun sei P ein reeller Punkt von F; dann gilt
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0$$

oder
$$(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) - (1 + \zeta)(1 - \zeta) = 0.$$

Die Regelscharen von F sind also:

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} \lambda(\xi + i\eta) - \mu(1-\zeta) = 0 \\ \lambda(\xi - i\eta) - \mu(1+\zeta) = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{II} \quad \begin{cases} \varrho(\xi + i\eta) - \sigma(1+\zeta) = 0 \\ \varrho(\xi - i\eta) - \sigma(1-\zeta) = 0 \end{cases}$$

Aus I und (108) folgt: $z = \frac{\mu}{\lambda}$.

Z ist also eine inhomogene Koordinate projektive der Regelschar I von F.

Jeder reellen Kollineation von F, die I in sich überführt, entspricht stereographisch in der Zahlenebene e die gebrochene lineare Transformation der inhomogenen Koordinate von I.

Dies gibt einen neuen Beweis dafür, daß die Gruppe E kreistreu ist, und lehrt überdies ihre Winkeltreue. Wegen der stereographischen Beziehung $e \to F$ genügt es nämlich, beides für die reellen Kollineationen K auf F zu zeigen; Das ist aber klar; Da K in den Raum erweitert werden kann, gehen die ebenen Schnitte von F, also die Kreise, in ebensolche über. Da die isotropen Erzeugenden von F in sich übergehen, bleiben nach der Laguerre-schen Definition auch die Winkel auf F erhalten.

Statt auf e kann man die komplexen Zahlen auch durch stereographische Projektion auf die reellen Punkte von F beziehen („ Zahlenkugel "). Das hat den Vorteil, daß der auf e fehlende Punkt $z = \infty$ jetzt durch einen wirklichen Punkt, den Nordpol von F, dargestellt wird.

Man kann nun fragen, was für Abbildungen in e den Kollineationen K_1 in F entsprechen, die die Regelscharen vertauschen. Man erhält alle K_1, wenn man eine spezielle Transformation k_1 mit allen K zusammensetzt. Wählen wir nun speziell für k_1 die Abbildung von F, die entsteht, wenn man den Raum orthogonal an e spiegelt, so entspricht dem stereographisch auf e die Inversion an $x^2 + y^2 = 1$. Jeder Abbildung K_1 entspricht also in e das Produkt einer Inversion und eines Elements von E. Analytisch hat jene Inversion $(x, y \to u, v)$ die

Gleichung $x = \frac{u}{u^2+v^2}$

$y = \frac{v}{u^2+v^2}$

Also für $x+iy=z$; $u+iv=w$;

$$(109) \qquad z = \frac{1}{\overline{w}} .$$

Die Gesamtheit E_1, die in e K_1 entsprechen, heißt „binäre Antikollineationen". Das allgemeine Element hat nach (109) die Form:

$$(110) \qquad z = \frac{l\,\overline{w} + m}{n\,\overline{w} + h} \qquad \begin{vmatrix} l & m \\ n & h \end{vmatrix} \neq 0$$

Neben der Inversion ist ein besonders einfacher Fall von (110):

$$z = \overline{w}\,; \quad x = u, \quad y = -v.$$

Das ist die Umklappung um die x-Achse.

Man nennt die aus E und E_1 erzeugte Gruppe (E^*) die „Kreisverwandtschaften" in e. Man kann nämlich zeigen: Jede reelle stetige kreistreue Abbildung der Zahlenebene auf sich ist in (E^*) enthalten.

E ist offenbar Untergruppe von E^*.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

§ 24.

Die Poincaré'sche Metrik.

Wir betrachten die Untergruppe H der hyperbolischen Bewegungen, die eine eigentliche Ebene e festlassen. Sei φ der (reelle) Schnitt von (e,F). Dann liefert H auf e die Gruppe B aller ebenen hyperbolischen Bewegungen und Spiegelungen mit φ als Grundkegelschnitt. Denn jedes $b \in B$ wird durch eine Projektivität $A,B,C \rightarrow A',B',C'$ auf φ bestimmt; sind $a, \bar{a}$ bezw. $b, \bar{b}$ bezw. $c, \bar{c}$ die Erzeugenden durch A,B,C, so gibt es genau ein $h \in H$, das durch die Vorschrift

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \bar{a}' \\ \bar{b}' \\ \bar{c}' \end{matrix}$$

geliefert wird (a'b'c' usw. die Erzeugenden durch A'B'C'). h bewirkt $A\,B\,C \rightarrow A'B'C'$, führt also $e = e(A,B,C) = e(A',B',C')$ in sich über und leistet b in e. Nun entspricht überdies der Gruppe H eine isomorphe Gruppe H_F von Kollineationen von F in sich, die φ festlassen. Die Beziehung $B \rightleftarrows H_F$ soll geometrisch untersucht werden. Wir nehmen der Anschaulichkeit halber e als Durchmesserebene an. Dann bleibt der Pol P_∞ von e ebenfalls fest, also geht die Gesamtheit aller Lote auf e in sich über; denn sie bilden das Parallelbündel (P_∞). Seien nun $P_1\,P_2$ die Durchstoßpunkte von F mit dem in $P \in e$ auf e errichteten Lote. Entsprechend Q_1, Q_2 zu $Q \in e$. Bewirkt b $P \rightarrow Q$, so erfolgt im zugehörigen h_F: $P_{1,2} \rightarrow Q_{1,2}$

Die Abbildung $P \to P_{1,2}$ (Orthogonalprojektion von e auf F) liefert also die gewünschte Zuordnung $b \to h_f$.

Bei dieser Abbildung geht die Menge aller eigentlichen Punkte über in die Menge aller reellen Punkte von F. Die eigentlichen Graden werden die reellen Kreise auf F, die auf φ senkrecht stehen.

Die hyperbolischen Winkel in e werden die gleichen euklidischen Winkel in F.

Zum Beweis der letzten Behauptung genügt es zu zeigen: die isotropen Erzeugenden von F sind die Bilder der Tangenten an φ in e. Sei nun g so eine Erzeugende. g treffe φ in P. Dann wird g von P_∞ aus projiziert durch eine Ebene p, die durch g geht und auf e senkrecht steht; p ist durch (P_∞, g) eindeutig bestimmt; nun hat die Tangentialebene an F in P die beiden Eigenschaften von p; also ist sie p, also wird g auf e projiziert in die Tangente ~~von~~ an φ in P.

Wir projizieren nun noch F stereographisch vom am weitesten von e entfernten Kugelpunkt N aus auf e zurück. Wir beschränken uns auf die N abgewandte von φ abgeschnittene Halbkugel. Dann ist das Innere des Kreises φ so auf sich abgebildet, daß die eigentlichen Graden übergehen in die reellen Kreise senkrecht zu φ, und daß die hyperbolischen Winkel in in gleiche euklidische übergehen. Der Gruppe B wird die Gruppe aller der Kreisverwandtschaften in e, die φ und das Innere von φ in sich überführen, zugeordnet.

Die angegebene neue Verwirklichung der hyperbolischen Ebene wurde von Poincaré entdeckt. Sie ist für die Funktionentheorie wichtig, sowie für alle Fragen der hyperbolischen Winkelmessung.

Z.B. können wir jetzt beweisen: im eigentlichen Dreieck ist die Winkelsumme stets kleiner als 2 R.

Wir beweisen zuerst den Hilfssatz: Ist M der Mittelpunkt von φ, und ist k ein auf φ senkrechter Kreis oder eine auf φ senkrechte Grade (also Bild irgendeiner hyperbolischen Graden), so gibt es nur zwei Fälle:

1) k ist eine Grade durch M.

2) k ist ein Kreis und M ist ein äußerer Punkt von k.

In der Tat! Sind R,S die Schnittpunkte von k mit φ, so ist $RM \perp \varphi$, $SM \perp \varphi$. Also sind R M, S M die (reellen !) Tangenten an k von M aus; liegen R M S kollinear, so gilt Fall 1), sonst Fall 2).

Sei nun A B C irgendein Dreieck in der Poincaré'schen Kreisscheibe (Seiten a,b,c). Dann läßt sich A B C so hyperbolisch bewegen, daß A nach M fällt. Gehen dabei B C in B'C' über, a,b,c in a',b',c', so sind nach dem Hilfssatz b',c' Graden durch M; a' ein Kreis mit M im Äusseren. Also hat das Dreieck a',b',c' eine kleinere euklidische Winkelsumme als das gradlinige Dreieck M B' C'; also hat A B C eine kleinere hyperbolische Winkelsumme als 2 R. (Fig.100).

(Fig.100)

§ 25.

Andere nichteuklidische Geometrien,

spezielle Relativitätstheorie.

Man kann die Begriffe und Sätze, die im R_n gegenüber allen reellen Kollineationen irgendeiner F_2 invariant sind, stets in ähnlicher Weise, wie im vorigen, als eine Metrik deuten und als nichteuklidische Geometrie bezeichnen.

Im allgemeinen ergeben sich dann aber abweichende Realitätsverhältnisse. Wenn man nämlich als Drehungen um einen Punkt P wie bisher die Transformationsgruppe D deutet, die dessen Tangentialkegel T an die feste F_2 in sich überführt, so erhält man dann und nur dann volle Analogie zum euklidischen Fall, wenn T außer P keinen reellen Punkt besitzt. Andernfalls wird D nicht jeden reellen Strahl durch P in jeden anderen überführen können, was man doch von Drehungen verlangen möchte. z.B. in drei Dimensionen zerlegt jeder reelle Kegel T den Strahlenraum durch die Spitze P in zwei Klassen, die durch D nicht vertauscht werden können: Äußere Strahlen, durch die zwei reelle Tangentialebenen an T existieren und innere, deren Tangentialebenen imaginär sind.

Man nennt deswegen Geometrien mit reellem „Isotropenkegel" manchmal „Geometrien mit Winkelsperre".

Nichteuklidische Geometrien im eigentlichen Sinne erhält man, wenn zu es F_2 eine Punktmannigfaltigkeit M mit

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

komplexem Tangentialkegel gibt. Setzen wir ausserdem wie bisher F_2 als nicht ausgeartet voraus, so beweisen wir: F_2 ist entweder vom Typ

$$(H) \quad \sum_1^n (x^i)^2 - (x^{n+1})^2 = 0$$

oder

$$(E) \quad \sum_1^{n+1} (x^i)^2 = 0$$

In der Tat ! Ist P ein Punkt von M, so darf die Polarhyperebene p (P) mit F_2 keinen reellen Punkt gemein haben, denn sonst gäbe es eine reelle Tangente an F_2 durch P. Umgekehrt: Wenn es zu F_2 eine reelle Hyperebene p gibt, die F_2 nullteilig schneidet, so ist offenbar der Pol P von p ein Punkt aus M; Die Existenz nullteilig schneidender Hyperebenen ist aber nach § 14, S. 113 ff. grade dann geknüpft, daß in der Normalform $\sum_1^s (x^i)^2 - \sum_{s+1}^{m} (x^i)^2 = 0$ die Zahl s größer oder gleich n ist.

Ist F_2 vom Typ H, so spricht man von hyperbolischer Geometrie, bezeichnet M als die „eigentlichen Punkte" und geht analog dem früheren vor.

Neu ist uns der Typ E. „Elliptische Geometrie". Dann umfaßt M alle reellen Punkte. Die elliptische Geometrie besitzt daher grössere Einheitlichkeit als die hyperbolische, aber auch größere topologische Schwierigkeiten; der Begriff „zwischen" läßt sich nicht so definieren wie im euklidischen und hyperbolischen Fall. Ferner werden die Graden jetzt geschlossene Kurven endlicher Länge ; die Entfernung belie-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

biger Raumpunkte liegt unter einer endlichen Schranke, wenn man für irgendein Punktepaar die Entfernung willkürlich gewählt, d.h. irgendeine Längeneinheit vorgegeben hat.

Da der Kugelkreis der euklidischen Raumgeometrie nullteilig ist, kann man ihn als Grundkegelschnitt einer elliptischen Metrik in e_∞ auffassen. Diese Metrik liefert nun, wie aus der Laguerre'schen Winkelmessung folgt, nicht anderes, als die Längen und Winkel der sphärischen Trigonometrie auf irgendeiner Kugel F. Damit F auf e_∞ im reellen umkehrbar eindeutig abgebildet sei, muß man alle Diametralpunktepaare als einzelne Punkte rechnen. Dann wird die Gruppe der Drehungen von F in sich isomorph der elliptischen Gruppe in 2 Dimensionen. Gleichzeitig treten die topologischen Schwierigkeiten auf, die schon § 1,S.6. erwähnt wurden.

Auch in mehr Dimensionen besteht ein Zusammenhang zwischen der elliptischen Gruppe und den orthogonalen Transformationen; vergl. den folgenden §.

Man kann die euklidische Geometrie (Nullteilige F_2 in einer rellen Hyperebene als Grundlage der Metrik) auffassen als Uebergangsfall zwischen H und E. vergl. hierzu F.Klein, Nichteuklidische Geometrie.

Die Raum-Zeitmessung der speziellen Relativitätstheorie unterscheidet sich von der vierdimensionalen euklidischen Geometrie dadurch, daß im unendlich fernen R_3 nicht eine null-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

teilige F_2 ausgezeichnet wird, sondern eine Fläche vom Typ der Kugel. Für die eigentlichen „Weltpunkte" P ist daher der isotrope Kegel T reell; man erhält eine „euklidische Metrik mit Winkelsperre". Die Kegelerzeugenden werden die Lichtstrahlen durch P, die Winkelsperre scheidet die P enthaltenden „Weltlinien" in „raumartige" und „zeitartige".

Vergl. hierzu:

H. Minkowski: „Raum und Zeit"

abgedruckt in

Lorentz-Einstein-Minkowski „das Relativitätsprinzip" (Berlin 1920, Teubner)

5. Kapitel.

Büschel- und Fokaltheorie der Gebilde 2.Ordnung.

§ 26.

Grundlagen.

$F = o$, $G = o$ seien die Gleichungen zweier reeller verschiedener Hyperflächen 2.Ordnung im R_n, von denen keine den ganzen Raum erfüllt. Dann heißt bei beliebigen $\lambda, \mu \neq o, o$ die Menge aller Hyperflächen 2.Ordnung der Form

(120) $\Phi = \lambda F + \mu G = o$

ein F_2-Büschel.

(Diese Begriffsbildung ist eine spezielle aus der Theorie der „ linearen Kurvenscharen " der algebraischen Geometrie).

Sei $F = o$ ausgeschrieben $\sum a_{ik} x^i x^k = 0$, dann bezeichne $\mathfrak{A}$ die symmetrische Koeffizientenmatrix (a_{ik}). Entsprechend $\mathfrak{B}$ für $G = o$. Das „ allgemeine Element " des Büschels hat dann die Matrix $\lambda \mathfrak{A} + \mu \mathfrak{B}$. Nach unseren Voraussetzungen sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ reell und linear unabhängig, also insbesondere nicht die Nullmatrix.

<u>Durch jeden Raumpunkt $\mathfrak{P}$ geht entweder genau ein Element oder alle.</u>

Beweis: 1) Liegt P nicht auf F und G, also o.B.d.A. $F(P) \neq o$, so bestimmt sich das Verhältnis $\lambda : \mu$ eindeutig aus $\lambda F(P) + \mu G(P) = o$. d.h. P liegt genau auf einem Element.

2) Liegt P auf F und G, also F (P) = G (P) = o, so ist auch λ F (P) + μG (P) = o für alle λ, μ, d.h. alle Elemente gehen durch P.

Die Punkte F = G = o heißen der „Träger" des Büschels. Durch alle Punkte außer denen des Trägers geht also genau ein Element. Durch den Träger gehen alle.

<u>Sind F' = o, G' = o verschiedene Elemente des Büschels, so ist dieses identisch mit</u>

$$\underline{\lambda' F' + \mu' G' = o.}$$

Beweis: Man deute die Elemente der Matrizen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in einer willkürlich festzulegenden Reihenfolge als Komponenten zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in einem höherdimensionalen Raum. Dann entspricht jedes Element des Büschels einem Punkt der Graden $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$, und der Satz besagt nur die bekannte Tatsache, dass diese Grade durch irgend zwei ihrer Punkte festgelegt ist.

Ein linearer reeller Unterraum R_k in R_n schneide F = o in f = o und G = o in g = o. Dann schneidet R_k das Büschel Φ = o in $\lambda f + \mu g$ = o. Hieraus folgt:

<u>Jeder R_k schneidet jedes Büschel entweder wieder in einem Büschel oder liegt ganz in einem Element.</u>

Beweis: Liegt R_k ganz in f = o oder in g = o, so ist nichts zu beweisen. Ist das nicht der Fall und ist f = o mit g = o identisch, so kann man λ_o, μ_o so bestimmen, dass in R_k iden-

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

tisch gilt $\lambda_0 f + \mu_0 g = 0$. Dann ist R_K im Element $\lambda_0 F + \mu_0 G = 0$ enthalten. Tritt keiner der früheren Fälle ein, so bedeutet $\lambda f + \mu g = 0$ definitionsgemäß ein Büschel in R_K.

Wir untersuchen nun die Konjugiertheitsbeziehungen. Es gilt der wichtige Satz:

Sind zwei Punkte P Q bezüglich irgend zweier verschiedener Elemente F, G eines Büschels konjugiert, so bezüglich aller.

Beweis:

Aus $\sum a_{ik} x^i y^k = 0$, $\sum b_{ik} x^i y^k = 0$ folgt

$$\sum (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) x^i y^k = 0 .$$

Das ist die Behauptung.

Im allgemeinen wird nun ein Punkt P bezüglich F, G zwei verschiedene Polarhyperebenen p, q haben. Deren Schnitt, ein R_{n-2}, besteht also aus Punkten, die zu P in allen Büschelelementen konjugiert sind. Das Büschel liefert somit eine Abbildung der Punkte auf gewisse R_{n-2}. Im R_3 entsteht also eine Punktgradenbeziehung, die für die Liniengeometrie Bedeutung hat („Tetraedrale Komplexe" bei Reye Bd.2,3).

Wir betrachten nun grade Punkte, die von dieser Norm abweichen und definieren:

P heißt Grundpunkt, wenn folgende Bedingungen gelten:

1) P ist reell

2) es gibt eine reelle Hyperebene p, die nicht durch P geht, und deren Punkte zu P in allen Büschelelementen konjugiert sind.

<u>P ist nur dann Grundpunkt, wenn P (reeller) Scheitelpunkt eines (ausgearteten) Elements ist.</u>

Beweis: Mindestens ein Element, Φ, geht durch P. In Φ ist also P sich selbst konjugiert; als Grundpunkt ist P aber in Φ auch zu p (P) konjugiert; wäre P nicht Scheitelpunkt in Φ, so müsste p (P) durch P gehen, entgegen der Voraussetzung.

Ist die Bedingung erfüllt, so ist P wirklich Grundpunkt, falls einer von folgenden Fällen zutrifft:

1) P liegt nicht im Träger

2) P liegt im Träger und ist Scheitelpunkt zweier Elemente.

In der Tat: Im Fall 1) gibt es ein nicht durch P gehendes Element $F = 0$. p (P) sei die (notwendig reelle, nicht durch P gehende) Polarhyperebene von P in F. Dann sind alle Punkte von p zu P konjugiert in F und in Φ, also in allen Elementen. Im Fall 2) hat jede nicht durch P gehende reelle Hyperebene p die verlangte Eigenschaft. Dieser Fall ist aber unwichtig, weil dann das Büschel nur ausgeartete Elemente hat.

Nicht jedes Büschel besitzt einen Grundpunkt. z.B. spannen auf der Graden die Punktepaare $P\,Q$, $P\,R$ ein Büschel ohne Grundpunkt auf; das Büschel besitzt nämlich als ausgeartetes Element nur den Doppelpunkt P, und P ist nur sich selbst in allen Elementen konjugiert.

Definition: Ein Büschel ist regulär, wenn es ein reelles gemeinsames Polarsimplex besitzt. Dieses heißt dann Grundsimplex des Büschels.

Alle Ecken des Grundsimplex sind Grundpunkte.

Beispiel: In der Ebene seien vier reelle oder paarweise konjugiert komplexe Punkte A,B,C,D gegeben, von denen nicht drei auf einer Graden liegen. Es sei gesetzt: (AB,CD) = P, (AC,BD) = Q, (AD,BC) = R. Dann ist P Q R ein reelles Dreieck. Die (reellen oder konjugiert komplexen) Gradenpaare (AB,CD) und (AC,BD) sind reelle Kegelschnitte; Φ sei das von ihnen aufgespannte Büschel. Dann besteht Φ aus allen Kegelschnitten durch A,B,C,D, und Φ ist regulär mit P Q R als Grunddreieck.

In der Tat ! Jedes Element von Φ geht durch A,B,C,D, da die beiden genannten Gradenpaare es tun. Ist ξ irgend ein von A,B,C,D verschiedener Punkt irgend eines Kegelschnitts F, der durch A,B,C,D geht, so gibt es durch ξ auch ein Element F' auf Φ ; F,F' sind identisch, weil die in den fünf Punkten A,B,C,D,E übereinstimmen, von denen nicht vier auf einer Graden liegen. P Q R sind sämtlich Scheitelpunkte je eines Elements -(AD,BC) ist auch ein Element ! - und liegen nicht im Träger; also Grundpunkte. Es ist P$\sim$Q in (AB,CD) und in (AC,BD) also in allen Elementen, denn P ist Scheitel von (AB,CD) und Q Scheitel von (AC,BD). Ebenso P$\sim$R, Q$\sim$R in allen Elementen.

§ 27.

Die Säkulargleichung.

Wir drücken die Eigenschaft der Grundpunkte jetzt analytisch aus. $\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B}$ sei die Matrix des Büschelelements, in dem der Grundpunkt C Scheitelpunkt ist. Dann muß nach S.107 gelten:

$$(\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B})\,\mathfrak{c}=0.$$

Dies homogene System in $\mathfrak{c}$ ist genau dann nichttrivial lösbar, wenn λ,μ so bestimmt sind, daß

$$(120) \qquad |\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B}|=0.$$

Dies ist eine homogene Gleichung (n + 1) ten Grades in λ,μ. Sie ist der charakteristischen Gleichung $|\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{E}|=0$ (S.144). analog; allgemeiner als diese, insofern $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{B}$ ersetzt ~~wird~~ ist, andererseits spezieller, weil $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jetzt symmetrische Matrizen sind. Einen Grundpunkt liefert (120) nur, wenn λ,μ reell sind.

Ist das Büschel regulär, so werden die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Diagonalmatrizen, falls man das Grundsimplex zum Koordinatensimplex macht; das Verschwinden der gemischten Glieder folgt aus den Konjugiertheitsbeziehungen (S.110). Wie ändert sich nun die Matrix einer F_2 bei Wechsel des Koordinatensystems ?

Aus $\sum a_{ik}x^i x^k=0$, $x^i=\sum_{r=1}^{n+1} p^i_r y^r$ folgt:

$\sum_{ikr\sigma} a_{ik}p^i_r p^k_\sigma y^r y^\sigma=0$ Die Matrix $(a_{ik})=\mathfrak{A}$ wird also zu

$$\mathfrak{A}^*=(a^*_{r\sigma})=\left(\sum_{ik} a_{ik}p^i_r p^k_\sigma\right)$$

Setzt man $p^i_K = \mathfrak{P}$, so wird nach den Regeln der Matrizenmultiplikation:

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{P}' \mathfrak{A} \mathfrak{P} \tag{121}$$

Wir hatten früher (S.143) zwei Matrizen äquivalent („ ähnlich ") genannt, wenn eine Relation der Form $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ besteht. Jetzt haben wir den neuen Aequivalenzbegriff $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P}$. Beide Begriffe stimmen genau dann überein, falls $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^{-1}$, oder $\mathfrak{P}'\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathfrak{P}$ orthogonal.

Orthogonal sind die und nur die Kollineationen $\mathfrak{P}$, die $\mathfrak{E} = \sum_1^{n+1} (x^i)^2$ ungeändert lassen. In der Tat ! Die quadratische Form $\mathfrak{E}$ hat als Matrix die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$. Vermöge $\mathfrak{P}$ geht $\mathfrak{E}$ über in $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{P}'\mathfrak{E}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'\mathfrak{P}$; also in sich genau dann, wenn $\mathfrak{P}'\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$.

Es gilt nun der wichtige Satz:

I. Man kann jede reelle quadratische Form durch reelle orthogonale Transformation von gemischten Gliedern befreien. (Hauptachsentransformation der quadratischen Formen).

Dieser Satz ist in folgendem enthalten:

II. Jedes Büschel ist regulär, das ein nullteiliges Element enthält.

I folgt in der Tat aus II. Denn ist $\mathfrak{A}$ die gegebene Form, so ist das Büschel $\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{E}$ nach II regulär, da $\mathfrak{E}$ nullteilig ist. $\mathfrak{Q}$ sei eine Kollineation, die das Grundsimplex des

Büschels zum Koordinatensimplex macht, die also $\mathfrak{A}$ von gemischten Gliedern befreit. $\mathfrak{E}$ geht vermöge $\mathfrak{O}$ in eine Diagonalmatrix $\mathfrak{E}^*$ über, die nach dem Trägheitsgesetz nur positive Kooffizienten hat. Durch passende Wahl des Einheitspunkts wird $\mathfrak{E}^*$ mit $\mathfrak{E}$ identisch, d.h. $\mathfrak{O}$ führt $\mathfrak{E}$ in sich über, d.h. $\mathfrak{O}$ ist orthogonal.

Wir beweisen nun II.

Durch passende Koordinatenwahl können wir dem nullteiligen Element die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ zuweisen. Ist $\mathfrak{A}$ die Matrix eines weiteren Elements, so werden die ausgearteten Elemente bestimmt durch die Gleichung

$$(122) \qquad |\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{E}| = 0$$

Man nennt (122) eine <u>Säkulargleichung</u>; das ist also die charakteristische Gleichung einer symmetrischen Matrix. Wir beweisen: <u>Säkulargleichungen besitzen nur reelle Wurzeln.</u>

Ist λ eine Wurzel von (122), so kann man (x^i) so bestimmen, daß $\sum_{k=1}^{n+1}(a_{ik}-\lambda e_{ik})x^k = 0$ oder $\sum_{k=1}^{n+1} a_{ik}x^k = \lambda x^i$.

Ferner gilt dann: $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ik}\bar{x}^i = \bar{\lambda}\bar{x}^k$, denn $a_{ik} = a_{ki}$;

Also

$$\sum a_{ik}\bar{x}^i x^k = \lambda \sum \bar{x}^i x^i = \bar{\lambda}\sum \bar{x}^k x^k$$

Nun ist $\sum \bar{x}^i x^i = \sum \bar{x}^k x^k > 0$ weil nicht alle x^i verschwinden. Also $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. λ ist reell.

Ist nun λ irgendeine, notwendig reelle, Wurzel von (122) und $\mathfrak{x}$ der zugehörige, notwendig reelle Lösungsvektor von $(\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{E})\mathfrak{x} = 0$, so ist $\mathfrak{x}$ Grundpunkt; denn $\mathfrak{x}$ liegt nicht im Träger des Büschels, da $\mathfrak{g}$ als reeller Punkt dem nullteiligen Element nicht angehört. Auf der Graden ist damit unser Satz bereits bewiesen; denn dort ist die Existenz eines Grundpunkts mit der eines Grundsimplex, d.h. eines Grundpunktepaares äquivalent. Der Satz sei nun bis n-1 bewiesen, p sei die zum Grundpunkt $\mathfrak{g}$ gehörige gemeinsame Polarhyperebene. p schneidet das nullteilige Element $\mathfrak{e}$ wieder in einem nullteiligen Gebilde $\mathfrak{n}$. Im übrigen sind nur zwei Fälle möglich:

1) p liegt ganz in einem Element $\mathfrak{n}$.

2) p schneidet das Büschel in einem Büschel $\mathfrak{b}$.

Im ersten Fall bestimmen wir ein Polarsimplex s in p bezüglich $\mathfrak{n}$. Dann ist s auch Polarsimplex bezüglich $\mathfrak{e}$. Also ist in R_n $(\mathfrak{g}, s)$ ein Grundsimplex im Büschel. Im zweiten Fall trifft auf das Büschel $\mathfrak{b}$ die Induktionsvoraussetzung zu, denn $\mathfrak{b}$ enthält das nullteilige Element $\mathfrak{n}$. Also existiert ein Grundsimplex s von $\mathfrak{b}$, und $(\mathfrak{g}, s)$ ist wieder Grundsimplex des Büschel im R_n .-

Wir nehmen nun das Grundsimplex zum Koordinatensimplex und legen den Einheitspunkt wieder so, daß das nullteilige Element die Einheitsmatrix erhält. Dann erscheint das Büschel in der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n+1}(a_i-\lambda)(x^i)^2=0 \tag{123}$$

Die ausgearteten Elemente erhält man offenbar für $\lambda = a_i$.
Deshalb ist folgende Fallunterscheidung wichtig:

1) alle a_i sind verschieden.

2) unter den a_i kommen gleiche vor.

ad 1) $\lambda = a_i$ ($i = 1 \ldots, n+1$) liefert $n + 1$ verschieden ausgeartete Elemente. Da immer nur ein Koeffizient verschwindet, erniedrigt sich der Rang bei jedem ausgearteten Element nur um eins, d.h. der Scheitel ist stets nur ein Punkt. Es gibt also überhaupt nur $n + 1$ Grundpunkte; das Grundsimplex ist eindeutig bestimmt.

ad 2) o.B.d.A. nehmen wir an $a_1 = a_2$. Dann erniedrigt sich der Rang des Elements $\lambda = a_1$ um mindestens zwei. Es gibt höchstens n ausgeartete Elemente.

Das Grundsimplex ist in diesem Fall <u>nicht</u> eindeutig bestimmt; nämlich sicher nur bis auf die Kollineation K:

$$x^1 = y^1 \cos\alpha + y^2 \sin\alpha, \quad x^2 = -y^1 \sin\alpha + y^2 \cos\alpha, \qquad x^i = y^i \quad (i \geq 3)$$

K ist orthogonal, denn K führt $(x^1)^2 + (x^2)^2$ in sich über und läßt $x^3, \ldots, x^{n+1}$ ungeändert; also führt K $(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2$ in sich über, d.h. K ist orthogonal. Wegen $a_1 = a_2$ führt K aber auch (123) in sich über, transformiert also das Grundsimplex in ein Grundsimplex. (K ist natürlich nicht immer die allgemeinste Kollineation dieser Art, sondern nur wenn außer $a_1 = a_2$ keine Gleichheiten zwischen den a_i vorkommen.)

men diese Graden ein kartesisches Koordinatensystem ξ, η, in dem k (nichtausgeartet vorausgesetzt) eine Gleichung der Form erfüllt

$$a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 - 1 = 0$$

oder, wenn man $\frac{1}{a_1} = a^2$, $\pm \frac{1}{a_2} = b^2$ setzt, und annimmt, daß k nicht nullteilig ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \tag{124}$$

Vorzeichenvertauschung in ξ, η d.h. Spiegelung ~~mit~~ an den Achsen, führt k in sich über, und das sind die einzigen orthogonalen Transformationen von k in sich.

2. Ebene.

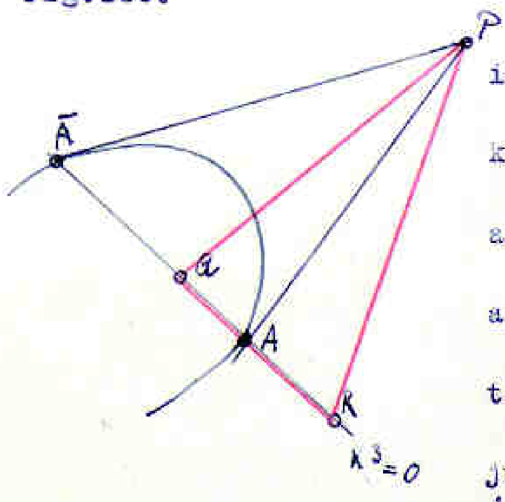
a) (123) liefert für Kegelschnittbüschel mit einem nullteiligen Element

$$(a_1 - \lambda)(x^1)^2 + (a_2 - \lambda)(x^2)^2 + (a_3 - \lambda)(x^3)^2 = 0 \tag{125}$$

Sind alle a_i verschieden, so enthält (125) drei Gradenpaare, deren Scheitelpunkte als Grundpunkte nicht im Träger liegen können. Sind also f,g zwei dieser Paare, so haben f,g vier Schnittpunkte, weil keine Grade ~~des anderen~~ eines Paares durch den Scheitelpunkt des anderen geht. Von diesen vier Punkten A,B,C,D liegen nicht drei auf einer Graden. Sie sind sämtlich Trägerpunkte (da zwei Elemente hindurchgehen); also kann es keinen weiteren Trägerpunkt geben, weil zwei verschiedene Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte allgemeiner Lage gemein haben. Da die Punkte auch auf dem nullteiligen Element liegen, ist keiner reell. Da mit jedem Trägerpunkt auch der konjugiert komplexe ein Trägerpunkt ist, müssen A B C D paarweise konjugiert komplex sein. Etwa $C = \bar{A}$, $D = \bar{B}$. Das Buschel hat also den Typ, der am Schluß von § 26 behandelt wurde.

Sind dagegen in (125) zwei a_i gleich, etwa $a_1 = a_2$, so kann nicht auch noch $a_3 = a_1$ sein, sonst wäre (125) kein Büschel, sondern enthielte nur den Kegelschnitt $\sum_1^3 (x^i)^2 = 0$. Dann liefert $\lambda = a_1$ die Doppelgrade $(x^3)^2 = 0$ und $\lambda = a_3$ liefert das Gradenpaar $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$. Der Träger besteht also (vergl.Fig.150) aus zwei konjugiert komplexen Punkten $A\ \bar{A}$ auf $x^3 = 0$.

Fig.150.



P, der Scheitel von $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$, ist zu allen Punkten von $x^3 = 0$ konjugiert in $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ als Scheitel, und in $x^3 = 0$, weil alle Punkte der Doppelgrade Scheitelpunkte auf ihr sind; also konjugiert in allen Elementen von (125) d.h. für alle nichtausgearteten Elemente von (125) ist P Pol von $A\ \bar{A}$. Da diese Punkte Trägerpunkte sind, müssen $P\ A$, $P\ \bar{A}$ Tangenten an alle Elemente sein, mit $A\ \bar{A}$ als Berührungspunkten. Sind Q, R irgendwelche reellen zu $A\ \bar{A}$ harmonische Punkte von $A\ \bar{A}$, so ist P Q R ein Grunddreieck des Buschels 125; es gibt also

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

∞^1 Grunddreiecke (Fig.150).

b) Wir wenden a) an auf die unendlich ferne Ebene e_∞ des euklidischen Raumes, mit dem Kugelkreis k_∞. Sei f_∞ der Schnitt einer nichtausgearteten Mittelpunktsfläche F zweiter Ordnung mit e_∞. Sei $P_\infty Q_\infty R_\infty$ ein Grunddreieck von $\lambda f_\infty + \mu g_\infty = 0$. Dann bilden $P_\infty Q_\infty R_\infty$ mit M, dem Mittelpunkt von F, ein Polartetraeder. Da überdies $P_\infty, Q_\infty, R_\infty$ zu k_∞ konjugiert liegen, sind MP_∞, MQ_∞, MR_∞ paarweise orthogonal, bestimmen also ein kartesisches Raumkoordinatensystem ξ, η, ζ. In ihm erhält F die Gleichung (Hauptachsentransformation der Mittelpunktsflächen 2.Ordnung):

$$a_1\xi^2 + a_2\eta^2 + a_3\zeta^2 + a_4 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(126) \qquad \pm\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} \pm \frac{\zeta^2}{c^2} \pm 1 = 0.$$

Wie in a) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1) a_1, a_2, a_3 sind verschieden

2) $a_1 = a_2 \neq a_3$.

(Für $a_1 = a_2 = a_3$ entsteht in e_∞ kein Büschel und F ist dann eine Kugel; k_∞ ist f_∞.)

Im ersten Fall spricht man von <u>dreiachsigen</u> Mittelpunktsflächen, im zweiten von <u>Rotationsflächen.</u> Im ersten Fall sind nach a) P_∞, Q_∞, R_∞ eindeutig, also auch die Hauptachsen von F. Seien nun $A_\infty; \bar{A}_\infty$, B_∞, $\bar{B}_\infty$ wie in a) die Trägerpunkte von $\lambda k_\infty + \mu f_\infty = 0$. Sei e irgendeine reelle Ebene durch die reelle Grade $A_\infty \bar{A}_\infty$. e schneide F in k. k geht durch

A_∞, $\overline{A}_\infty$, und das sind die Kreispunkte von e. Also ist k ein Kreis oder ein Gradenpaar. Da F Mittelpunktsfläche ist, wird F nicht von e_∞ berührt. Also liegt die Grade A_∞ $\overline{A}_\infty$ nicht ganz in F und durch diese Grade gehen genau zwei Tangentialebenen an F. Ist e von diesen beiden verschieden und besitzt einen reellen Schnittpunkt mit F, so ist k sicher im Kreis; entsprechendes gilt auch für die Ebenen durch B_∞ $\overline{B}_\infty$. Wir haben damit bewiesen:

<u>Auf jeder dreiachsigen Mittelpunktsfläche 2.Ordnung liegen zwei Scharen paralleler Kreise.</u>

Ist nun F Rotationsfläche, so hat nach a) f_∞ nur zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte A_∞, $\overline{A}_\infty$ mit k_∞. Nur die Ebenen durch $e_\infty = A_\infty$, $\overline{A}_\infty$ schneiden in Kreisen. Von dem Grunddreieck P_∞ ,Q_∞ ,R_∞ (Fig.150) ist nur P_∞ eindeutig bestimmt, Q_∞, R_∞ können auf e_∞ der Polaren von P_∞, laufen. Das bedeutet: Die Rotationsflächen F besitzen Drehungen in sich um eine bestimmte Achse (M P_∞) und besitzen eine Schar paralleler Kreise senkrecht zu dieser Achse. Die Existenz der Drehungen und der „ Breitenkreise " ist natürlich leicht direkt aus (126) abzulesen; dagegen lehrt uns die projektive Betrachtung, daß es keine anderen Drehungen und keine anderen Kreise auf F gibt, falls F keine Kugel ist. Ebenso lehrt die projektive Theorie: Ist F dreiachsig, so sind die Vorzeichenvertauschungen von ξ, η, ζ in (126) die einzigen orthogonalen Transformationen von F in sich.

Mit einigen Zusatzbetrachtungen kann man eine analoge Fallunterscheidung auch für Paraboloide, Kegel und Zylinder durchführen. Wir untersuchen im Folgenden nur die Kegel:

c) Metrik der Kegel 2. Ordnung.

Sei M der Scheitelpunkt des reellen Kegels F, und f_∞ sein Schnitt mit e_∞.

Legt man das kartesische System wie in b) fest, so erhält F eine Gleichung der Form

$$(127) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \zeta^2 = 0.$$

Man erkennt leicht, dass (127) nicht zu speziell ist.

Die Koordinatenebenen sind wieder Symmetrieebenen des Kegels. Im Fall $a \neq b$ sind die Spiegelungen an ihnen die einzigen orthogonalen Transformationen von F in sich. f_∞ schneidet dann k_∞ wieder vierpunktig und es existieren zwei Scharen paralleler Kreise auf F. Im Fall $a = b$ heißt F Rotationskegel und gestattet Drehungen um die ζ-Achse. Die Ebenen $\zeta = const$ und keine weiteren schneiden den Kegel in Kreisen.

§ 29.

Fokaltheorie der Kurven 2.Ordnung.

I. Dualisierung des Büschelbegriffs.

Ist $F(x^1 \cdots x^{n+1})$ eine quadratische Form und sind $u_1 \cdots u_{n+1}$ Hyperebenenkoordinaten im R_n, so stellt $F(u_1 \cdots u_{n+1}) = 0$ die Tangentialhyperebenen einer nichtausgearteten F_2 dar, falls $F(x^1 \cdots x^{n+1}) = 0$ eine nichtausgeartete F_2 ist. Allgemein wollen wir analog § 8 und § 15,II die Hyperebenen, die einer Gleichung vom Typ $F(u_1 \cdots u_{n+1}) = 0$ genügen, ein „Bündel 2.Ordnung" nennen.

Wir betrachten nun das von den Parametern λ, μ abhängige Bündel 2.Ordnung.

$$\Phi(u_1 \cdots u_{n+1}) = \lambda F(u) + \mu G(u) = 0$$

Die Gesamtheit Φ heiße „Schar" von Hyperflächen 2.Ordnung".
Sie ist dual zum Büschelbegriff. Also gilt: Jede Hyperebene
berührt entweder eine oder alle Flächen der Schar. Ebenso
gelten duale Analoga zu dem Satz, daß jedes Büschel von je-
dem linearen Unterraum R_k wieder in einem Büschel geschnit-
ten wird, außer wenn R_k ganz in einem Element liegt. Z.B. be-
stimmt die Schar in jedem Hyperebenenbüschel durch einen
R_{n-2} eine Schar von Hyperebenenpaaren, die je eine Fläche Φ
berühren; oder alle Ebenen des Büschels berühren dieselbe
Fläche. Anstelle der Grundpunkte treten Grundhyperebenen.
Dabei ist aber wie in § 8 und § 15,II zu beachten, daß die

ausgearteten Hyperebenenbündel 2.Ordnung nicht die Tangentialhyperebenen der ausgearteten Hyperflächen 2.Ordnung sind, sondern andere Gebilde.

Wir wenden diese Begriffe nun auf die Graden in der Ebene an.

II. Fokaltheorie der Kurven 2.Ordnung.

Nach S. 84 werden in kartesischen Linienkoordinaten die isotropen Graden durch $G = u_1^2 + u_2^2 = o$ dargestellt. Sei nun $F = o$ die Gleichung einer Hyperbel oder Ellipse in Linienkoordinaten. Wir betrachten die Schar

$$(180) \qquad F - \lambda G = o.$$

Nach § 28 kann man $F = o$ in Punktkoordinaten auf die Form bringen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o.$$

Also in Linienkoordinaten nach S.66:

$$a\, u_1^2 + b\, u_2^2 - u_3^2 = o$$

Die Schar (180) erhält also die Form

$$(181) \quad (a - \lambda)\, u_1^2 + (b - \lambda)\, u_2^2 - u_3^2 = o$$

Man nennt diese Schar die zu $F = o$ konfokalen Kurven 2.Ordnung. Nach S.66 hat die Schar in Punktkoordinaten die Gleichung

$$(182) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1.$$

Die ausgearteten Elemente können Büschelpaare sein oder

Doppelbüschel. Im Fall (181) erhält man sie (abgesehen von $G = o$) für $\lambda = a$ und $\lambda = b$. Nimmt man $a > b > o$ an, so ist $\lambda = a$ ein nullteiliges Büschelpaar, während $\lambda = b$ ein Büschelpaar mit reellen Trägerpunkten F_1, F_2 liefert. F_1, F_2 heißen die Brennpunkte von $F = o$. Ihre Gleichung ist

$(a-b)\, u_1^2 - u_3^2 = o$ oder für $\sqrt{a-b} = \epsilon$:

$$(c\, u_1 - u_3)\, (\epsilon\, u_1 + u_3) = o.$$

$F_{1,2}$ haben also die kartesischen Punktkoordinaten $x = \pm c$, $y = o$. Man kann F_1, F_2 auch synthetisch definieren. Sind t_1, t_2 die beiden isotropen Tangenten an $F = o$ durch den einen Kreispunkt I, so sind $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ die isotropen Tangenten an $F = o$ durch den anderen Kreispunkt J. $t_{1,2}, \bar{t}_{1,2}$ sind vier Graden, die $F=o$ und $G=o$ gemein haben; sie sind also die (paarweis konjugiert imaginären) Trägergraden der Schar (180); dual zu den vier Trägerpunkten eines regulären Büschels von Kurven 2.Ordnung. Die ausgearteten Büschelelemente waren die Verbindungsgradenpaare der Trägerpunkte. Die ausgearteten Scharelemente sind also die Schnittpunktepaare der Trägergraden. Reell unter ihnen sind $(t_1, \bar{t}_1)$ und $(t_2, \bar{t}_2)$. Das müssen F_1, F_2 sein; wie auch leicht durch Rechnung zu bestätigen. Die Brennpunkte sind also die Schnittpunkte konjugiert komplexer isotroper Tangenten. Sie liegen daher im Innern der Kurve. Wir wollen das Büschelpaar durch F_1, F_2 mit $H=o$ bezeichnen.

Wir betrachten nun das Gradenbüschel (P) durch einen reellen Punkt P. P sei von F_1, F_2 verschieden. Dann gehört P F zu G = o und nicht zu H=o, dagegen P F, zu H=o und nicht zu G=o. Also gehören nicht alle Graden (P) zum selben Element. (180) bestimmt also eine Schar von Gradenpaaren in P. Diese Schar ist regulär, da sie das nullteilige Element (P I, P J) enthält. Also gibt es durch P zwei reelle ausgeartete Gradenpaare, d.h. zwei doppeltzählende reelle Graden l,m, die zu allen anderen Paaren harmonisch liegen; insbesondere zu den isotropen (P I, P J). Also ist $l \perp m$. Ist h_1, h_2 irgendein Tangentenpaar von P an ein Scharelement, so halbieren l,m Winkel und Nebenwinkel von h_1, h_2, wegen $(l, m, h_1, h_2) = -1$ und $l \perp m$.

Ist h_1', h_2' ein weiteres Tangentenpaar durch P, so folgt daraus $\sphericalangle(h_1, h_1') = \sphericalangle(h_2, h_2')$ bei passender Bezeichnung.

Ausgeartet ist ein Tangentenpaar durch P an ein Scharelement $\Phi = o$ genau dann, wenn Φ durch P geht. Also gilt:

Durch jeden reellen Punkt P, außer den Brennpunkten, gehen zwei Kegelschnitte der konfokalen Schar; sie schneiden sich in P senkrecht. Die Tangenten l,m dieser Kegelschnitte in P halbieren Winkel und Nebenwinkel aller Tangentenpaare durch P an die nicht durch P gehenden Kegelschnitte der Schar.

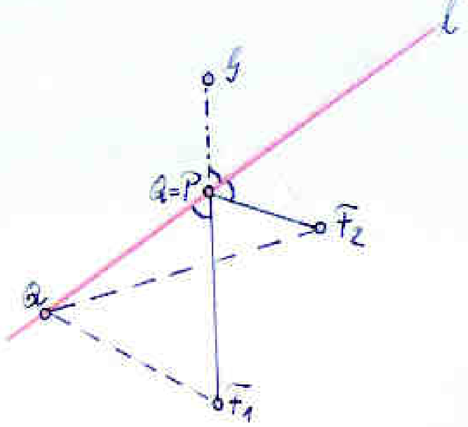
Die „ Brennstrahlen " P F_1, P F_2 sind nun ein solches Tangentenpaar. Nämlich an H=o. Somit gilt: Ist P ein Punkt eines Kegelschnitts $F=o$ mit den Brennpunkten F_1, F_2 und ist l die Tangente in P an $F=o$, so halbiert l entweder den Winkel oder den Nebenwinkel der Brennstrahlen $f_{1,2} = P.F_{1,2}$.

Aus Stetigkeitsgründen muß für alle Punkte von $F = o$ zugleich eine der Alternativen gelten. Nun besitzen die Hyperbeln zwei Punkte der Strecke $F_1 F_2$, während die Ellipsen diese Strecke nur auf ihrer Verlängerung treffen. Daraus folgt: Die Hyperbeltangente halbiert den Winkel der Brennstrahlen, die Ellipsentangente den Nebenwinkel. Hieraus folgt: Von den beiden Kegelschnitten eines Konfokalsystems, die durch jeden Punkt P der Ebene gehen, ist stets der eine eine Ellipse, der andere eine Hyperbel. Dabei ist die Strecke $F_1 F_2$ als Ellipse, deren beide Verlängerungen als eine Hyperbel aufzufassen. Abbildungen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln finden sich z.B. in Reye I, 15. Vortrag.

Aus diesen Winkeleigenschaften folgen die bekannten Fadenkonstruktionen der Ellipse und Hyperbel, die auf den Sätzen beruhen: bei der Ellipse, bezw. Hyperbel ist die Summe bezw. die Differenz der Brennstrahlen konstant.

Um diese Sätze zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß jene Größen stationär sind bei Fortschreiten längs der Ellipsen- bezw. Hyperbeltangente. Der Beweis hierfür werde für den Fall der Ellipse durchgeführt. Sei l die Tangente im Punkt P, Q ein laufender Punkt auf l, F_1, F_2 die Brennpunkte. Wir behaupten: $s = F_1Q + F_2Q$ hat an der Stelle $Q = P$ ein Minimum (übrigens kein weiteres). Wir spiegeln F_2 orthogonal an l; G sei der Spiegelpunkt. Dann ist $QF_2 = QG$, also $s = F_1Q + QG$. Dieser Streckenzug ist aber am kürzesten, wenn er keinen Knick hat, wenn also Q mit F_1G auf einer Graden liegt, d.h. $\sphericalangle(QF_1, l) = \sphericalangle(QG, l) = \sphericalangle(QF_2, l)$. Das ist aber grade für $Q = P$ erfüllt (Fig.200).

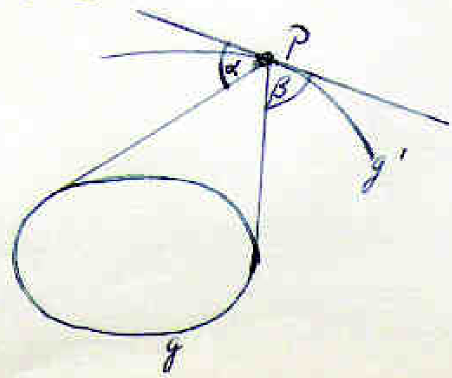
(Fig.200)



In analoger Weise folgt aus den Winkeleigenschaften die Konstruktion von <u>Graves</u> (Fig.201) Ein geschlossener Faden, der länger ist als eine gegebene Ellipse g, werde um g gelegt und in P straffgezogen. Dann beschreibt P eine zu g konfokale Ellipse g'.

Der Beweis folgt aus der Winkelgleichheit $\alpha = \beta$ in Fig.201; die genaue Durchführung geht am einfachsten mit Hilfe von Differentiationen.

(Fig.201)



Weitere Brennpunktseigenschaften sind abgeleitet bei <u>Reye, Bd.1</u> (in den Vorträgen „Brennpunkte der Kegelschnitte" und „konfokale Kegelschnitte" (14.,15. Vortrag).

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie II - 1929

Dort wird auch die Parabel mitbehandelt, die hier ausgeschlossen war. Ferner werden dort die Leitlinien, d.h. die Polaren der Brennpunkte, untersucht, die ebenfalls viele metrische Eigenschaften haben.

III. Fokaltheorie auf der Kugel und konfokale Kegel 2.Ordnung.

Noch einfacher als in der euklidischen Geometrie gestaltet sich die Fokaltheorie der Kurven 2.Ordnung in der elliptischen Geometrie. Das absolute Gebilde ist nullteilig. Ist $G=o$ seine Gleichung in Linienkoordinaten und ist $F=o$ die Gleichung irgendeines Büschels 2.Ordnung in Linienkoordinaten, so ist die Schar $F-\lambda G=o$ stets regulär. Sie besitzt im allgemeinen vier paarweise konjugiert komplexe Trägergraden, die zwei reelle Schnittpunkte, " Brennpunkte ", bestimmen. Nur im Fall gleicher Eigenwerte fallen die Trägergraden zu zwei doppeltzählenden zusammen und $F=o$ wird dann ein Kreis der elliptischen Metrik; die Brennpunkte fallen zusammen in den Kreismittelpunkt.

Ist $F=o$ kein Kreis, so ist die Fokaltheorie der euklidischen ganz analog. Durch jeden Punkt außer den Brennpunkten gehen zwei Kegelschnitte der Schar, sie durchschneiden sich dort senkrecht (im Sinne der elliptischen Metrik) und halbieren Winkel und Nebenwinkel der Brennstrahlen, sowie alle Tangentenpaare an die anderen Scharelemente.

Wie in § 28 erörtert, hat die unendlich ferne Ebene e_∞ des euklidischen Raums elliptische Geometrie; indem wir von einem endlichen reellen Raumpunkt P aus eine konfokale Schar in e_∞ projizieren, erhalten wir eine Schar konfokaler Kegel mit der Spitze P. Sie ist die Gesamtheit aller Kegel 2.Ordnung durch P, die 4 paarweise konjugiert komplexe isotrope Tangentialebenen haben (nämlich die projizierenden Ebenen der Trägergraden der Schar in e_∞). Die Kegelschar besitzt ein rechtwinkliges Symmetrie-Drei~~eck~~ kant durch P, (entsprechend dem Grunddreieck in e_∞), sowie in einer der Symmetrieebenen zwei Fokallinien, d~~en~~ie reellen Schnittgraden konjugiert komplexer Trägerebenen.

Schneidet man die Schar durch eine Kugel um P, so entsprechen die elliptischen Längen und Winkel den Längen und Winkeln der sphärischen Trigonometrie. Die Schnittkurven der Kegelschar mit der Kugel haben Analogie zum ebenen konfokalen System. Z.B. kann man jede solche Schnittkurve, analog der ebenen Ellipse, durch einen Faden erzeugen, der in den Brennpunkten (den Durchstoßpunkten der Fokallinien) befestigt ist und längs der Kugeloberfläche gleitend gestrafft wird.

Ist F=o ein elliptischer Kreis in e_∞, so erzeugt $F - \lambda G = o$ eine Schar von Rotationskegeln, in deren gemeinsame Axe die Fokallinien zusammenfallen.

In der euklidischen Ebene kann man das Kreispunktepaar nur zur Scharbildung, nicht zur Büschelbildung heranziehen, weil es nur in Linienkoordinaten sich als Gebilde zweiter Ordnung auffassen läßt. In der elliptischen Ebene, also auch in der Theorie der Kegel, ist dagegen das absolute Gebilde auch in Punktkoordinaten von 2.Ordnung. Neben die Scharbildung tritt also ~~durch~~ dual wieder die Büschelbildung; ein solches Büschel von Kegeln 2.Ordnung mit der Spitze P hat z.B. die Eigenschaft: durch jeden reellen Strahl durch P geht genau ein Element.

Bis auf zwei Ausnahmen wird jede reelle Ebene durch P von genau zwei Elementen berührt und die Berührungsstrahlen stehen in P aufeinander senkrecht.

§ 30.

Fokaltheorie der Flächen zweiter Ordnung.

Die Gesamtheit aller isotropen Ebenen des euklidischen Raums stellt nach S.127 und S. 137 einen ausgearteten Ebenenbündel 2.Ordnung dar. Seine Gleichung in kartesischen Ebenenkoordinaten lautet offenbar

$$G = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = o.$$

Ist F=o irgendeine nichtausgeartete Fläche 2.Ordnung in Ebenenkoordinaten, so heißen alle Flächen der Schar $F - \lambda G = o$ konfokal zu F=o.

Wir wollen annehmen, daß F=o reelle Mittelpunktsfläche und nicht Rotationsfläche ist. Dann läßt sich F=o in passenden kartesischen Koordinaten auf die Form bringen:

$$(190) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \; ; \quad a>o; \; a > b > c.$$

In Ebenenkoordinaten hat also F=o die Form (vergl.S.66)

$$a\,u_1^2 + b\,u_2^2 + c\,u_3^2 - u_4^2 = o$$

die mit F=o konfokale Schar hat also die Gleichung

$$(191) \quad (a-\lambda)\,u_1^2 + (b-\lambda)\,u_2^2 + (c-\lambda)\,u_3^2 - u_4^2 = o$$

Also in Punktkoordinaten

$$(192) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1.$$

Ausgeartete Bündel 2.Ordnung (außer G=o) liefert (191) für $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$. Wegen $a > b > c$ erniedrigt sich der Rang jeweils nur um eins; wir erhalten also Ebenen, die je einen Kegelschnitt berühren, die in den Ebenen $x=o$, $y=o$, $z=o$

liegen. Der Kegelschnitt $\lambda = a$ in $x = o$ ist offenbar nullteilig, dagegen sind die in $y = o$ und $z = o$ ($\lambda = b, \lambda = c$) reell, und zwar liegt in $z = o$ eine Ellipse, in $y = o$ eine Hyperbel; diese Kurven heißen Fokalellipse und Fokalhyperbel der Schar.

Jede reelle Ebene des Raums berührt genau ein Scharelement; denn die Trägerebenen gehören auch zu $G = o$, sind also nicht reell, da e_∞, die einzige reelle Ebene von $G=o$, nicht $F=o$ berührt.

Wir betrachten zweitens die Ebenenbüschel (g) mit reeller Achse g. Entweder gehört (g) ganz zu einem Scharelement; dann ist g Erzeugende dieses Elements, falls es nicht ausartet, oder falls es ausartet, (Fokalkurve), ist g Tangente desselben. Oder aber die Schar bestimmt in (g) eine Schar S von Ebenenpaaren. Da in S das Paar der isotropen Ebenen durch g vorkommt (Tangentialebenen an $G=o$) ist S regulär; also gibt es genau zwei reelle Doppelebenen l, m in S und diese liegen harmonisch zu allen Ebenenpaaren von S. Insbesondere zu dem Paar der isotropen Ebenen durch g; d.h. $l \perp m$. l,m halbieren also Winkel und Nebenwinkel aller übrigen Ebenenpaare von S. Seien L,M die Scharelemente, die l,m berühren. Damit l,m doppelt zählen, ist notwendig und hinreichend, daß g Tangente an L,M ist. Wir haben damit bewiesen: Jede reelle Grade g ist entweder Tangente einer Fokalkurve, oder Erzeugende eines nichtausgearteten Scharelements, oder g berührt genau zwei Scharelemente L,M; die zugehörigen Tangentialebenen l,m stehen aufeinander senkrecht und halbieren Winkel und Nebenwinkel aller Tangentialebenenpaare durch g an alle Scharelemente, die g nicht berührt.

Drittens betrachten wir das Ebenenbündel (P) durch irgendeinen reellen Punkt P. (P) liegt nicht ganz in einem Scharelement von (192), denn kein Element ist so stark ausgeartet, daß es ein ganzes Bündel enthält. Daher bestimmt (192) in (P) eine Schar K konfokaler Kegel. Sind die Kegel nicht sämtlich Rotationskegel, so gibt es in K drei Paare von Ebenenbüscheln, Deren Achsenpaare mögen (h_1,h_2) (l_1,l_2) (m_1,m_2) heißen. Sie spannen drei Ebenen h,l,m auf; diese sind die Symmetrieebenen von K, stehen also aufeinander senkrecht. Sind H,L,M die von h,l,m berührten Scharelemente, so muß P auf H, L,M liegen. Denn läge P etwa auf H nicht, so würde l zum Tangentialkegel von P an H gehören, also zu einem nichtausgearteten Kegel aus K, was nicht stimmt. Wir haben somit für jeden reellen Punkt P die Alternative bewiesen:

1) Durch P gehen genau drei Scharelemente. Sie schneiden sich in P senkrecht und ihre Tangentialebenen in P bilden das Symmetriedreikant jedes Tangentialkegels von P an ein nicht durch P gehendes Scharelement; diese Tangentialkegel sind konfokal.

2) Die Tangentialkegel von P aus sind sämtlich koaxiale Rotationskegel.

Im Fall 2) muß K ein doppeltzählendes Büschel von Ebenen enthalten; das durch die Rotationsachse a. Das geht ersichtlich genau dann, wenn P auf einer Fokalkurve liegt; die Achse ist dann die Tangente in P an die Kurve.

Also gilt: Der Tangentialkegel an einer nichtausgearteten Fläche 2.Ordnung F ist genau dann Rotationskegel, wenn seine Spitze auf einer Fokalkurve von F liegt.

Im Fall 1) sind die drei Fokallinienpaare $h_{1,2}$ $l_{1,2}$ $m_{1,2}$ von K offenbar die durch P gehenden Erzeugendenpaare von H,L,M. Da von diesen drei Paaren genau eins aus zwei reellen Graden besteht, so gilt: Von den drei Flächen H,L,M durch einen nicht auf einer Fokalkurve gelegenen Punkt P besitzt genau eine reelle Erzeugende; diese Fläche ist im allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid. Nur wenn P in der Ebene einer Fokalkurve k und in deren außerem liegt, sind die beiden Tangenten an k durch P jene reellen Fokallinien. Das Äußere der Fokalkurven in deren Ebenen ist also als Grenzfall eines einschaligen Hyperboloids der Schar aufzufassen.

Man kann allgemein zeigen, daß H,L,M ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid sind, falls P in keiner Symmetrieebene ~~liegt~~ (x=o; y=o; z=o) der Schar liegt. Hierzu betrachten wir (192) als Bestimmungsgleichung für λ bei gegebenen Koordinaten x, y, z von P. Läuft nämlich λ von $-\infty$ bis c, so besteht die linke Seite von (192) aus positiven Summanden und läuft von Null stetig bis $+\infty$. Es gibt also ein λ_1, so daß

$$(e)\quad \frac{x^2}{a-\lambda_1}+\frac{y^2}{b-\lambda_1}+\frac{z^2}{c-\lambda_1}=1\,; \quad a>b>c>\lambda_1 .$$

(e) ist ein Ellipsoid aus (192) durch P.

Lauft nun λ von c bis b, so lauft die linke Seite von (192) stetig von $-\infty$ bis $+\infty$; also existiert ein λ_2, so daß

$$(h_1)\quad \frac{x^2}{a-\lambda_2}+\frac{y^2}{b-\lambda_2}+\frac{z^2}{c-\lambda_2}=1\,; \quad a>b>\lambda_2>c.$$

(h_1) ist ein einschaliges Hyperboloid aus (192) durch P.

Aus demselben Grund existiert nun auch ein λ_3, so daß

$$(h_2)\quad \frac{x^2}{a-\lambda_3}+\frac{y^2}{b-\lambda_3}+\frac{z^2}{c-\lambda_3}=1 \quad a>\lambda_3>b>c$$

(h_2) ist ein zweischaliges Hyperboloid aus (192) durch P. Da es mehr als drei Flächen durch P nicht gibt, ist unsere Aussage bewiesen. $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ wurde dabei benutzt.

Man nennt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die elliptischen Koordinaten von P. Sie sind jedem Raumpunkt – jedenfalls jedem außerhalb $x=0$ bezw. $y=0$ bezw. $z=0$ – eindeutig zugeordnet, und wie die kartesischen Koordinaten haben sie die Eigenschaft, daß die Flächen $\lambda_1 = const$, $\lambda_2 = const$, $\lambda_3 = const$ (Ellipsoide, einschalige bezw. zweischalige Hyperboloide) einander paarweise senkrecht schneiden. /= Zur räumlichen Anordnung dieser Flächen vergleiche man die Modelle Nr. 27–30, Fach 35 unserer Sammlung.

/= Analog kann man elliptische Koordinaten in der Ebene und auf der Kugel einführen.

Die elliptischen Koordinaten spielen eine Rolle in der Metrik der Flächen 2.Grades. Wie in der Ebene folgen nämlich aus den Winkelrelationen sofort Längenrelationen. Diese sind aber im Raum wesentlich komplizierter.

Aus der Theorie der Ebenenbüschel im Konfokalsystem hat Jakobi die geodätischen Linien der Flächen 2.Ordnung bestimmt.

Aus der Theorie der Ebenenbündel im Konfokalsystem gewann Staude seine Fadenkonstruktionen des Ellipsoids.

Stellt man sich die Kurven bezw. Flächen zweiter Ordnung aus spiegelndem Material vor, so kann man die Winkelrelationen als Aussagen über Lichtbrechung formulieren. Daher die Namen Brennpunkt, Fokalkurve, usw.

Endlich kommen die Fokaleigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung in der Potentialtheorie zur Geltung.

===========