St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Analytische Geometrie I

Cohn-Vossen

Sommer 1929, 4 st.

Mathematisches Institut der Universität Göttingen

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel.

Affine Geometrie.

II. Kapitel.

Elemente der Euklidischen Metrik.

III. Kapitel.

Kreise und Kugeln.

IV. Kapitel.

Kurven und Flächen 2. Ordnung in affiner Behandlung.

Anhang.

I. Lineare Gleichungen.

II.

III.

Literatur : Kowalewski, : Analytische Geometrie.
Reye: Geometrie der Lage . (synthetisch)
Runge: Vektoranalysis. (f.d. ersten Stunden.)

Vorbemerkung.

Die analytische Geometrie betrachtet nicht einzelne Figuren, sondern den Raum bzw. die Ebene in ihrer Gesamtheit. Indem sie geometrische durch Zahlbeziehungen ersetzt, erleichtert sie, praktisch, das Auffinden dieser Beziehungen und macht sie, theoretisch, von der Anschauung unabhängig.

Im folgenden wird ~~xxxx~~ sogleich Raumgeometrie, nicht erst Planimetrie getrieben, weil manche grundlegenden Sätze der Planimetrie durch räumliche Betrachtungen bewiesen werden.

I. Affine Geometrie.

§ 1. Affine Begründung der Vektorlehre.

(Affinität operiert mit Punkt, Gerade, Ebene. Sie kennt Schnitt und Parallelismus. Sie kennt aber keine Längen und Winkel. Es gibt Transformationen (§§ 2,3), die die ~~Lösungen~~ Längen und Winkel ändern, aber alle affinen Beziehungen aufrechterhalten. (Modell))

Paralleldefinitionen.

1. Definition:

Zwei Geraden sind einander parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden.

2. Definition:

Zwei Ebenen sind einander parallel, wenn sie sich nicht schneiden.

3. Definition:

Eine Gerade und eine Ebene sind parallel, wenn sie sich nicht schneiden.

Euklidisches Parallelenaxiom: Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden eine und nur eine Parallele.

Definition: Jedes Punktepaar A B (Raum od. Ebene; Reihenfolge der Punkte ist wichtig) heisst ein Vektor

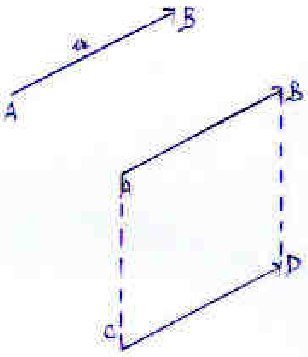


Fig. 1

Zwei Vektoren AB und CD heissen gleich, wenn

AB || CD und AC || BD

Daher können wir einen Vektor AB von einem beliebigen Punkt C „abtragen" d.h. D so bestimmen, dass AB=CD

. D ist eindeutig bestimmt.

Zusatz: Aus AB=CD folgt AC=BD.

Fundamentalsatz: Sind zwei Vektoren ~~dem~~ einem dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

B e w e i s .

Voraussetzung: AB=CD und AB=EF.

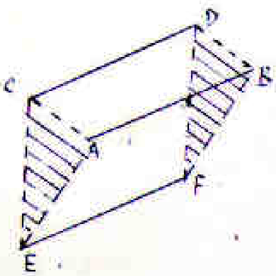


Fig. 2

Behauptung: CD = EF

1.) Annahme: AB, CD, EF nicht koplanar (nicht in einer Ebene). Ich benutze den Satz (noch zu beweisen): Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel. Da AB || CD und AB || EF , ist also auch EF || CD.

Weiterhin benutze ich den Satz (noch zu beweisen): Zwei Ebenen, die durch parallele Geradenpaare aufgespannt sind, sind parallel.

Da DB || CA und AE // BF (nach Voraussetzung) sind also die Ebenen BDF und ACE parallel. Wären nun CE und DF, die beide in der Ebene DCEF liegen, nicht parallel, so hätten sie einen Schnittpunkt. Da sie aber auch in den Ebenen CAE und DBF liegen, müssten diese sich schneiden. Das ist der Parallelität wegen nicht möglich. Es ist also

C E || D F

da nun auch die Beziehung

E F || C D

besteht, folgt

E F = C D .

2. Annahme. AB, CD, EF komplanar. Ich zeichne einen vierten gleichen Vektor GH, der nicht in der Ebene CAEFBD liegt. Da CD = AB und AB = GH, ist nach obigem Beweis CD=GH. Aus den letzten beiden Relationen folgt aber (wieder nach obigem Beweis)

CD = EF q. e. d.

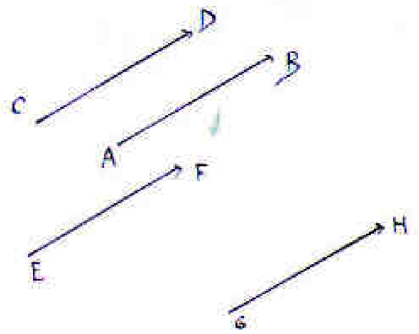


Fig 3.

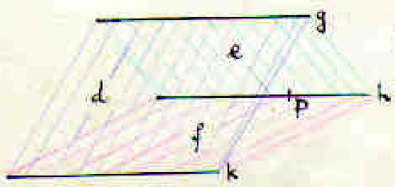
3. Annahme. AB, CD, EF kollinear. Beweis dem vorigen entsprechend mit einem Hifsvektor mehr.

Nachtrag 1: Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so auch untereinander.

Beweis. Voraussetzung: g || h und g || k.

Behauptung: h || k

Punkt P auf h . Ich lege Ebenen (g, h, k nicht komplanar, sonst ist nichts zu beweisen):



e = e(P,g)

f = f(P,k)

Fig 4

Ich beweise nun: die Schnittgerade $h(e,f)$ ist $\parallel g$ (also mit h identisch) und $\parallel k$.

Ich lege die Hilfsebene $d(g,k)$.

Wäre $h(e,f)$ nicht $\parallel k$, so gäbe es einen Schnittpunkt $Q(h,k)$, der in den Ebenen e,f und d läge.

$$Q(h,k) = Q(e,f,d)$$

Das bedeutete aber auch $Q = Q(g,k)$, entgegen der Voraussetzung $g \parallel k$. Ebenso folgt $h(e,f) \parallel g$. Also

$$\underline{\underline{h \parallel k}}$$

<u>Nachtrag 2.</u> Werden zwei Ebenen aufgespannt durch zwei parallele Geradenpaare, so sind sie parallel.

Voraussetzung: $g_1 \nparallel h_1$ und $g_2 \nparallel h_2$

$g_1 \parallel g_2$ $\quad$ $h_1 \parallel h_2$

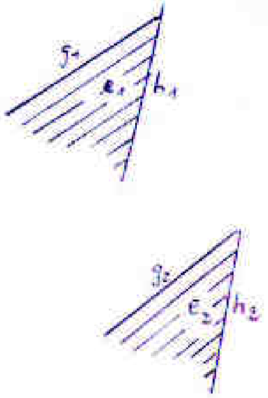


Fig 5

Behauptung: $e_1(g_1, h_1) \parallel e_2(g_2 h_2)$.

Wären e_1 und e_2 nicht parallel, so gäbe es eine Schnittgerade $\ell(e_1 e_2)$

Es würde sein (nach dem vorigen Beweis)

$\ell \parallel g_1 \qquad \ell \parallel g_2$

und

$\ell \parallel h_1 \qquad \ell \parallel h_2$

Daraus folgte nach dem vorigen Satz:

$g_1 \parallel h_1$ und $g_2 \parallel h_2$, was durch die Voraussetzung widerlegt wird.

Addition von Vektoren.

<u>Definition:</u> $(a + b)_P = PR$

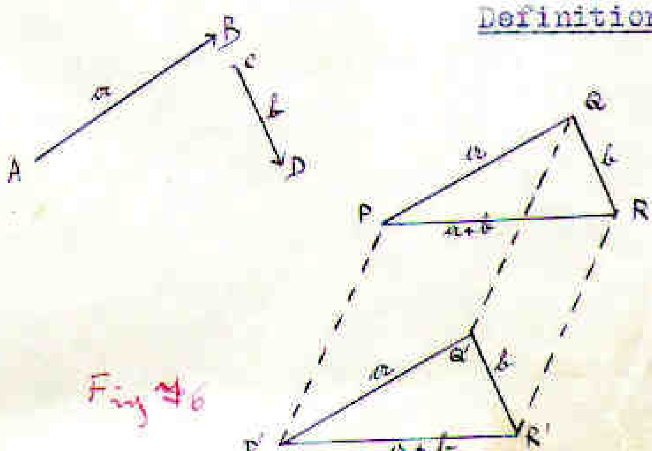


Fig 6

Satz : $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_P = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{P'}$ d.h. die Konstruktion ist unabhängig vom Ausgangspunkt.

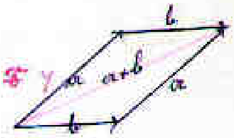
Beweis: Es ist PQ = P'Q' daraus folgt PP' = QQ'

analog QR = Q'R' " " QQ' = RR'

also: PP' = RR' nach dem Fundamentalsatz. Also PR=P'R'
q.e.d.

Rechenregeln:

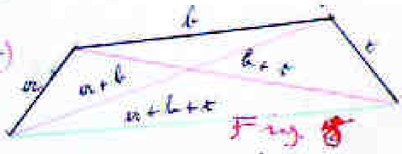
1) kommutatives Gesetz: Fig. ~~8~~ 7



(Beweis durch Parallelogrammkonstruktion)

2) Assoziatives Gesetz:

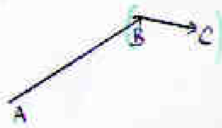
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$$



(Beweis klar) Fig. 8

3) Nullvektor: $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ (Definition)

Vektor 0 gesucht.

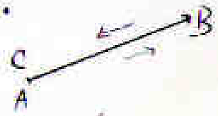


Lösung: Vektor 0: Anfangspunkt = Endpunkt.

Fig ~~10~~ 9

4) Subtraktion: $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{o}$; $\mathfrak{x}$ gesucht.

Lösung: $\mathfrak{x} = -\mathfrak{a}$ = -AB = BA



5) $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$ (Definition) Fig 10

Es folgt, wenn

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

$$\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{b} = \underline{\mathfrak{c} - \mathfrak{b}}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

1) n sei ganze Zahl

α) $n > 0$

$n\mathfrak{a} = \underbrace{\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \cdots \mathfrak{a}}_{n \text{ Summanden}}$ (Figur 11 für $n=4$)

β) $n = 0$, $n\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

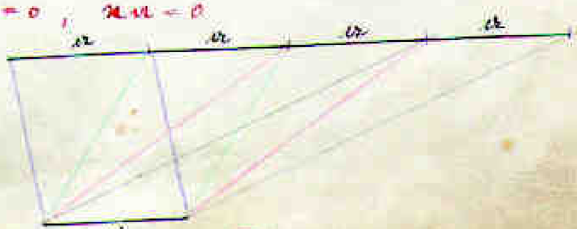
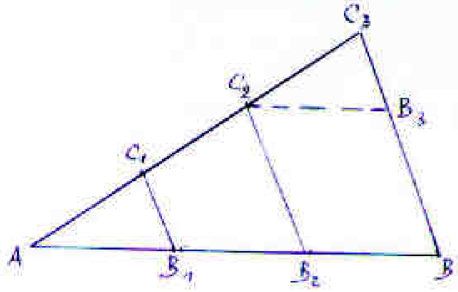


Fig. 11



1) $n<0$; $n\,a + (-n\,a) = 0$

also

$(-n).a = -(na) = \underline{n(-a)}$

2) $n = \frac{p}{q}$ (gekürzter Bruch)

(Fig. für $q = 3$, $p = 1$)

Fig 12

Beweis der Teilungskonstruktion: Wir ziehen die Parallele zu $A\,C_3$ durch B_1. Sie schneide C_3B in B_3. Dann ist:

$$\cancel{C1B1 = C3B3} \quad C_1B_1 = C_3B_3$$

Weiterhin ist

$$AB_1 + B_1C_1 = AC_1 \quad \text{und} \quad C_2B_3 + B_3C_3 = C_2C_3$$

Da aber $A\,C_1 = C_2C_3$ ist, gilt:

$$AB_1 + B_1C_1 = C_2B_3 + B_3C_3$$

Es ist

$$C_1B_1 = C_3B_3$$

deshalb

$$AB_1 = C_2B_3$$

Es ist also auch $C_2B_3 \parallel B_2B$

Da nun auch $C_2B_2 \parallel B_3B$, so gilt die Beziehung

$$C_2B_3 = B_2B$$

da aber auch $C_2B_3 = AB_1$ ist

so gilt

$$\underline{AB_1 = B_2B} \quad q.e.d.$$

Entsprechend kann man auch beweisen: $AB_1 = B_1B_2$. —

Rechenregel: Für alle rationalen r_1, r_2 gilt

$$r_1 a + r_2 a = (r_1 + r_2) a$$

Beweis: Man bringe r_1, r_2 auf denselben Nenner.

3) λ sei irrational. Dann seien λ_n rationale Zahlen, ($\lambda_n \to \lambda$, $AB_n = \lambda_n a$)

sei B Häufungspunkt der λ_n. Dann definieren wir $\underline{AB = \lambda a}$,

Beispiel: $\lambda = \sqrt{2} = 1{,}4142$

$$AB_1 = 1{,}4\,a, \quad AB_2 = 1{,}41\,a \ldots, \quad AB_4 = 1{,}4142\,a$$

$$AB = \sqrt{2}\,a$$

Folgerungen: 1) für beliebig reelle λ_1, λ_2 gilt

$$\lambda_1 \mathfrak{a} + \lambda_2 \mathfrak{a} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{a}$$

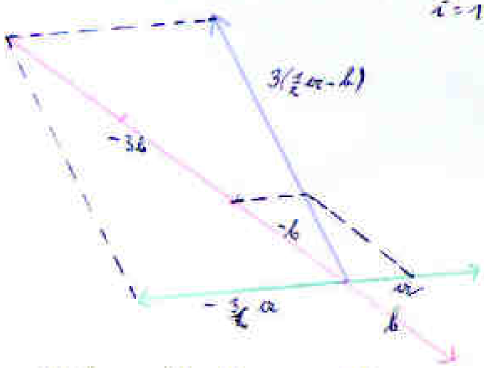
Beweis: Dies gilt für alle rationalen Näherungszahlen der λ_1, λ_2 .

2) sei $\mathfrak{AB} = \mathfrak{a}$, C auf der Geraden AB . Dann kann man λ so bestimmen, dass $AC = \lambda \mathfrak{a}$. Denn betrachtet man die Vektoren $AC_r = r\,\mathfrak{a}$ für alle rationalen r , so liegen die C_r auf der Geraden AB überall dicht (Stetigkeitsaxiom).

Linearer Vektorausdruck Einführung des Summenzeichens.

$$\lambda^1 \mathfrak{a}_1 + \dots \lambda^n \mathfrak{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mathfrak{a}_i$$

(obere Indizes keine Potenz-Exponenten)



$3(\frac{1}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \frac{3}{2}\mathfrak{a} = -3\mathfrak{b}$

Fig. 13.

Es gilt (Fig. 13)

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mathfrak{a}_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu^i \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \cancel{(\alpha+\beta)}(\alpha\lambda^i + \beta\mu^i)\,\mathfrak{a}_i$$

In dieser Formel sind alle bisher abgeleiteten Regeln enthalten.

§ 2. Lineare Abhängigkeit von Vektoren im Raum.- Affine Koordinaten.- Affine Transformationen.

Definition: Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ heissen linear abhängig, wenn $\lambda^1\mathfrak{a}_1 + \dots + \lambda^n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ gilt, ohne dass alle λ^i gleich Null sind; sonst heissen sie linear unabhängig. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ sind also linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mathfrak{a}_i = 0$ folgt, dass $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$

Wir ~~betrachten~~ interpretieren jetzt geometrisch die lineare Abhängigkeit bestimmter Anzahlen von Vektoren. n sei dabei die Anzahl.

I a) $n = 1$ $\qquad \mathfrak{a} = 0$

In Worten: Ein Vektor ist linear abhängig, heisst: er verschwindet. Es soll nämlich $\lambda \mathfrak{a} = 0$ gelten, und da $\lambda \neq 0$ ist, so muss $\mathfrak{a}$ gleich Null sein.

II a) $n = 2$ $\qquad \mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2$

Wenn zwei Vektoren linear abhängen, sind sie parallel.

Es muss gelten: $\lambda^1 \mathfrak{a}_1 + \lambda^2 \mathfrak{a}_2 = 0$

Fall 1: $\lambda^1 \neq 0 \quad \lambda^2 \neq 0$

Dann ist $\mathfrak{a}_1 = -\dfrac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathfrak{a}_2$, also $\mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2$ nach § 1.

Fall 2: $\lambda^1 \neq 0, \ \lambda^2 = 0$

Es ist dann $\mathfrak{a}_1 = 0$. Der Nullvektor hat keine eigentliche Richtung. Wir definieren ihn als zu jedem beliebigen Vektor parallel. (Entsprechend für den Fall $\lambda^1 = 0, \lambda^2 \neq 0$)

III a) $n = 3$ $\qquad \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind koplanar.

Wenn drei Vektoren linear abhängen, sind sie einer Ebene parallel.

Fall 1 : Alle $\lambda^i \neq 0$

Dann ist

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{\lambda^2}{\lambda_1}\mathfrak{a}_2 - \frac{\lambda^3}{\lambda_1}\mathfrak{a}_3$$

Das bedeutet aber: Der Vektor $\mathfrak{a}_1$ ist die Summe aus einem Vektor $\parallel \mathfrak{a}_2$ und einem Vektor $\parallel \mathfrak{a}_3$. Der Vektor $\mathfrak{a}_1$ lässt sich also mit $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ in dieselbe Ebene legen.

Fall 2 : Ein λ^i sei gleich Null. (etwa λ^1).

Dann heisst die Bedingung :

$$\lambda^2 \mathfrak{a}_2 + \lambda^3 \mathfrak{a}_3 = 0$$

also $\mathfrak{a}_2 \parallel \mathfrak{a}_3$,

also $\mathfrak{a}_3 \parallel e(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$

Fall 3: Zwei λ^i seien gleich Null. (Etwa λ^1, λ^2)

Dann heisst die Bedingung $\lambda^3 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$ d.h.

$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$; $\mathfrak{a}_3 \parallel e(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$

Diese drei Sätze (Ia, IIa und IIIa) können auch umgekehrt werden. Die Richtigkeit der Umkehrsätze ist nicht trivial, sondern beruht auf der Ueberlegung von § 1 Ende.

I b) Wenn ein Vektor verschwindet, ist er linear abhängig.

Denn ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, so ist auch $\lambda \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ $(\lambda \neq 0)$

II b) Wenn zwei Vektoren parallel sind, sind sie linear abhängig. $\mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2$ Also existiert nach § 1 eine Zahl μ, sodass $\mathfrak{a}_1 = \mu \mathfrak{a}_2$ oder $\mathfrak{a}_1 - \mu \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$

$(\lambda^1 = 1, \ \lambda^2 = -\mu)$.

III b) Wenn drei Vektoren einer Ebene parallel liegen, sind sie linear abhängig.

d.h.: „$\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\mathfrak{a}_3$ sind koplanar" ist gleichbedeutend mit $\lambda^1 \mathfrak{a}_1 + \lambda^2 \mathfrak{a}_2 + \lambda^3 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$.

Beweis: Es genügt, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ linear unabhängig, also nicht parallel, anzunehmen, denn sonst ist nichts zu beweisen.

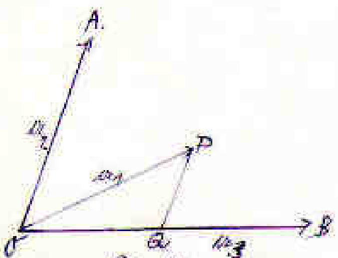


Fig. 14.

Dann sei OP der Vektor $\mathfrak{a}_1$ (Fig 14)

OA " " $\mathfrak{a}_2$

OB " " $\mathfrak{a}_3$ $(\nparallel \mathfrak{a}_2 !)$

Ich ziehe durch P die Parallele zu $\mathfrak{a}_2$. Sie schneide $\mathfrak{a}_3$ im Punkte Q. Es ist dann bei passendem μ^3, μ^2:

$$OQ = \mu^3 \mathfrak{a}_3 \; ; \quad \text{und} \quad QP = \mu^2 \mathfrak{a}_2 \qquad (\S 1)$$

$$OP = OQ + QP$$

d.h.

$$\mathfrak{a}_1 = \mu^2 \mathfrak{a}_2 + \mu^3 \mathfrak{a}_3$$

oder

$$\mathfrak{a}_1 - \mu^2 \mathfrak{a}_2 - \mu^3 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

Die Bedingung für lineare Abhängigkeit ist also erfüllt.

<u>μ^2 und μ^3 sind eindeutig bestimmt.</u>

Angenommen, es gäbe **noch** eine zweite Darstellung

$$\mathfrak{r}_1 = \sigma^2 \mathfrak{r}_2 + \sigma^3 \mathfrak{r}_3$$

Wir subtrahieren sie von der Gleichung

$$\mathfrak{r}_1 = \mu^2 \mathfrak{r}_2 + \mu^3 \mathfrak{r}_3 \quad \text{und gibt}$$

$$0 = (\mu^2-\sigma^2)\,\mathfrak{r}_2 + (\mu^3-\sigma^3)\,\mathfrak{r}_3$$

Wenn nicht beide Klammern verschwänden, müssten $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ linear abhängen, d.h. $\mathfrak{r}_2 \parallel \mathfrak{r}_3$. Das soll aber nicht der Fall sein, also ist jede Klammer gleich Null;

$$\mu^2 = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \mu^3 = \sigma^3 \qquad \text{q. e. d.}$$

~~q.e.d.~~

IV b ~~III c)~~ n = 4.

<u>Vier Vektoren sind immer linear abhängig.</u> (Grundlage des affinen Raumkoordinatenbegriffs)

$\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ seien vier Vektoren. Wenn $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ linear abhängen, ist nichts mehr zu beweisen. Wir betrachten also den Fall, dass $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{r}_3$ nicht linear abhängen, d.h. ~~keiner~~ nicht derselben Ebene parallel sind.

~~Dann ist~~

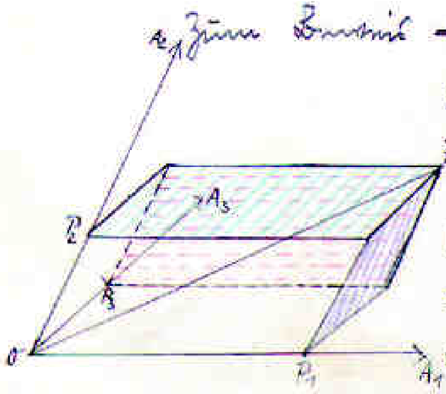


Fig. 15.

Zum Beweis ~~Wir~~ zeichnen wir von einem Punkt O aus die Vektoren $\mathfrak{r} = OP$, $\mathfrak{r}_1 = OA_1$, $\mathfrak{r}_2 = OA_2$ und $\mathfrak{r}_3 = OA_3$. Wir legen durch P eine Ebene parallel zu der Ebene, die durch $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ aufgespannt wird. Sie schneide OA_1 in P_1; die Parallelebene durch P zur Ebene, die durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ aufgespannt wird, schneide OA_2 in P_2; die Parallelebene durch P zur Ebene, die durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ aufgespannt wird, schneide OA_3 in P_3.

Dann ist $\underline{OP_1 + OP_2 + OP_3 = OP}$ (das kann man sich leicht an dem Quader klar machen, der durch die drei durch P gelegten Ebenen und die Ebenen :

e$(O A_1 A_2)$ f$(O A_2 A_3)$ g$(O A_3 A_1)$ bestimmt wird. (Fig. 15)

Da aber folgende Beziehungen gelten: (§ 1 früher)

$$OP_1 = x^1 \mathfrak{a}_1$$
$$OP_2 = x^2 \mathfrak{a}_2$$
$$OP_3 = x^3 \mathfrak{a}_3$$

so ist $\mathfrak{a} = x^1 \mathfrak{a}_1 + x^2 \mathfrak{a}_2 + x^3 \mathfrak{a}_3$

Vier Vektoren sind also immer linear abhängig.

<u>Die Darstellung ist eindeutig</u>, denn aus

$$\mathfrak{a} = x^1 \mathfrak{a}_1 + x^2 \mathfrak{a}_2 + x^3 \mathfrak{a}_3$$
$$\underline{\mathfrak{a} = y^1 \mathfrak{a}_1 + y^2 \mathfrak{a}_2 + y^3 \mathfrak{a}_3}$$
$$0 = (x^1 - y^1)\mathfrak{a}_1 + (x^2 - y^2)\mathfrak{a}_2 + (x^3 - y^3)\mathfrak{a}_3$$

folgt wie in II b, weil $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ linear unabhängig sind :

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3 .$$

Obige Konstruktion führt unmittelbar zur Einführung der <u>affinen Koordinaten im Raum</u>.

O heisst <u>Anfangspunkt</u>, die Geraden OA_1, OA_2, OA_3 heissen die <u>Achsen</u> des Systems; $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3$ die <u>Grundvektoren</u>; A_1, A_2, A_3 die <u>Einheits~~vektoren~~-oder Grundpunkte</u>; $(O, A_1 A_2)$ $(O, A_2 A_3)$ $(O, A_3 A_1)$ die <u>Koordinatenebenen</u>.

P sei nun irgend ein Punkt. Wir definieren: P hat die Koordinaten x^1, x^2 und x^3 in unserem Koordinatensystem, wenn $OP = x^1\mathfrak{a}_1 + x^2\mathfrak{a}_2 + x^3\mathfrak{a}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{a}_i$ ist.

Das affine Koordinatensystem zerlegt den Raum in 8 Oktanten, d.h. der Raum wird durch die drei Koordinatenebenen in 8 Gebiete geteilt, in denen je eine Vorzeichenkombination der Koordinaten herrscht.

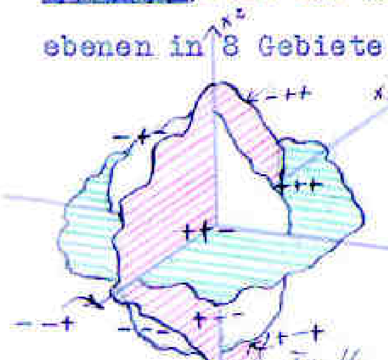


Fig. 16

In den Punkten jeder Koordinatenebene verschwindet eine Koordinate (z.B. $x^1 = 0$ in $0\, A_2\, A_3$), also in den Punkten jeder Achse verschwinden je zwei Koordinaten (z.B. $x^1 = x^2 = 0$ in $0\, A_3$), also in 0 verschwinden alle drei ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$).

Koordinaten einer Strecke PQ.

Es ist $PQ = OQ - OP$ (denn $OQ - OP = OQ + PO = PO + OQ = PQ$)

Q habe die Koordinaten $y^1\ y^2\ y^3$

P " " " $x^1\ x^2\ x^3$

Es ist
$$OQ = \sum_{i=1}^{3} y^i \mathfrak{a}_i$$
$$OP = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{a}_i$$
$$PQ = OQ - OP = \sum_{i=1}^{3} y^i \mathfrak{a}_i - \sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{3} (y^i - x^i)\, \mathfrak{a}_i$$

Als Koordinaten der Strecke PQ bezeichnen wir daher $y^1 - x^1$; $y^2 - x^2$; $y^3 - x^3$. Ebenso heissen v^1, v^2, v^3 die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{v}$, wenn

$$\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \mathfrak{a}_i$$

Affine Koordinatentransformation.

Wie verändern sich die Koordinaten beim Übergang zu einem neuen System?

Es seien ($O, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$) und ($O', \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}'_3$) zwei Koordinatensysteme. ($O, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$) sei das ursprüngliche; ($O', \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}'_3$) das neue. O' habe im alten System die Koordinaten ~~x~~ t^i (d.h. t^1, t^2, t^3), $\mathfrak{a}'_k$ habe im alten System die Koordinaten a_k^i (a_k^1, a_k^2, a_k^3,)

P sei ein beliebiger Punkt. Es ist

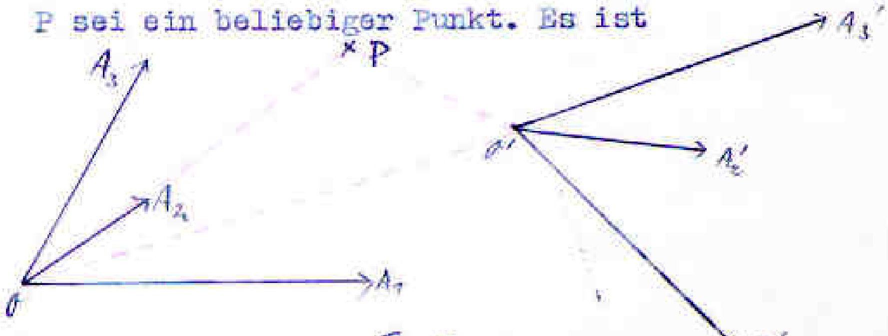


Fig 17

$$OP = OO' + O'P$$

$$OP = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{a}_i$$

$$OO' = \sum_{i=1}^{3} t^i \mathfrak{a}_i$$

$$O'P = \sum_{k=1}^{3} x^{k'} \mathfrak{a}'_k \qquad = \sum_{k=1}^{3} x^{k'} \sum_{i=1}^{3} a_k^i \mathfrak{a}_i$$

$$= x^{1'}(a_1^1 \mathfrak{a}_1 + a_1^2 \mathfrak{a}_2 + a_1^3 \mathfrak{a}_3)$$
$$+ x^{2'}(a_2^1 \mathfrak{a}_1 + a_2^2 \mathfrak{a}_2 + a_2^3 \mathfrak{a}_3)$$
$$+ x^{3'}(a_3^1 \mathfrak{a}_1 + a_3^2 \mathfrak{a}_2 + a_3^3 \mathfrak{a}_3)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{3} x^{k'} a_k^1\right)\mathfrak{a}_1 + \left(\sum_{k=1}^{3} x^{k'} a_k^2\right)\mathfrak{a}_2 + \left(\sum_{k=1}^{3} x^{k'} a_k^3\right)\mathfrak{a}_3$$

Es folgt: $\sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{3} t^i \mathfrak{a}_i + \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} x^{k'} a_k^i\right)\mathfrak{a}_i$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left(t^i + \sum_{k=1}^{3} x^{k'} a_k^i\right)\mathfrak{a}_i$$

Also wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung:

$$\underline{x^i = t^i + \sum_{k=1}^{3} a_k^i x^{k'}}$$

Durch dieses Gleichungssystem sind die Koordinaten x^i ~~des~~ im ersten System~~s~~ ausgedrückt durch die Koordinaten $x^{k'}$ des zweiten Systems. Ausgeschrieben heisst das System

$$\text{I} \qquad \begin{aligned} x^1 &= t^1 + a_1^1 x^{1'} + a_2^1 x^{2'} + a_3^1 x^{3'} \\ x^2 &= t^2 + a_1^2 x^{1'} + a_2^2 x^{2'} + a_3^2 x^{3'} \\ x^3 &= t^3 + a_1^3 x^{1'} + a_2^3 x^{2'} + a_3^3 x^{3'} \end{aligned}$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Der bisherigen " passiven"Deutung der Formeln (I) steht folgende "aktive" gegenüber : Der ganze Raum werde so deformiert, dass jeder Punkt ($x^{i'}$) in (x^{i}) übergeht, wo die (x^{i}) gemäss (I) aus den ($x^{i'}$) hervorgehen. Das System ($O A_1 A_2 A_3$) geht dabei in ($O' A'_1 A'_2 A'_3$) über (man beachte das verschränkte Auftreten der gestrichenen und ungestrichenen Grössen !).

Eine Transformation heisst <u>affin</u>, wenn sie punkttreu ist, Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen und Parallelen in Parallelen überführt. Beispiel : Die Bewegungen des Raumes als Ganzen.

Wir werden (S.33) beweisen, dass die Formeln (I) bei aktiver Deutung eine affine Transformation darstellen. Dies wird im Folgenden vorweggenommen.

Jedenfalls müssen die Koordinaten eines Punktes bezüglich eines Systems erhalten bleiben, wenn man Punkt und System derselben affinen Transformation unterwirft. Denn diese Koordinaten sind durch Parallelenkonstruktion gewonnen. Hieraus folgt: <u>JEDE affine Transformation ist eindeutig bestimmt durch die Abbildung von 4 Punkten allgemeiner Lage, d.h. von 4 Punkten, die nicht in derselben Ebene liegen.</u>

<u>Beweis</u>: Die 4 Punkte seien $O\ A_1 A_2 A_3$ ihre Bilder $O'\ A'_1 A'_2 A'_3$ t^i, a^i_k seien wie oben erklärt. Dann muss ein beliebiger Punkt, der bezüglich des <u>ungestrichenen</u> Systems (O, A_k) die Koordinaten x^i hat, in denjenigen Punkt übergehen, der die Koordinaten x^i im <u>gestrichenen</u> System hat (O', A'_k), also diejenigen Koordinaten x'^i im <u>ungestrichenen</u> System, die aus den x^i nach (I) hervorgehen; d. h. die Transformation muss notwendig durch I (aktiv gedeutet) gegeben sein.

<u>Umkehrung</u>: <u>Gegeben ist die Abbildung von 4 willkürlichen Punkten allgemeiner Lage in ebensolche. Dann gibt es auch eine affine Transformation des ganzen Raumes, ~~die~~ die diese Abbildung enthält</u>; nämlich die soeben angegebene.

Zusatz 1 : Eine Transformation, die 4 Punkte allgemeiner Lage in 4 Punkte einer Ebene überführt, kann ~~nur~~ nie affin sein. Denn 4 Punkte einer Ebene können durch eine affine Transformation nur aus 4 Punkten einer Ebene, nicht aus 4 Punkten allgemeiner Lage, hervorgehen.

Zusatz 2 : Eine affine Transformation, die 4 Punkte allgemeiner Lage fest lässt, ist die Identität. Beweis: Es gibt wirklich eine Transformation, die diese 4 Punkte auf sich selbst abbildet, nämlich die Identität. Also keine andere.

Affine Koordinaten der Ebene.

Sind 3 Vektoren koplanar, so sind sie nach S. 9 linear abhängig. Es seien: $OP = u$, $OA_1 = u_1$, $OA_2 = u_2$ koplanar. Dann gilt die Gleichung ($u_1 \nparallel u_2$ vorausgesetzt!)

$$u = x^1 u_1 + x^2 u_2$$

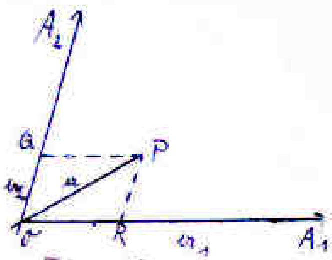


Fig 15

Wir definieren : P hat die Koordinaten x^1 und x^2 in unserem affinen ebenen Koordinatensystem (O, A_1, A_2), wenn $OP = x^1 u_1 + x^2 u_2$ ist.

Die Parallele zu OA_1 durch P treffe OA_2 in Q

" " " OA_2 " P " OA_1 in R

Dann ist $OR = QP = x^1 u_1$

$OQ = RP = x^2 u_2$

Wie man aber leicht an dem Parallelogramm O R P Q sieht, ist : $OP = OQ + QP = OR + RP$ oder

$$OP = x^1 u_1 + x^2 u_2$$

x^1 und x^2 sind eindeutig (vgl. § 2 Satz III b)

Wenn eine der Koordinaten verschwindet, so liegt P auf einer der Achsen, denn es ist dann

$$OP = x^1 u_1 \quad (+ 0 \cdot u_2!)$$

$$(\text{bzw. } OP = x^2 u_2)$$

Affine Transformation der Ebene.

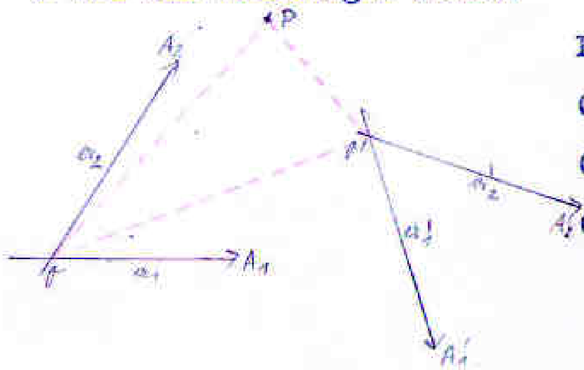
$(O; A_1, A_2)$ sei das ursprüngliche System,

(O', A'_1, A'_2) " " neue " .

O' habe im alten System die Koordinaten t^i

$\mathfrak{a}'_k$ " " " " " " a^i_k

P sei ein beliebiger Punkt.



Es ist $OP = OO' + O'P$

$OP = x^1\mathfrak{a}_1 + x^2\mathfrak{a}_2 = \sum_{i=1}^{2} x^i\mathfrak{a}_i$

$OO' = t^1\mathfrak{a}_1 + t^2\mathfrak{a}_2 = \sum_{i=1}^{2} t^i\mathfrak{a}_i$

$$\begin{aligned} O'P &= x^{1'}\mathfrak{a}'_1 + x^{2'}\mathfrak{a}'_2 = \sum_{k=1}^{2} x^{k'}\mathfrak{a}'_k \\ &= x^{1'}(a^1_1\mathfrak{a}_1 + a^2_1\mathfrak{a}_2) \\ &\quad + x^{2'}(a^1_2\mathfrak{a}_1 + a^2_2\mathfrak{a}_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a^i_k x^{k'}\right)\mathfrak{a}_i \end{aligned}$$

Fig 19

Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{2} x^i\mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{2} t^i\mathfrak{a}_i + \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a^i_k x^{k'}\right)\mathfrak{a}_i$$

Also wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung

$\underline{x^i = t^i + \sum_{k=1}^{2} a^i_k x^{k'} \quad (i = 1, 2)}$ (Transformationsformel)

oder ausgeschrieben:

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} x^1 &= t^1 + a^1_1 x^{1'} + a^1_2 x^{2'} \\ x^2 &= t^2 + a^2_1 x^{1'} + a^2_2 x^{2'} \end{aligned}$$

Aktive Deutung von II völlig analog der von (I) im Raum. Alle Überlegungen von S. 13-14 übertragen sich.

"Affine Transformation der Ebene" heisst eine solche die eindeutig Punkte in Punkte, Geraden in Geraden und Parallelen in Parallelen überführt. Wir beweisen S. 33, dass II, aktiv gedeutet, eine affine Transformation der Ebene in sich darstellt.

Das ebene Koordinatensystem ist schon durch drei, nicht erst durch vier , Punkte allgemeiner Lage bestimmt. (3 Punkte allgemeiner Lage sind solche, die nicht auf derselben Geraden liegen).Daher gelten in der Ebene folgende Sätze,die analog S. 14/15 bewiesen werden:

I) Eine affine Transformation der Ebene ist eindeutig bestimmt durch die Abbildung dreier Punkte allgemeiner Lage.

II) Es gibt eine affine Transformation der Ebene in sich,die drei beliebig vorgegebene Punkte allgemeiner Lage in drei andere beliebig vorgegebene Punkte allgemeiner Lage überführt.

III) Wenn eine affine Transformation der Ebene drei Punkte fest lässt , so ist sie die Identität.

Spezielle affine Transformationen.

1) Translation.

α) Synthetische Beschreibung :

Ein Vektor A B , der"Translationsvektor" , wird vorgegeben. Dann wird jedem beliebigen Punkt P ein solcher Punkt Q zugeordnet, dass P Q = A B ist.Jeder Punkt rückt sozusagen um die Strecke A B weiter.

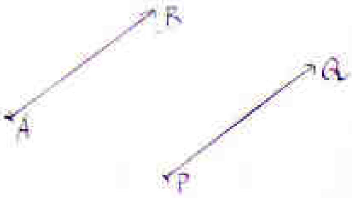


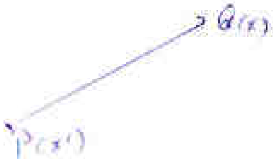
Fig.20

Die Translationen führen jeden Vektor in einen gleichen über.

Beweis: QQ' sei das Bild des Vektors PP'. Dann ist nach Definition $PQ = P'Q'$, also

$$PP' = QQ' \text{ (vgl. S.2)}$$

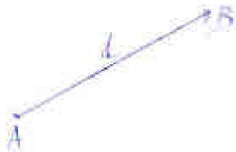
β) Analytische Beschreibung:



Der Translationsvektor A möge die Komponenten A haben.

Beh: Die Translation wird ausgedrückt durch das Gleichungssystem

$x^i = t^i + x^{i'}$ $\left(\begin{matrix} x^1 = t^1 + x^{1'} \\ x^2 = t^2 + x^{2'} \end{matrix}\right)$



Beweis: Es folgt

$x^i - x^{i'} = t^i$, also

$PQ = \sum_{i=1}^{2} (x^i - x^{i'})\, a_i = \sum_{i=1}^{2} t^i a_i = A$

Kennzeichnet man die affinen Transformationen der Ebene bzw. des Raumes allgemein durch die "Koeffizientenmatrix" (Koordinaten desselben Vektors senkrecht untereinander geschrieben): 1)

$$\begin{pmatrix} t^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ t^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} t^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ t^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ t^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix},$$

so werden demnach die Translationen dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} t^1 & 1 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} t^1 & 1 & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Dilatation.

Eine Dilatation in der Ebene bzw. im Raum wird ausgedrückt durch die Formeln

$$\begin{matrix} x^1 = a\,x^{1'} \\ x^2 = b\,x^{2'} \end{matrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{matrix} x^1 = a\,x^{1'} \\ x^2 = b\,x^{2'} \\ x^3 = c\,x^{3'} \end{matrix}$$

---

1) Fehlende Glieder sind durch Nullen " auszufüllen ", statt $x^1 = x^{1'}$ schreibe man z.B. schematisch:

$$x = \underline{0} + 1 . x^{1'} + \underline{0} . x^{2'} + \underline{0} . x^{3'}$$

also durch das Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$ erhalten demnach die Koordinaten

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{a}_1' & & \mathfrak{a}_2' & & \mathfrak{a}_3' \\ a & & 0 & & 0 \\ 0 & , & b & , & 0 \quad , \\ 0 & & 0 & & c \end{array}$$

d.h. $\mathfrak{a}_1' = a\,\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{a}_2' = b\,\mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{a}_3' = c \cdot \mathfrak{a}_3$

Da die $\mathfrak{a}_k'$ nicht verschwinden dürfen, ist $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ vorauszusetzen.

Man kann sagen, dass der Raum (bzw. die Ebene) bei einer Dilatation in den Achsenrichtungen in den Verhältnissen a,b,c (bzw. a,b) gedehnt (dilatiert) wird.

Im Fall senkrechter Achsen spielen Dilatationen eine Rolle in der Physik.

Ein Sonderfall der Dilatationen sind die Affinen Spiegelungen. Ein Beispiel einer ebenen affinen Spiegelung gibt das Schema $\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{1} \end{pmatrix}$

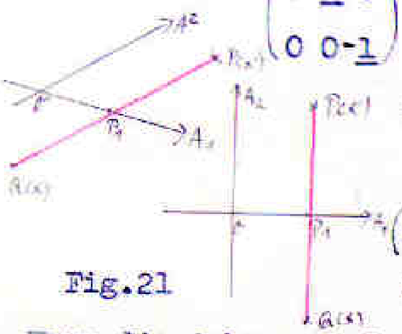


Fig.21

Es ist also $a = 1$ $\quad x^1 = x^{1'}$

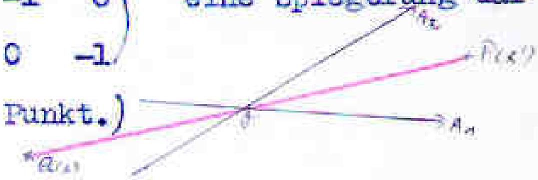
$b = -1 \quad x^2 = -x^{2'}$

(Zur Konstruktion zieht man $PP_1 \parallel OA_2$ und verlängert $P\,P_1$ um sich selbst).

Wenn die Achsen senkrecht stehen, wird die affine Spiegelung zu einer Umklappung um eine der Achsen.

<u>Definition:</u> Wir sagen : " <u>Eine Transformation ist eine Spiegelung</u>" oder " <u>hat die Periode 2</u> ", wenn dieselbe Transformation 2 mal hintereinander ausgeführt die Identität ergibt.

In der Ebene stellt ausser dem eben angegebenen auch das Schema $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ eine Spiegelung dar (Spiegelung um einen Punkt.)



Spiegelungen im Raum:

Fig 21 a

Im Raum gibt es 3 Typen von Spiegelungen:

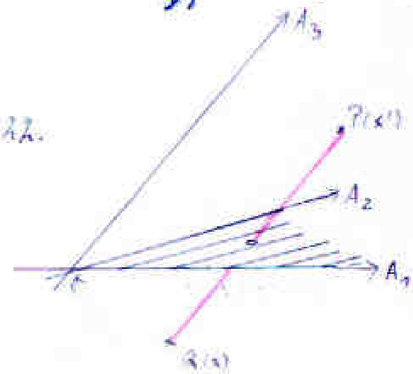
1) Spiegelung an einem Punkt (Fig. 24)

2) " " einer Geraden (Fig. 23)

3) " " " Ebene. (Fig 22)

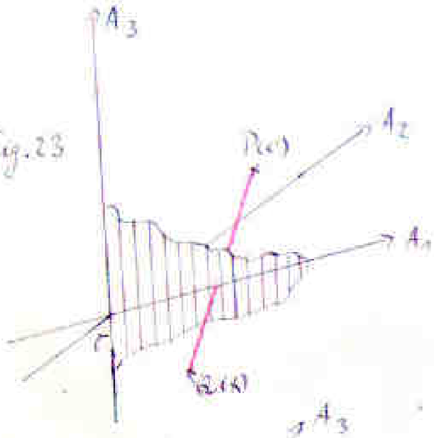
Die ~~Schemen~~ zugehörigen Matrizen sehen folgendermassen aus :

Fig. 22.



3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x^1 = x^{1'}, \quad x^2 = x^{2'}, \quad x^3 = -x^{3'}$

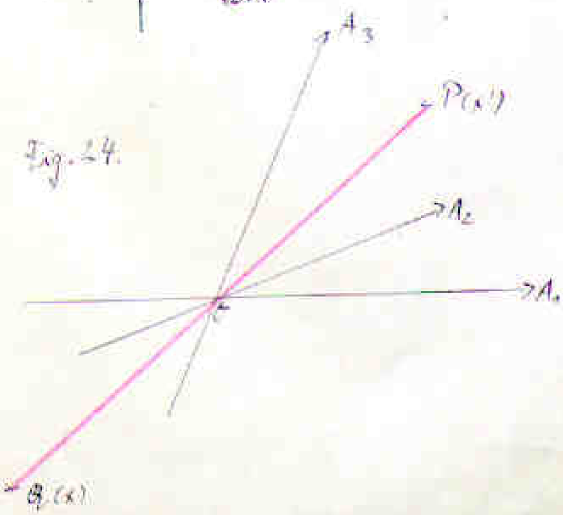
Fig. 23



2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x^1 = x^{1'}, \quad x^2 = -x^{2'}, \quad x^3 = -x^{3'}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x^1 = -x^{1'}, \quad x^2 = -x^{2'}, \quad x^3 = -x^{3'}$

Fig. 24.



§ 3. Punkte, Geraden, Ebenen, Schwerpunkt.

Gleichungen der Geraden. in Parameterform

Eine Gerade sei gegeben durch den Punkt P_0 auf ihr und die Richtung eines ihr parallelen Vektors b . P sei ein beliebiger (laufender) Punkt auf der Geraden.

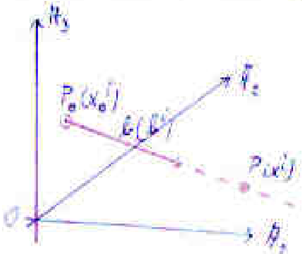


Fig 25

P_0 habe die Koordinaten $x_0^i = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$
P " " " $x^i = (x^1, x^2, x^3)$
der Vektor b " " " $b^i = (b^1, b^2, b^3)$

Die x^i sollen durch x_0^i und b^i ausgedrückt werden.

Es ist $P_0P = t \cdot b$ (nach §1),

Es ist aber auch $P_0P = OP - OP_0$,denn

$OP - OP_0 = OP + P_0O = P_0O + OP = P_0P$

Es ist weiterhin:

$$OP = \sum_{i=1}^{3} x^i a_i$$

$$OP_0 = \sum_{i=1}^{3} x_0^i a_i$$

Also $P_0P = \underline{\sum_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)\, a_i} = t.b = \underline{\sum_{i=1}^{3} t\, b^i a_i}$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der a_i müssen entsprechende Koeffizienten der unterstrichenen Ausdrücke gleich sein. Dies gibt

$$x^i - x_0^i = t\, b^i$$

(III) oder $\underline{x^i = x_0^i + t\, b^i}$

Dies sind die Gleichungen der gesuchten Geraden und zwar sind es Gleichungen in Parameterform. Das Gleichungssystem hat den Parameter t. Wenn t alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so durchläuft P die ganze Gerade.

Umkehrung: Jedes Gleichungssystem III liefert eine Gerade, ausser wenn $b^1 = b^2 = b^3 = 0$ gilt.

Beispiel :

$$x^1 = 1$$
$$x^2 = \cancel{s}\, t$$
$$x^3 = -15 + \sqrt{2}\,t$$

P_0	b
1	0
0	1
− 15	$\sqrt{2}$

<u>Gleichungen der Ebene in Parameterform.</u>

Eine Ebene sei gegeben durch einen Punkt P_0 und die Richtungen zweier nichtparalleler Vektoren b und c, durch die sie aufgespannt wird. P sei ein beliebiger (laufender) Punkt in der Ebene.

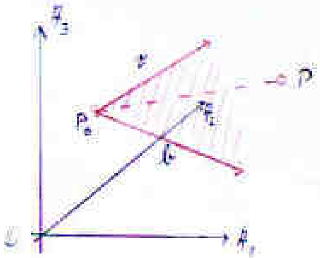


Fig 26

P_0	habe die	Koordinaten		x_0^i(i=1,2,3)
P	"	"	"	x^i
b	"	"	"	b^i
c	"	"	"	c^i

x^i ist durch x_0^i, b^i, c^i auszudrücken.

P_0P ist linear ausgedrückt durch b und c, da P_0P, b und c koplanar sind und da b $\nparallel$ c.

Es gilt also die Beziehung: $P_0P = s.b + t c$

Durchlaufen s und t alle reellen Werte,so durchläuft P die ganze Ebene. s und t sind affine Koordinaten unserer Ebene bezüglich des Systems (P_0,b,c).

Es ist

$$OP - OP_0 = P_0P = \sum_{i=1}^{3}(x^i - x_0^i)\,a_i = s\sum_{i=1}^{3} b^i a_i + t\sum_{i=1}^{3} c^i a_i$$

Hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$x^i - x_0^i = s\,b^i + t\,c^i$$

oder $$\underline{x^i = x_0^i + s\,b^i + t\,c^i}$$

Dies ist das Gleichungssystem der gesuchten Ebene in Parameterform. Wir haben als Parameter s und t.

<u>Umkehrung</u>: Das Gleichungssystem

$$\text{IV} \qquad \begin{aligned} x^1 &= x_0^1 + s\,b^1 + t\,c^1 \\ x^2 &= x_0^2 + s\,b^2 + t\,c^2 \\ x^3 &= x_0^3 + s\,b^3 + t\,c^3 \end{aligned}$$

stellt immer eine Ebene dar, die den Punkt $P_0\ (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ enthält und durch die Vektoren $\mathfrak{b}\ (b^i)$ und $\mathfrak{c}\ (c^i)$ aufgespannt wird; nur dürfen die Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht linear abhängen, d.h. eine Beziehung der Form $\mu\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{c}$, wo nicht $\lambda = \mu = 0$ ist, darf nicht bestehen, d.h. es darf <u>nicht</u>

$$\begin{aligned} \mu b^1 &= \lambda c^1 \\ \mu b^2 &= \lambda c^2 \\ \mu b^3 &= \lambda c^3 \quad \text{mit } \mu \neq 0 \text{ oder } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

sein.

<u>Anmerkung</u>: Die Schreibweise $\mu b^i = \lambda c^i$ ist einer Form wie etwa $\frac{b^1}{c^1} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^3}{c^3}$ vorzuziehen, weil die hier möglicherweise im Nenner auftretenden Nullen Schwierigkeiten machen.

<u>Ebenengleichung ohne Parameter.</u>

I <u>Jede Ebene genügt einer linearen Gleichung der Form</u>

$$\text{V} \qquad u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 = 0$$

(Dabei soll nicht $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ sein)

(Eine Ebene genügt einer Gleichung heisst: Die Koordinaten eines jeden Punktes der Ebene erfüllen die Gleichung. Wäre in V $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, so wäre V gar keine Bedingung für die x^i).

Zum <u>Beweis</u> müssen wir zeigen, dass das Gleichungssystem IV durch Elimination von s, t immer auf V führt.

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle.

1) Eine Gleichung des Systems IV enthalte keinen Parameter, z.b. die erste. Sie heisst dann: $x^1 = x_0^1$ oder

$$\underline{x^1 - x_0^1 = 0} \quad .$$

Dies ist bereits eine Gleichung der Form XV mit

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 0$$
$$u_3 = 0$$
$$u_4 = - x_0^1$$

2) Jede Gleichung enthalte mindestens einen Parameter. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen: $b_1^1 \neq 0$. Dann können wir s aus der ersten Gleichung eliminieren und erhalten

$$s = \frac{1}{b^1}(x^1 - x_0^1 - t\, c^1)$$

Diesen Ausdruck für s setzen wir in die zweite Gleichung ein; diese erhält so die Form

$x^2 = A + B\, x^1 + C\, t$ (hierbei sind A,B,C weder von den x^i noch von s noch von t abhängig).

Wir führen hier noch eine Unterteilung ein.

α) Es sei $C = 0$, also $\underline{B\, x^1 - x^2 + A = 0}$. Dies ist bereits eine Gleichung V ($u_2 = -1 \neq 0$).

β) $C \neq 0$. Wir können dann t aus unserer Gleichung ausrechnen und erhalten einen Ausdruck der Form

$$t = D\, x^1 + E\, x^2 + F$$

Diesen Ausdruck für t und den früheren für s setzen wir in die dritte Gleichung von IV ein und erhalten so eine Gleichung der Form

$$x^3 = G + H\, x^1 + J\, x^2 \text{ oder}$$
$$H\, x^1 + J\, x^2 - x^3 + G = 0$$

Das ist aber eine Gleichung V ($u_3 = -1 \neq 0$)

II. <u>Jede lineare Gleichung der Form (V), bei welcher nicht alle drei Koeffizienten der x verschwinden, stellt eine Ebene dar.</u>

<u>Voraussetzung:</u> ~~XXXXX~~ $u_1 \neq 0$ (o.B.d.A.).

Wir können auch annehmen, $u_1 = 1$, da wir die Gleichung mit einem passenden Zahlenfaktor multiplizieren dürfen ~~können~~.

Wir setzen nun $x^2 = s$ und $x^3 = t$. Dann lässt sich unsere Gleichung durch folgendes Gleichungssystem darstellen:

$$\begin{aligned} x^1 &= -u_4 - s\,u_2 - t\,u_3 \\ x^2 &= s \\ x^3 &= t \end{aligned}$$

Das ist aber ein Gleichungssystem der Form IV , stellt also (s.o.) eine Ebene dar, wenn die Relationen

$$\begin{aligned} \mu(-u_2) &= \lambda(-u_3) \\ \mu\cdot 1 &= \lambda\cdot 0 \\ \mu\cdot 0 &= \lambda\cdot 1 \end{aligned}$$

nur für $\mu = \lambda = 0$ erfüllbar sind ~~ist~~. Die zweite und dritte dieser Relationen besagt aber gerade

$\mu = 0$ und $\lambda = 0$

<u>Gegenseitige Lage zweier Ebenen.</u>

Wir fragen: Wie liegen 2 Ebenen, dargestellt durch

~~IV~~ VI 1) $u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 = 0$

2) $v_1 x^1 + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 = 0$ zueinander?

1) <u>Die Ebenen sind dann und nur dann identisch, wenn alle Koeffizienten u_i den entsprechenden v_i proportional sind.</u>

Dass die Bedingung hinreicht, ist klar. Wir beweisen jetzt ihre Notwendigkeit.

Es sei $u_1 \neq 0$ (o.B.d.A.) ;dann bestimmen wir λ so, dass $v_1 - \lambda u_1 = 0$ Wir setzen

$$v_2 - \lambda u_2 = w_2$$
$$v_3 - \lambda u_3 = w_3$$
$$v_4 - \lambda u_4 = w_4$$

Multiplizieren wir die 1. Gleichung VI mit λ und subtrahieren sie von der 2., so ergibt sich :

VI(*) $\underline{w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 = 0}$

Die Punkte, die ~~XXXX~~ VI 1) , VI 2) erfüllen, sind dieselben, die VI 1) VI (*) erfüllen. Sind die u_i nicht den v_i proportional, so ist nicht $w_2 = w_3 = w_4 = 0$. ?

Wir unterscheiden die Fälle

α) $w_2 = w_3 = 0$ $\quad w_4 \neq 0$

β) Etwa $w_2 \neq 0$

Im Falle α) ist VI * nicht erfüllbar, also haben VI 1)2) keine gemeinsame Lösung. Die Ebenen sind nicht nur nicht identisch, sondern haben keinen gemeinsamen Punkt, sie sind parallel. Wir sehen also, wenn wir die Bedingung $w_2 = w_3 = 0$, $w_4 \neq 0$ für die ursprünglichen u_i, v_i formulieren :

2) <u>Die Ebenen (VI) sind parallel, wenn u_1, u_2, u_3 proportional v_1, v_2, v_3, aber nicht $u_1, \dots, u_4$ proportional $v_1, \dots, v_4$ ist.</u>

$$\left(\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \neq \frac{u_4}{v_4} \right)$$

Im Falle β)(formuliert für u_i, v_i) behaupten wir :

3) <u>Die Ebenen (VI) schneiden sich, wenn nicht u_1, u_2, u_3 proportional v_1, v_2, v_3.</u>

Zum Beweise genügt es, unter dieser Voraussetzung zwei Punkte anzugeben, von denen der erste VI, 1 und VI (*) erfüllt, der zweite nur VI , 1 , aber nicht VI (*) .

Denn dann können die Ebenen weder parallel noch identisch sein, müssen sich also schneiden. Diese Punkte sind, wie leicht nachzurechnen :

a) $x^3 = 0$

$x^2 = -\frac{w_4}{w_2}$

$x^1 = \frac{1}{u_1}(-u_4 - u_2 x^2)$

b) $x^3 = 0$

$x^2 = x^2 + 1$

$x^1 = \frac{1}{u_1}(-u_4 - u_2 y^2)$

<u>Diskussion der Ebenengleichung.</u>

1) $u_4 \neq 0$; $u_4 = -1$ (o.B.d.A.)

α) Kein u verschwindet. Dann lautet die Gleichung:

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 - 1 = 0$$

<u>Diese Ebene schneidet aus den Koordinatenachsen die</u> Stücke $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_2}$ und $\frac{1}{u_3}$ aus, d.h. die Punkte

$P_1\left(\frac{1}{u_1}, 0, 0\right)$

$P_2\left(0, \frac{1}{u_2}, 0\right)$

$P_3\left(0, 0, \frac{1}{u_3}\right)$ genügen der Gleichung.

β) $u_1 = 0$ $\qquad u_2, u_3 \neq 0$

<u>Diese Ebene ist parallel der x^1-Achse,</u> die ja die Gleichung $x^2 = x^3 = 0$ hat, denn die Punkte ($x^2 = 0$, $x^3 = 0$) genügen ihrer Gleichung nicht. Wir können uns den Parallelismus als Schnitt im Unendlichen vorstellen, denn je mehr wir u_1 gegen Null streben lassen, um so grösser wird der Abschnitt $x = \frac{1}{u_1}$ auf der x^1-Achse, um so entfernter also der Schnittpunkt. Aus den übrigen Achsen schneidet die Ebene die Stücke $\frac{1}{u_2}$, $\frac{1}{u_3}$ aus.

γ) Es sei $u_1 = u_2 = 0$, also $u_3 \neq 0$.

Dann ist die Ebene || der x^1- Achse und || der x^2- Achse.
d.h. || der (1 , 2) Ebene.

Ihre Gleichung ist $x^3 = \frac{1}{u_3}$, oder allgemein

$$x^3 = \text{const.}$$

2) $u_4 = 0$, $u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$.

Diese Ebene ist parallel $u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 - 1 = 0$.

Wir haben also für diese einzelnen Fälle das Entsprechende wie in 1). Unsere Gleichung stellt jetzt aber nur Ebenen dar, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehen. Denn $u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 0 + u_4 = 0$ ist äquivalent mit $u_4 = 0$.

Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen.

Auch hier wie bei zwei Ebenen gibt es 3 Fälle:

Die Gerade schneidet die Ebene, ist ihr parallel oder liegt in ihr.

Gleichung der Geraden : $x^i = x_0^i + t\, b^i$

" " Ebene : $u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 = 0$.

Gibt es gemeinsame Punkte, so ist

$$u_1 (x_0^1 + t\, b^1) + u_2 (x_0^2 + t\, b^2) + \ldots + u_4 = 0$$

oder $\sum_{i=1}^{3} (x_0^i + t \cdot b^i) u_i + u_4 = 0$

Hiermit ist uns eine Bestimmungsgleichung für t gegeben, und zwar ist sie linear:

$$t \cdot A + B = 0$$

Alle und nur die Werte t, die diese Gleichung erfüllen, bestimmen gemeinsame Punkte der Geraden und der Ebene.

Fall 1) Ist $A \neq 0$, so ist t eindeutig bestimmt:

$$t = -\frac{B}{A} ,$$ die Gerade schneidet d. Ebene.

2) Ist $A = 0$, so ist zu unterscheiden:

α) $B \neq 0$

β) $B = 0$.

2α) führt zum Widerspruch; es gibt keinen Schnittpunkt; <u>die Gerade ist der Ebene parallel.</u>

Im Fall 2β) ist die Gleichung $t \cdot A + B = 0$ für <u>jeden</u> t-Wert erfüllt; die Gerade liegt also in der Ebene.

<u>Wie kann man eine Gerade durch zwei Punkte legen ?</u>

Gegeben seien die Punkte :

$$P_0 \equiv (x_0^1 = 3 \; ; \; x_0^2 = 1 \; ; \; x_0^3 = 0)$$
$$P_1 \equiv (x_1^1 = 0 \; ; \; x_1^2 = 7 \; ; \; x_1^3 = \sqrt{2})$$

P sei der laufende Punkt mit den Koordinaten (x^i).

Wir schaffen uns den Vektor P_0P_1. Dieser hat die Koordinaten $(x_1^i - x_0^i)$, also:

$$P_0P_1 \equiv (-3; \; 6 \; ; \sqrt{2})$$

Jetzt können wir die gesuchte Geradengleichung aufstellen. Sie ist :

$$x^1 = 3 - 3\,t$$
$$x^2 = 1 + 6\,t$$
$$x^3 = 0 + \sqrt{2}\,t$$

Die Punkte P_0 bzw. P_1 entsprechen den Parameterwerten $t = 0$ bzw. $t = 1$.

<u>Wie legt man eine Ebene durch die Punkte</u>
<u>$P_0\,(x_0)$; $P_1(x_1^i)$; $P_2(x_2^i)$</u> ?

$P\,(x^i)$ sei der laufende Punkt. Wir schaffen uns die Vektoren P_0P_1 mit den Koordinaten $(x_1^i - x_0^i)$

$$P_0P_2 \quad " \quad " \quad " \quad (x_2^i - x_0^i)$$

Die gesuchte Ebenengleichung lautet dann:

$$\underline{x^i = x_0^i + s\,(x_1^i - x_0^i) + t\,(x_2^i - x_0^i)}$$

Die Punkte P_0 bzw. P_1 bzw. P_2 entsprechen den Parameterwerten $s = 0, t = 0$, bzw. $s = 1$, $t = 0$ bzw. $s = 0, t = 1$.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Darstellung einer Geraden im Raum durch zwei lineare Gleichungen.

2 Gleichungen.

1) $u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4 = 0$

2) $v_1x^1 + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4 = 0$

bestimmen eine Gerade, wenn nicht die Koeffizienten der Koordinaten proportional sind. (Die Gleichung

$$\mu u_i = \lambda v_i \qquad (i = 1,2,3)$$

darf also nur dann gelten, wenn

$$\mu = \lambda = 0 \qquad \text{ist.}$$

)

Unter dieser Voraussetzung bedeuten nämlich 1) und 2) zwei sich schneidende Ebenen (s.S.25), deren gemeinsame Punkte, d.i. die Schnittgerade, eindeutig bestimmt ist.

Verhältnisse in der Ebene.

Alle Sätze und Beweise sind ganz analog denen im Raum (S.21 ff.), nur dass wir überall eine Koordinate weniger haben.

Parameterdarstellung der Geraden.

Eine Gerade sei gegeben durch einen Punkt P_0 auf ihr und die Richtung eines ihr parallelen

$\cancel{P_0 P_1}$

~~Die Gerade durch die Punkte P_0 und P_1 wird demnach dargestellt durch die Gleichungen:~~

Vektors b. P sei ein laufender Punkt auf der Geraden.

P_0 habe die Koordinaten $x_0^{\,i} = (x_0^{\,1}, x_0^{\,2})$

P habe die Koordinaten $x^i \quad (x^1, x^2)$

b " " " $b^i \quad (b^1, b^2)$

t sei der Parameter.

Unter der Voraussetzung, dass $b \neq 0$ ist, dass also nicht $b^1 = b^2 = 0$ ist, erfüllt die Gerade das Gleichungssystem

$$(III_0) \quad x^i = x_0^{\,i} + tb^i \qquad (i = 1,2)$$

Umkehrung: Jedes Gleichungssystem (III) liefert eine Gerade in der Ebene, ausser wenn $b^1 = b^2 = 0$ ist.

Geradengleichung ohne Parameter.

I. Jede Gerade genügt einer linearen Gleichung der Form

$$(V_0) \quad u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 = 0$$

(Dabei soll nicht $u_1 = u_2 = 0$ sein.)

II. Jede lineare Gleichung der Form (V_0), bei welcher nicht beide Koeffizienten der x^i verschwinden, stellt eine ~~Ebene~~ Gerade dar.

Gegenseitige Lage zweier Geraden.

$$(VI_0) \quad \begin{aligned} &1) \quad u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 = 0 \\ &2) \quad v_1 x^1 + v_2 x^2 + v_3 = 0 \end{aligned}$$

1. Die Geraden $VI_0 1$ und $VI_0 2$ sind dann und nur dann identisch, wenn alle Koeffizienten u_i den entsprechenden v_i proportional sind.

2. Die Geraden sind parallel, wenn u_1, u_2 proportional v_1, v_2 aber nicht u_1, u_2, u_3 proportional v_1, v_2, v_3

3. Die Geraden schneiden sich, wenn nicht u_1, u_2 proportional v_1, v_2.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

~~II. Jede lineare Gleichung der Form , bei welcher nicht beide Koeffizienten der x^i verschwinden~~

<u>Diskussion der Geradengleichung.</u>

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 = 0$$

1.) $u_3 \neq 0$ $\qquad$ o.B.d.A.: $u_3 = -1$

α) Kein u_i verschwindet. Dann lautet die Gleichung

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 - 1 = 0$$

<u>Die Gerade schneidet aus den Koordinatenachsen die Stücke</u> $\frac{1}{u_1}$ und $\frac{1}{u_2}$ aus, d.h. die Punkte $P_1\left(\frac{1}{u_1}, 0\right)$ $P_2\left(0, \frac{1}{u_2}\right)$ genügen der Gleichung.

β) $u_1 = 0$ (o.B.d.A.) also $u_2 \neq 0$

$$x^2 = \frac{1}{u_2}$$

$$x^2 = \text{const.}$$

<u>Die Gerade ist parallel der x^1-Achse</u>

2.) $u_3 = 0$

<u>Die Gerade geht durch den Nullpunkt</u>. Denn der Punkt $P(0, 0)$ genügt der Gleichung

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + 0 = 0$$

Die Bedingung $u_3 = 0$ ist hierfür zugleich notwendig und hinreichend.

<u>Beweis, dass die Koordinatentransformation</u>

(I) $\quad x^i = p^i + \sum_{k=1}^{3} a_k^i x^{k'} \quad (i = 1,2,3)$

<u>bei aktiver Deutung affin ist</u>, (d.h. dass durch sie umkehrbar eindeutig Punkt in Punkt, Gerade in Gerade, Ebene in Ebene und Parallele in Parallele übergeführt wird. vgl. S. 13/14). Wir müssen voraussetzen, dass die Vektoren a_k' linear unabhängig sind. Anders ausgedrückt

$\sum_{k=1}^{3} \lambda^k a_k' = 0$ $\qquad$ besteht nur für $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$

oder

$$\sum_{\kappa=1}^{3} \lambda^\kappa a_\kappa^i = 0 \quad (i=1,2,3)$$

besteht nur für

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$$

Die letzte Formulierung ist deswegen wichtig, weil sie den Vektorbegriff nicht mehr benutzt, sondern rein algebraisch ist. ~~Da~~

1a) Jeder Punkt $(x^{\kappa'})$ hat genau einen Bildpunkt (x^i). Das geht ohne weiteres aus I hervor.

1b) Umgekehrt gehört zu jedem Punkt (x) genau ein Punkt (x'). Da die $\mathfrak{a}_\kappa'$ linear unabhängig sind, können wir beim Aufstellen der Transformationsgleichung auch vom gestrichenen System ($O'\mathfrak{A}_\kappa'$) ausgehen und erhalten eine Gleichung:

$$(\mathrm{I}') \qquad x^{\kappa'} = A^{\kappa'} + \sum_{l=1}^{3} a_l^{\kappa'} x^l \quad (\kappa=1,2,3)$$

Dabei haben $O'O$ die Koordinaten $A^{\kappa'}$ } im gestrichenen
die Vektoren $\mathfrak{a}_l$ " " $a_l^{\kappa'}$ } System

(I') ist (I) äquivalent. Man kann I' erhalten, indem man I nach den $(x^{\kappa'})$ auflöst. Aus (I') ersehen wir nun, dass jedem Punkt x genau ein Punkt x' entspricht.

Also: Die Punktabbildung ist umkehrbar eindeutig.

$$P \rightleftarrows P'$$

2a) Jede Gerade g' hat genau eine Bildgerade g.

Gegeben g' : $x^{\kappa'} = x_0^{\kappa'} + \lambda\, \mathfrak{b}^{\kappa'}$

Wir setzen diesen Ausdruck für $x^{\kappa'}$ in das Transformationssystem $x^i = A^i + \sum_{\kappa=1}^{3} a_\kappa^i x^{\kappa'}$ ein und erhalten

$$x^1 = t^1 + \sum_{k=1}^{3} a_k^1 (x_0^{k'} + t b^{k'})$$

$$x^2 = t^2 + \sum_{k=1}^{3} a_k^2 (x_0^{k'} + t b^{k'})$$

$$x^3 = t^3 + \sum_{k}^{3} a_k^3 (x_0^{k'} + t b^{k'})$$

oder nach t geordnet

$$x^i = t^i + \sum_{k=1}^{3} a_k^i x_0^{k'} + t \left(\sum_{k=1}^{3} a_k^i b^{k'} \right) \qquad (i = 1,2,3)$$

Dies ist aber ein Gleichungssystem der Form III für die x^2, wenn wir $t^i + \sum_k^3 a_k^i x_0^{k'} = x_0^i$ und $\sum_k^3 a_k^i b^{k'} = b^i$

setzen. Das System stellt eine Gerade g dar oder, wenn alle b^i verschwinden, einen Punkt $(x^i = x_0^i)$.

Das letzte ist unmöglich; denn dann hätten wir einen Punkt als Abbildung einer Geraden; Punkte ~~gehen~~ aber nur aus Punkten, nicht aus Geraden hervor.

Also in der Tat $g' \rightarrow g$

Wegen der Symmetrie der beiden Koordinatensysteme gilt dann auch:

2b.) <u>Jeder Geraden g im System $(O\,A_k)$ entspricht eine Gerade g' im System $(O'\,A_k')$</u> (nicht alle $b^i = 0$)

Also $$g \rightleftarrows g' .$$

3 a.) Jede Ebene e' hat genau eine Bildebene e.

Gegeben e' : $x^{k'} = x_0^{k'} + s\, b^{k'} + t\, c^{k'}$ (k= 1,2,3) .
Wir setzen diesen Ausdruck für $x^{k'}$ in das Transformationssystem (I) ein und erhalten

$$x^1 = t^1 + \sum_{k=1}^{3} a_k^1 (x_0^{k'} + s\, b^{k'} + t\, c^{k'})$$
$$x^2 = t^2 + \sum_{k} a_k^2 (x_0^{k'} + s\, b^{k'} + t\, c^{k'})$$
$$x^3 = t^3 + \sum_{k} a_k^3 (x_0^{k'} + s\, b^{k'} + t\, c^{k'})$$

oder nach s und t geordnet :

$$x^i = t^i + \sum_{k=1}^{3} a_k^i x_0^{k'} + s\Big(\sum_{k=1}^{3} a_k^i b^{k'}\Big) + t\Big(\sum_{k=1}^{3} a_k^i c^{k'}\Big)$$
(i = 1,2,3)

Dies aber ist ein Gleichungssystem der Form

$$x^i = x_0^i + s\, b^i + t\, c^i ,$$

wenn wir

$$t^i + \sum_{k=1}^{3} a_k^i x_0^{k'} = x_0^i$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_k^i\, b^{k'} = b^i$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_k^i\, c^{k'} = c^i$$
setzen.

Das System stellt eine Ebene dar, ausser wenn einer der folgenden Ausnahmefälle eintritt:

α) Alle $b^i = 0$ und alle $c^i = 0$.

Das ist nicht möglich, denn dann hätten wir einen Punkt als Abbildung einer Ebene; Punkte gehen aber nur aus Punkten, nicht aus Ebenen hervor.

β) Die b^i sind den entsprechenden c^i proportional.

d.h. $\mu b^i = \lambda c^i$

Angenommen $\mu \neq 0$ (o.B.d.A.)

Dann ist

$$b^i = \frac{\lambda}{\mu} c^i$$

Diesen Ausdruck in die Parameterform der Ebenengleichung eingesetzt, ergibt:

$$x^i = x_0^i + c^i \Big(t + \frac{\lambda}{\mu} s \Big)$$

Es sei $r = t + \frac{\lambda}{\mu} s$

Also

$$x^i = x_0^i + r c^i$$

Dieses Gleichungssystem (Parameter r) stellt eine Gerade dar. Wir hätten eine Gerade als Abbildung einer Ebene. Das ist nicht möglich, da Geraden nur aus Geraden hervorgehen und nicht aus Ebenen.

Also in der Tat

$$e' \longrightarrow e$$

Wegen der Gleichberechtigung der beiden Koordinatensysteme gilt dann auch :

3 b.) <u>Jeder Ebene e entspricht eindeutig eine Ebene e'</u> .

Also

$$e \rightleftarrows e'$$

4) <u>Die Parallelität bleibt erhalten.</u>

Parallele Ebenen müssen in parallele Ebenen übergeführt werden, denn hätten die Bilder eine Schnittgerade, so müßte diese wegen der Geradentreue aus einer Schnittgeraden hervorgegangen sein. Das Entsprechende gilt für parallele Geraden.

Die Sätze 1 - 4 enthalten die Behauptung

<u>Unsere Koordinatentransformation</u>

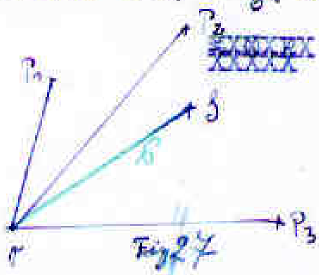
$$x^i = t^i + \sum_{\kappa=1}^{3} a^i_\kappa x^{\kappa'}$$

<u>ist wirklich affin.</u>

Für die Affinität der Formeln II der Ebene verlaufen die Beweise entsprechend.

Schwerpunkt.

Den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ seien bzw. die Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ angeheftet. Wir lassen dann einen bestimmten Punkt O fest und ordnen jedem Punkt P_i den Vektor $OP_i = \mathfrak{x}_i$ zu. Also



$$\mathfrak{x}_1 = O\,P_1$$
$$\mathfrak{x}_2 = O\,P_2$$
$$\mathfrak{x}_3 = O\,P_3$$

Der Schwerpunkt der gesamten Massen sei S. Ihm ordnen wir den Vektor

$\mathfrak{s} = OS$ zu. Dann wird S definiert durch die Gleichung :

$$\text{VII} \qquad \sum_{i=1}^{m} m^i \cancel{(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{s})} \cdot SP_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} m^i (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{s}) = 0$$

Wir setzen $\sum_{i=1}^{n} m^i = m$ und nehmen an, dass $m \neq 0$ wird. Hierbei können einzelne m^i auch negativ sein; das hat zwar in der Mechanik keinen Sinn, wohl aber z.B. in der Elektrizitätslehre.

Aus VII folgt:

$$\text{VIII} \qquad m \cdot \mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{m} m^i \mathfrak{x}_i$$

Schwerpunktssätze.

1. Der Schwerpunkt von Massenpunkten, die auf einer Geraden liegen, liegt auf derselben Geraden.

2. Der Schwerpunkt von Massenpunkten, die in einer Ebene liegen, liegt in derselben Ebene.

Beweis zu 2. : Wir legen das Koordinatensystem so, dass die Massenpunkte in der Ebene $x^3=0$ liegen. Dann lautet die Gleichung für die dritte Koordinate des Schwerpunkts :

$$s^3 = \frac{1}{m} \sum 0 = 0$$

d.h. S liegt auch in der Ebene $x^3=0$ q.e.d.

Entsprechend ist der Beweis für 1. ; wobei wir die Achsen so legen, dass die Massenpunkte auf einer Koordinatenachse liegen.

1a) Der Schwerpunkt zweier Punkte P_1, P_2 mit gleicher Massenbelegung ist der Mittelpunkt von P_1P_2.

Es sei nämlich $m_1 = m_2 = m$. Dann lautet die Schwerpunktsbedingung

$$m \cdot \mathfrak{S}P_1 + m \cdot \mathfrak{S}P_2 = 0$$

$$S P_2 = P_1 S \qquad \text{q.e.d.}$$

3. Affine Transformation des Schwerpunkts.

Das Bild des Schwerpunktes eines Punktsystems bei affiner Transformation ist der Schwerpunkt der Bilder.

Beweis : Affine Transformationen führen gleiche Vektoren in gleiche Vektoren über; denn zwei Vektoren A'B' und C'D' sind gleich, wenn A'B' $\parallel$ C'D' und A'C' $\parallel$ B'D'. Dann gilt aber auch für die Bildpunkte A,B,C und D : AB $\parallel$ CD und AC $\parallel$ BD, d.h. AB = CD. Es gilt von der Transformation für den Schwerpunkt $S'(P'_1, \ldots, P_n')$

$$O'\mathfrak{S}' = \frac{1}{m} \sum m^i \, O'P_i'$$

Bei der Transformation sei

$$O'S' \to OS$$
$$O'P_i' \to OP_i$$

Da gleiche Vektoren in gleiche Vektoren übergehen, gilt dann auch die Beziehung

$$OS = \frac{1}{m} \sum m_i OP_i$$

d.h. S ist Schwerpunkt von $P_1, \ldots, P_n$.

4. Satz : Will man den Schwerpunkt S eines Punktsystems finden, so kann man die Punkte zu Teilsystemen zusammenfassen, deren Schwerpunkte bestimmen und den Schwerpunkt S der Teilschwerpunkte; wobei diese mit der Gesamtmasse aller Punkte des zugehörigen Teilsystems zu belegen sind.

Wir führen den Beweis nur für einen Sonderfall, um Umständlichkeiten der Bezeichnungen zu vermeiden.

Wir gehen aus von

$$\sum_{i=1}^{n} m_i SP_i = \sum_{i=1}^{n-2} m_i SP_i + \sum_{i=n-1}^{n} m_i SP_i = 0$$

Wir bestimmen den Teilschwerpunkt T von P_{n-1} und P_n durch die Bedingung

$$\sum_{i=n-1}^{n} m_i TP_i = 0$$

Unser Satz besagt dann

$$\sum_{i=n-1}^{n} m_i SP_i = \left(\sum_{i=n-1}^{n} m_i \right) ST$$

Das ist aber nichts anderes als die Definition von T !

Geometrische Anwendungen der Schwerpunktssätze.

1. Gegeben seien drei Punkte A, B, C allgemeiner Lage. Jeder habe die Masse 1. Behauptung: Jede Mittellinie des Dreiecks ABC geht durch den Schwerpunkt S von A, B, C.

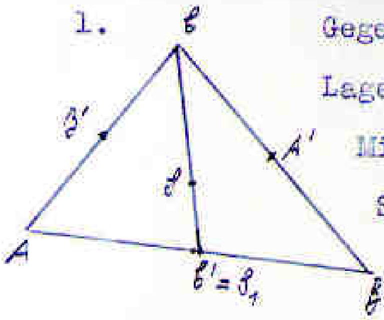


Fig 28

$C\,C'$ sei eine solche Mittellinie. Um S zu finden, bilden wir den Teilschwerpunkt S_1 von A und B, der nach 1a) mit C' zusammenfällt und die Masse 2 bekommt. Dann bilden wir den Schwerpunkt S von C' und C. Er liegt nach Satz 1) auf $C\,C'$. Aus Symmetriegründen liegt er auch auf $B\,B'$ und $A\,A'$.

2. Gegeben seien vier Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ allgemeiner Lage, die also ein Tetraeder bestimmen.

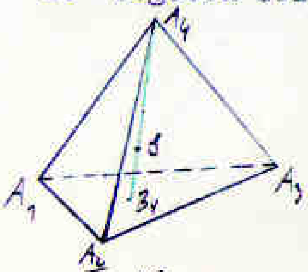


Fig 29

Behauptung: Die Verbindungslinien der Schwerpunkte der einzelnen Seitenflächen mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich im Schwerpunkt des Tetraeders.

B_1, B_2, B_3, B_4 seien die Schwerpunkte der Seitenflächen gegenüber von A_1, A_2, A_3, A_4: Um S zu finden, bestimmen wir den Teilschwerpunkt $B_4(A_1 A_2 A_3)$ und dann den Schwerpunkt S von B_4 und A_4. Der liegt ~~auch~~ nach Satz 1) auf $A_4 B_4$. Analog liegt er auf $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$. (Ein entsprechender Satz gilt für jede beliebige Massenbelegung der Punkte A_i).

3. Unter gegenüberliegenden Kanten verstehe man solche, die keine Ecke gemeinsam haben.

Behauptung: Die Verbindungslinie der Mittelpunkte gegenüberliegender Tetraederkanten schneiden sich im Tetraederschwerpunkt und werden durch ihn halbiert. $A_1 A_2 A_3 A_4$ sei ein Tetraeder A_1, A_2, A_3, A_4 seien mit den gleichen Massen belegt.

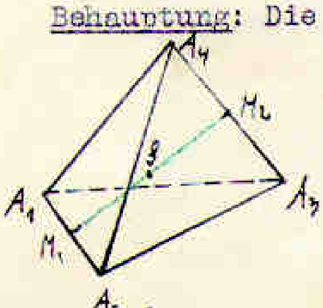


Fig 30

$M_1 M_2$ sei eine der Verbindungslinien. Wir bilden die Teilschwerpunkte von A_1 und A_2 und von A_3 und A_4. Sie liegen nach 1a) in M_1 bzw. M_2. Der Schwerpunkt S des Tetraeders liegt nach 1) also auf M_1M_2 (entsprechend für die anderen Verbindungslinien). Da M_1 und M_2 je die Masse 2 bekommen, so liegt nach 1a) S im Mittelpunkt von $M_1 M_2$.

4. <u>Die Ebene durch die Schwerpunkte dreier Seitenflächen im Tetraeder ist der vierten Seitenfläche parallel.</u>

<u>Beweis:</u> Für das gleichseitige Tetraeder wird der Satz als anschaulich evident vorausgesetzt. Wir können aber aus dem gleichseitgen Tetraeder jedes beliebige andere durch affine Transformation erhalten (nach S.33-34). Dabei gehen nach Satz 3 Schwerpunkte in Schwerpunkte über und alle Parallelitäten bleiben erhalten.

§ 4. Flächeninhalt, Rauminhalt, Determinanten.

Leibniz hat zuerst die Determinanten eingeführt und zwar, um lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten bequem auflösen zu können. Wir führen die Determinanten durch die Theorie des Inhalts ein.

Literatur:

Fischer, Determinanten (Sammlg.Göschen) } Einführung
Pascal, " (übersetzt v.Leitzmann) }

Kowalewski, Determinantentheorie (ausführlich)

Carathéodory, Reelle Funktionen, S.206 ff.

Es gibt drei Prinzipien der Inhaltsvergleichung:

a) ~~[illegible]~~ Kongruente Figuren haben gleichen Inhalt.[1]

b) Figuren haben gleichen Inhalt, wenn sie zerlegungsgleich sind, d.h. sich in kongruente Stücke aufteilen lassen.

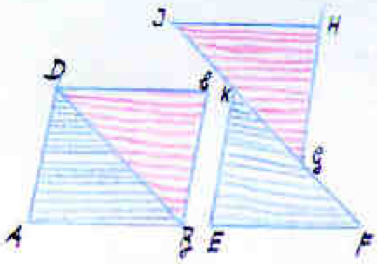


Fig 31

z.B. die Figuren ABCD und EFGHIK sind zerlegungsgleich.

c) Figuren haben gleichen Inhalt, wenn sie ergänzungsgleich sind, d.h. darstellbar sind als Summen und Differenzen kongruenter Stücke.

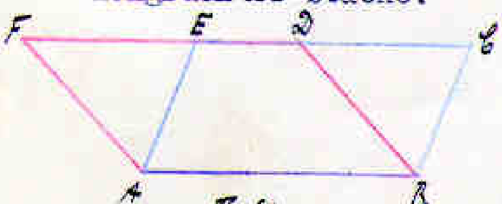


Fig 32

z.B. ABDF und ABCE sind ergänzungsgleich, denn sie sind die Differenz aus ABCF und dem Dreieck BCD bzw. dem zu BCD kongruenten Dreieck AEF.

---

1) Wir werden in diesem Paragraphen nur solche kongruenten Figuren betrachten, die durch Translation oder durch Spiegelung auseinander hervorgehen.

Verfeinerung der Inhaltsvergleichung in der Ebene durch Einführung eines Umlaufssinnes.

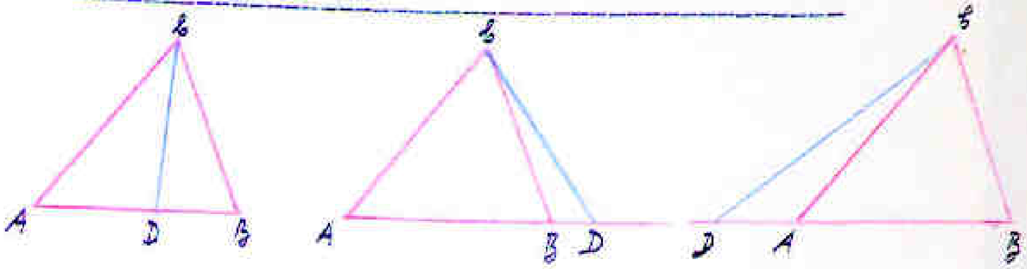


Fig 33

Es sei ABC ein Dreieck. Wir zeichnen von C eine Gerade~~x~~ die AB in D trifft.

Es sei $ADC = \Delta_1$

$CDB = \Delta_2$

$ABC = \Delta$, wobei die Δ die Flächeninhalte bezeichnen. Dann ist $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$

Liegt aber D nicht zwischen A und B so ist :

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 \quad \text{oder} \quad \Delta = \Delta_2 - \Delta_1$$

Diese Fallunterscheidung ist praktisch kaum durchführbar, wenn das Dreieck $ABCD$ nicht unmittelbar anschaulich, sondern durch die Koordinaten seiner Punkte gegeben ist. Sie besteht darin, dass jeweils die Inhalte der Teildreiecke <u>mit verschiedenen Vorzeichen</u> in Anschlag zu bringen sind.

Um diese und analoge Schwierigkeiten zu vermeiden, bildet man zu jedem Polygon eine Funktion der Eckenkoordinaten, die dem Betrag nach gleich dem Polygoninhalt ist, die aber je nach Lage ihrer Ecken von selbst verschiedene Vorzeichen annimmt. Hierzu dient der Begriff des Umlaufssinns; er spielt in der Ebene dieselbe Rolle, wie auf der Geraden der Richtungsbegriff, der den Übergang von Strecken zu Vektoren ermöglicht

Wir führen die Betrachtung nur für Parallelogramme und Dreiecke durch.

Einen der beiden in der Ebene möglichen Umlaufssinn führen wir willkürlich als „positiv" ein (man wählt gewöhnlich den dem Uhrzeiger entgegengesetzten)

Fig 34

Sei ABCD ein Parallelogramm; AB = DC = $\mathfrak{a}$, BC = AD = b. Dann definieren wir: $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist eine Zahl; ihr Betrag ist der Flächeninhalt von ABCD, bezogen auf eine willkürlich festgesetzte ~~Konstante~~ Flächeneinheit; $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Umlauf in der Reihenfolge A, B, C, D gemäss der früheren Festsetzung positiv ist oder nicht.

Fig 35

Dann gelten für $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ mehrere Rechenregeln, die, wie gefordert, von der Lage der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht mehr abhängen.

IX. $\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{b},\mathfrak{a})\ ;\ (\mathfrak{a},\mathfrak{o}) = 0 = (\mathfrak{o},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{a}) = (\mu\mathfrak{b},\mathfrak{b})}$

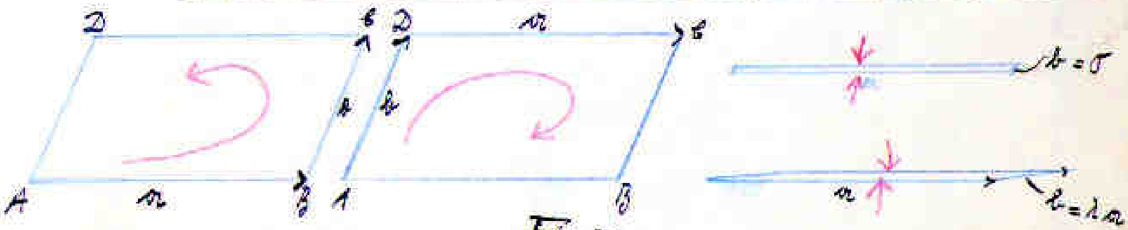


Fig 36

Beweis nach Fig. 36 klar.

X. $\underline{(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{b})}$

Beweis entsprechend der schrittweisen Definition des Vektors $\lambda\mathfrak{a}$ in § 1:

a) $\lambda > 0$ dann hat $(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ dasselbe Vorzeichen wie $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und $\lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Es genügt also, nur noch, die absoluten Beträge zu betrachten $|(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b})| = |\lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b})|$.

α) λ ganz   Beweis klar nach Fig. 37

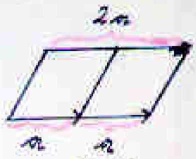


Fig 37

β) λ gebrochen rational; $\lambda = \frac{p}{q}$ dann zerlegt man $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bzw. $(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in q bzw. p Teilparallelogramme der Form $(\frac{1}{q}\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ (Fig. 38 für $\lambda = \frac{2}{3}$)

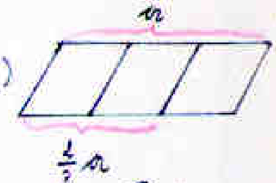


Fig 38

γ) λ irrational; Beweis durch Grenzübergang.

b) $\lambda = 0$ Dann folgt $\lambda(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ aus IX.

c) $\lambda < 0$ Dann hat $(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ entgegengesetztes Vorzeichen wie $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Für die absoluten Beträge gilt der Beweis a).

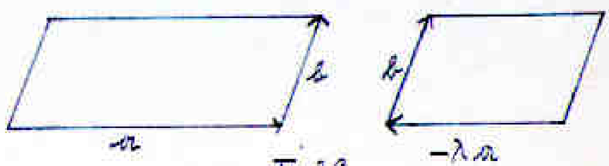


Fig 39

Für die Gleichung $(\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gilt der analoge Beweis.

XI. $\underline{(\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mu\mathfrak{a})}$ (Cavalieri-Prinzip der Ebene)

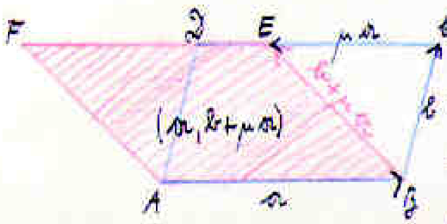


Fig 40

Es sei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gegeben durch ABCD. Wir bekommen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mu\mathfrak{a})$ durch Abtragen des Vektors $\mu\mathfrak{a}$ von C aus. Sein Endpunkt E liegt immer auf der Parallele zu AB durch C, da ja $\mu\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}$ ist.

ABCD und ABEF (Fig. 40) sind ergänzungsgleich (vgl. Fig. 32) also $|(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})| = |(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mu\mathfrak{a})|$. Aber auch die Umlaufssinne beider Parallelogramme sind gleich, weil B, C auf derselben Seite von AB liegen. Also $(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mu\mathfrak{a})$. Ebenso folgt $(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b},\mathfrak{b})$

~~[illegible]~~

XII. $\underline{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c})+(\mathfrak{b},\mathfrak{c}); \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b})+(\mathfrak{a},\mathfrak{c})}$

<u>Beweis</u>: 1.) $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ Dann ist die Beziehung nach IX richtig.

2.) $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$ Wir zerlegen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{c}$ und einem Hilfsvektor $\mathfrak{d} \nparallel \mathfrak{c}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \alpha\mathfrak{d} + \lambda\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b} &= \beta\mathfrak{d} + \mu\mathfrak{c} \\ \hline \mathfrak{a}+\mathfrak{b} &= (\alpha+\beta)\mathfrak{d} + (\lambda+\mu)\mathfrak{c} \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = (\alpha\mathfrak{d}+\lambda\mathfrak{c},\mathfrak{c})$

nach XI können wir $\lambda\mathfrak{c}$ fortlassen

nach X können wir α vor die Klammer setzen.

Also: $(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = \alpha(\mathfrak{d},\mathfrak{c})$

Entsprechend finden wir:

$$\underline{(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \beta(\mathfrak{d},\mathfrak{c})}$$

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{c})+(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\alpha+\beta)(\mathfrak{d},\mathfrak{c})$$

Andererseits ist aber, mindestens nach I, II.

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\alpha+\beta)(\mathfrak{d},\mathfrak{c})$$

Also $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c})+(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$

q.e.d.

Entsprechend verläuft der Beweis für

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b})+(\mathfrak{a},\mathfrak{c})$$

Durch zweimalige Anwendung von XII erhalten wir

XII* $\underline{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c})+(\mathfrak{a},\mathfrak{d})+(\mathfrak{b},\mathfrak{c})+(\mathfrak{b},\mathfrak{d})}$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir jetzt jedes beliebige Parallelogramm $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ der Ebene in Proportion setzen zu einem festen Grundparallelogramm $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$. $\mathfrak{c}_1$ habe bezüglich $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ die Koordinaten c_1^1 und c_1^2, ~~d.h.~~

$$\cancel{\mathfrak{c}_1 = c_1^1\mathfrak{a}_1 + c_1^2\mathfrak{a}_2}$$

$$\cancel{\mathfrak{c}_2 = c_2^1\mathfrak{a}_2 + c_2^2\mathfrak{a}_2}$$

$$\mathfrak{c}_1 = c_1^1\mathfrak{a}_1 +$$

$\mathfrak{c}_2$ habe die Koordinaten c_2^1 und c_2^2 , d.h.

$$\mathfrak{c}_1 = c_1^1 \mathfrak{a}_1 + c_1^2 \mathfrak{a}_2$$
$$\mathfrak{c}_2 = c_2^1 \mathfrak{a}_1 + c_2^2 \mathfrak{a}_2$$

Das wird jetzt eingesetzt in ($\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$) und nach XII* distributiv ausmultipliziert unter Benutzung von X .

$$(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2) = ([c_1^1 \mathfrak{a}_1 + c_1^2 \mathfrak{a}_2], [c_2^1 \mathfrak{a}_1 + c_2^2 \mathfrak{a}_2])$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2) = {} & c_1^1 c_2^1 (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1) \\ & + c_2^1 c_1^2 (\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_1) \\ & + c_1^1 c_2^2 (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \\ & + c_1^2 c_2^2 (\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2)\end{aligned}$$

Das 1. und 4. Glied fällt weg nach IX . Ausserdem ist $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1) = -(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ nach IX

$$\begin{aligned} * \quad (\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2) &= (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)(c_1^1 c_2^2 - c_2^1 c_1^2) \\ &\equiv (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

<u>Wir definieren allgemein</u> :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ <u>als 2-reihige Determinante.</u>

IX bis XII lesen wir jetzt als Rechenregeln für zweireihige Determinanten. <u>Wählen wir nämlich den Umlaufssinn des Parallelogramms ($\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$) als positiv und seinen Inhalt als Einheit des Flächeninhalts,</u> so wird

$$(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) = 1 ; \qquad (\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2) = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{vmatrix}$$

Also für

$$\mathfrak{a} = a^1 \mathfrak{a}_1 + a^2 \mathfrak{a}_2$$
$$\mathfrak{b} = b^1 \mathfrak{a}_1 + b^2 \mathfrak{a}_2$$

IX^D $$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

(Die zweireihige Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man die Spalten vertauscht)

Speziell gilt :

$$\mathrm{IX}^{D}\quad \begin{vmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b^1 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

(Eine zweireihige Determinante , bei der eine Spalte gleich 0 ist, ist selbst gleich 0).

Ferner :

$$\mathrm{IX}^{D}\quad \begin{vmatrix} a^1 & \lambda a^1 \\ a^2 & \lambda a^2 \end{vmatrix} = 0$$

(Eine zweireihige Determinante,bei der die Spalten proportional sind, ist gleich 0).

$$\mathrm{X}^{D}\quad \begin{vmatrix} \lambda a^1 & b^1 \\ \lambda a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

(Man darf den gemeinsamen Faktor einer Spalte der zweireihigen Determinante vor die Determinante setzen).

$$\mathrm{XI}^{D}\quad \begin{vmatrix} (a^1+\lambda b^1) & b^1 \\ (a^2+\lambda b^2) & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

(Man darf zu den Gliedern einer Spalte ein Vielfaches der entsprechenden Glieder einer andern Spalte addieren,ohne dass die Determinante ihren Wert ändert).

$$\mathrm{XII}^{D}\quad \begin{vmatrix} (a^1+b^1) & c^1 \\ (a^2+b^2) & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(Wenn die Glieder einer Spalte einer Determinante sich aus den Gliedern zweier Spalten zusammensetzen,so darf man die Determinante danach auflösen).

Schliesslich folgt aus der Definition der " Transpositionssatz" :

$$\mathrm{XIII}\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

(Eine zweireihige Determinante ändert ihren Wert nicht,wenn man die Zeilen mit den Spalten vertauscht).

Aus $XIII_2$ folgen ~~de~~ weitere den Formeln IX_2^D bis XII_2^D entsprechende Sätze. Wir brauchen dort nur auf beiden Seiten der Gleichungen Transpositionen ($XIII_2$) vorzunehmen. Dann gelten die Sätze IX_2^D bis XII_2^D auch für die Zeilen einer zweireihigen Determinante.

Aus IX^D $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix}$

folgt z.B. nach XIII $\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}$

Entsprechend ist:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a^1 & b^1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \lambda a^2 & \lambda b^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \mu a^1 & \mu b^1 \end{vmatrix}$$

$$X_2^D \quad \begin{vmatrix} \lambda a^1 & \lambda b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \lambda a^2 & \lambda b^2 \end{vmatrix}$$

$$XI_2^D \quad \begin{vmatrix} a^1 + \lambda a^2 & b^1 + \lambda b^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$XII_2^D \quad \begin{vmatrix} a^1 + c^1 & b^1 + c^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Anwendungen zweireihiger Determinanten.

1. Berechnung von ~~Gehalt~~ Inhalt und Umlaufsinn eines Dreiecks.

Das Dreieck ABC habe z.B. die Eckpunktskoordinaten

A	B	C
9	7	0
1	6	5

Wir bilden die ~~Koordinaten~~ Vektoren AB und BC. Sie erhalten die Koordinaten

AB	BC
7-9 = -2	0-7 = -7
6-1 = 5	5-6 = -1

Dann liefert $\frac{1}{2}(AB,BC)$ dem Betrag nach den Inhalt, dem Vorzeichen nach den Umlaufssinn von Δ ABC.

$$\frac{1}{2}(AB, BC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = +\frac{37}{2}$$

2. Lineare Abhängigkeit von Vektoren.

a) in der Ebene.

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Ebene sind dann und nur dann linear abhängig, wenn das von ihnen gebildete Parallelogramm keinen Flächeninhalt hat. Es muss also

$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 0$ sein, d.h. $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

Hierdurch löst sich folgende Aufgabe: Die Gleichung einer Geraden ist zu bestimmen, die durch zwei gegebene verschiedene Punkte Q und R geht. Parameterdarstellung dieser Geraden ist S. 29f abgeleitet.

P sei ein laufender Punkt der Geraden

$\underset{x^i}{P}$ $\underset{y^i}{Q}$ und $\underset{z^i}{R}$ mögen die Koordinaten haben (i = 1,2)

Damit die Gerade durch P Q und R hindurchgeht, müssen die Vektoren QP und QR linear abhängig sein, d.h. es ~~muss~~

muss
$$\begin{vmatrix} (x^1-y^1) & (z^1-y^1) \\ (x^2-y^2) & (z^2-y^2) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Das gibt eine wirklich lineare Gleichung in x^1 und x^2, nämlich

$$x^1(z^2-y^2) - x^2(z^1-y^1) = -y^1z^2 + y^2z^1$$

Diese Gleichung stellt nach S. 32 eine Gerade dar, wenn nur nicht beide Koeffizienten von x^1 und x^2 verschwinden. Das ist aber klar, denn für $z^2-y^2 = z^1-y^1 = 0$ wäre Q = R .

b) Im Raum.

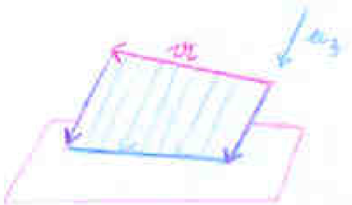
Zwei Vektoren $\mathfrak{a}(a^i)$ und $\mathfrak{b}(b^i)$ sind dann und nur dann linear abhängig, wenn die sämtlichen zweireihigen Determinanten, die sich aus der Matrix $\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix}$

bilden lassen, verschwinden; wenn also

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ist}$$

Dass diese Determinanten gleich Null sind, wenn $\lambda\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{b}$, folgt aus dem Satz für die Ebene. Es muss also noch gezeigt werden, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear abhängig sind, d.h. $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$, wenn obige Beziehung gilt.

$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ besagt, dass die durch $\mathfrak{e}_3$ als Projektionsvektor erzeugten Projektionen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf der (x^1, x^2)Ebene linear abhängig sind.



Fg 41

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$$

besagen das Entsprechende für die Projektionen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf der (x^1x^3)Ebene bzw. (x^2x^3)Ebene.

Es sind also die Projektionen von $\mathfrak{a}$ u. $\mathfrak{b}$ auf die Koordinatenebenen parallel. Wäre nun $\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$, so müssten die Projektionsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ alle in der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene liegen, sonst könnten die Projektionen nicht parallel sein. Das ist nicht der Fall, denn $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ sind linear unabhängig.

(Dieser Beweis beruft sich auf die Anschauung. ~~Der~~ Ein rechnerischer Beweis folgt später.)

3.) <u>Lösung linearer Gleichungssysteme durch Determinanten</u>

$$\begin{aligned} a^1x + b^1y &= c^1 \\ a^2x + b^2y &= c^2 \end{aligned}$$

sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Wir deuten:

a^1	und	a^2	als	Koordinaten	eines	Vektors	$\mathfrak{a}$
b^1	"	b^2	"	"	"	"	$\mathfrak{b}$
c^1	"	c^2	"	"	"	"	$\mathfrak{c}$

Es ist dann

$$x \cdot a + y \cdot b = c$$

Wir bilden $(a, xa + yb) = (a, c)$

Nach XI_2 können wir $x \cdot a$ fortlassen.

Nach X_2 " " y ~~ersetzen~~ vor die Klammer setzen, also

$$\underline{y(a, b) = (a, c)}$$

Entsprechend folgt aus $(xa + yb, b) = (c, b)$

$$\underline{x(a, b) = (c, b)}$$

Wir müssen jetzt eine Fallunterscheidung durchführen.

a)

$$(a, b) = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar: Die Lösung ist:

$$x = \frac{(c, b)}{(a, b)} \quad ; \quad y = \frac{(a, c)}{(a, b)}$$

(Wir haben nur gezeigt, dass, wenn es eine Lösung gibt, es diese sein muss. Dass dies auch wirklich eine Lösung ist, folgt analog S. 30 1/2).

Sind beide Gleichungen homogen, so ist die Lösung

$$x = y = 0$$

b) $(a, b) = 0$

Dann ist

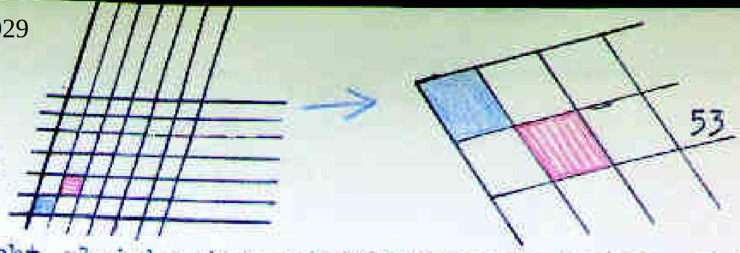
$$y \cdot 0 = (a, c)$$
$$x \cdot 0 = (c, b)$$

α) Es sei nicht $(a, c) = (c, b) = 0$. Dann gibt es keine Lösung des Gleichungssystems.

β) $(a, c) = (c, b) = 0$ Dann gibt es eine Lösung. Vorläufig sei dies nur für den homogenen Fall $c^1 = c^2 = 0$ bewiesen. Dann gibt es nämlich nach dem vorigen wegen

$$(a, b) = 0$$

Fig. 42



zwei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen x, y ,so dass $x\cdot a + y\cdot b = 0$. Denn a, b sind linear abhängig.

4.) Multiplikationssatz und affine Transformation von Flächeninhalten.

Bei affiner Transformation werden sämtliche Flächeninhalte mit derselben Zahl multipliziert, und sämtliche Umlaufsinne bleiben erhalten oder sämtliche Umlaufssinne werden umgekehrt. (speziell bleiben gleiche Flächeninhalte gleich)

Anschaulich kann man sich das klar machen, indem man das Koordinatensystem durch Parallele zu den Achsen in ein gleichmässiges Maschensystem (Fig. 42) zerlegt. Jeder Masche entspricht wieder genau eine Masche nach der Transformation. Wir können aber Flächeninhalte durch Summen solcher Maschen beliebig genau annähern, wenn die Maschen klein genug sind. Genauere Ausführung: a_1' und a_2' seien zwei Vektoren, die bei affiner Transformation übergehen in a_1 und a_2

Wie ist dann die Beziehung

$$(a_1', a_2') \longrightarrow (a_1, a_2) \qquad ?$$

Die allgemeinen Transformationsformeln

$$x^i = b^i + \sum_{k=1}^{2} a^i_k x^{k'} \qquad i = 1,2)$$

(vgl. S. 13) lauten für Vektorkomponenten

$$v^i = \sum_{l=1}^{2} a^i_l v^{l'}$$

da die Vektoren durch die Differenz von End- und Anfangspunktkoordinaten gegeben sind, sodass beim Subtrahieren b^i herausfällt. v' sind hierbei die Koordinaten von v im gestrichenen System. Es bestehen also die Gleichungen (wenn wir allgemein $|c^i_k|$ für $\begin{vmatrix} c^1_1 & c^1_2 \\ c^2_1 & c^2_2 \end{vmatrix}$

schreiben

$$(\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2) = |v_k^i| (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$$

~~und~~ und

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = |v_k^{i\,\prime}| (\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2')$$

Nun ist aber $(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2') = |a_k^i| (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ nach Definition der a_k^i. Also

$$|v_k^i| (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = |v_k^{i\,\prime}| |a_k^i| (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$$

also

$$\underline{|v_k^i| = |v_k^{i\,\prime}| \cdot |a_k^i|}$$

Dabei ist

$$v_k^i = \sum_{l=1}^{2} a_l^i v_k^{l\,\prime}$$

diesen Ausdruck setzen wir ein~~,~~ und schreiben b_k^i für $v_k^{i\,\prime}$. Dann lautet der Multiplikationssatz für zweireihige Determinanten[1]:

$$\text{XIV}_2 \qquad |a_k^i| |b_k^i| = \left| \sum_l a_l^i b_k^l \right| \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2 \Big)$$

Wir haben jetzt auch gezeigt, dass der Flächeninhalt eines Parallelogramms - und damit eines Dreiecks - und damit eines beliebigen Polygons, das ja in Dreiecke zerlegbar ist - bei affiner Transformation immer mit einer konstanten Zahl, der Transformationsdeterminante $|a_k^i|$ multipliziert wird. Die Umlaufssinne bleiben erhalten oder nicht, je nachdem $|a_k^i| \gtrless 0$.

---

1) Die vorstehende Ableitung von XIV_2 gilt nur für $|a_k^i| \neq 0$; aus Symmetriegründen gilt XIV auch für $|a_k^i| = 0, |b_k^i| \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen daher auch für $|a_k^i| = |b_k^i| = 0$. Damit sind alle Fälle erschöpft.

Flächeninhalt, Rauminhalt und Determinanten im dreidimensionalen Raum.

Verfeinerung der Inhaltsvergleichung im Raum durch Einführung des Schraubungssinns.

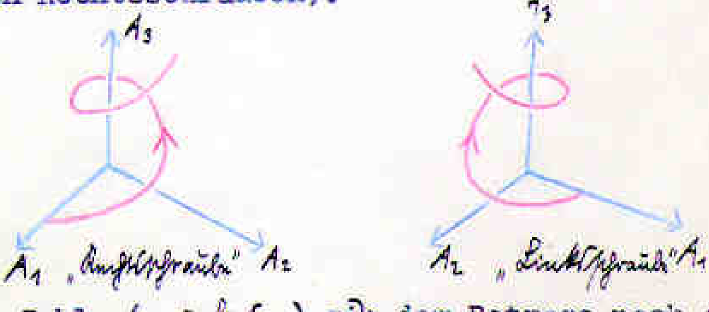
Durch die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist ein Quader dadurch gegeben, dass $\mathfrak{b}$ vom Endpunkt von $\mathfrak{a}$ aus und $\mathfrak{c}$ vom Endpunkt von $\mathfrak{b}$ aus abgetragen wird. (Fig. 43)

Fig 43

Vom Endpunkt von $\mathfrak{c}$ aus gesehen hat $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ positiven oder negativen Umlaufsinn. Diese beiden Möglichkeiten nennen wir die beiden "Schraubungssinne". Wir definieren dabei positiv und negativ so, dass der Grundquader, den wir einführen, positiven Schraubungssinn hat. Wir können den Schraubungssinn auch durch eine Rechts- oder Linksschraube darstellen.

(Die in der Technik verwendeten Schrauben sind gewöhnlich Rechtsschrauben).

Fig 44



Die Zahl $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ sei dem Betrage nach der Rauminhalt des Quaders ABCDEFGH. Das Vorzeichen von $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ sei positiv oder negativ, je nachdem der

Schraubungssinn des Quaders mit dem des Grundquaders $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ übereinstimmt oder nicht.

Es gelten folgende Rechenregeln, die von der Lage der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht abhängen.

$$\mathrm{IX}_3 \quad \underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{c})}$$
$$\underline{= -(\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{a})}$$

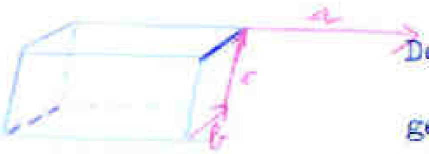


Fig 45

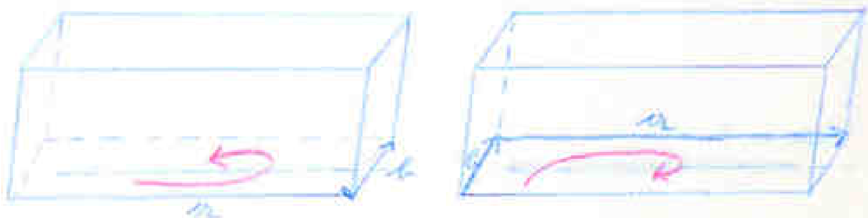
Der Beweis für $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{a})$ geht aus Fig. 45 hervor.

Es folgt ebenso:

$(\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{b})$

Der Beweis für $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{c})$ ist nach Fig. 46 klar.

Fig 46



Dann folgt nach dem ersten Teil des Satzes

$-(\mathfrak{b},\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{a})$

Weiterhin ist:

$$\mathrm{IX}_3 \quad \underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b},0) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\cancel{\mathfrak{b}}0) = (\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = 0 = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b})},$$

wie man leicht aus Fig. 47 ersehen kann.

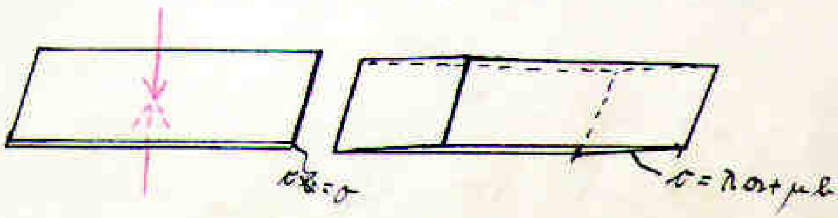


Fig 47

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

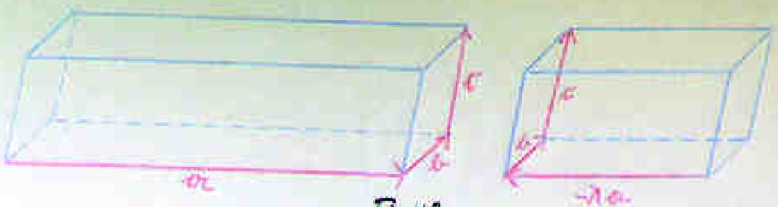


Fig 48

X_3 $\underline{(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{c})}$

a) $\lambda > 0$. Dann hat $(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ dasselbe Vorzeichen wie $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ und $\lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$. Es genügt also, nur noch die absoluten Beträge zu betrachten; dies geschieht völlig analog wie S. 45... für den Fall der Ebene.

b) $\lambda = 0$. Dann folgt $\lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ aus IX_3.

c) $\lambda < 0$. Dann hat $(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ (Fig. 48) entgegengesetztes Vorzeichen wie $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$, also gleiches wie $\lambda(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$. Für die absoluten Beträge gilt der Beweis a)

XI_3 $\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})}$

$\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{c},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})}$

$\underline{(\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+\mu\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})}$

(Cavalieri-Prinzip des Raumes)

Nach IX_3 genügt Beweis der <u>ersten</u> Gleichung.

Wir beweisen nun:

α) $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$

Fig 49

Es sei in Fig. 49

ABCHJKLM = $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ und

ABCDEFGH = $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a})$.

Es sind aber ABCDEFGH und ABCHJKLM ergänzungsgleich, denn sie sind die Differenz aus ABCHJKEF und dem Prisma

BJGCKD bzw. dem dazu kongruenten Prisma AMFHLE .

Es ist also

$|(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})| = |(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a})|$ und da die Schraubungssinne der beiden Quader gleich sind:

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) .$$

Entsprechend folgt

$\beta)$ $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mu\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$

Aus $\alpha)$ $\beta)$ folgt:

$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mu\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ q.e.d.

XII_3 $\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d})}$

$\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$

$\underline{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) + (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$

<u>Beweis:</u> 1) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear abhängig. Dann ist der Fall nach IX_3 erledigt.

2) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear unabhängig. Wir zerlegen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und einem Hilfsvektor $\mathfrak{n}$ (wobei $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n}$ linear unabhängig).

$$\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{d} = \nu\mathfrak{a} + \varrho\mathfrak{b} + \delta\mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = (\lambda+\nu)\mathfrak{a} + (\mu+\varrho)\mathfrak{b} + (\gamma+\delta)\mathfrak{n}$$

Dann ist:

$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}+\gamma\mathfrak{n})$

Nach XI_3 können wir $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ fortlassen

" X_3 " " γ vor die Klammer setzen.

Also

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \gamma(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n})$$ Entsprechend finden wir

$$\underline{(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) = \delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n})}$$

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) = (\gamma+\delta)(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n})$$

Andererseits ist aber, wiederum nach X_3 und XI_3

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = (\gamma+\delta)(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{n})$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt :

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d})$$ q.e.d.

Hieraus folgt nach IX_3

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d})$$ und

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) + (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}) .$$

Die Formeln XII_3 geben uns die Möglichkeit, alle Quader $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ auf einen Grundquader $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ zu beziehen, der aus den Grundvektoren des Koordinatensystems besteht und positiven Schraubungssinn hat.

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = +1$$

Wir zerlegen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nach dem Koordinatensystem:

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{3} a^i \mathfrak{a}_i$$

$$\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{3} b^i \mathfrak{a}_i$$

$$\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{3} c^i \mathfrak{a}_i$$

also: $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \left(\sum a^i \mathfrak{a}_i, \sum b^k \mathfrak{a}_k, \sum c^l \mathfrak{a}_l\right)$

Aus-multipliziert ~~und~~ nach XII, ergibt das *)

$$\left(\sum a^i \mathfrak{a}_i, \sum b^k \mathfrak{a}_k, \sum c^l \mathfrak{a}_l\right) = \sum_{i,k,l=1}^{3} a^i b^k c^l (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l)$$

Nun ist

a) $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = 0$, wenn 2 Indizes gleich sind.

b) $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = \pm 1$, wenn alle 3 Indizes verschieden sind. Und zwar ist nach IX_3

$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = +1$ für die Reihenfolge

i,k,l = 1,2,3 = 2,3,1 = 3,1,2 und gleich − 1 für

i,k,l = ~~XXXXX~~ 2,1,3 = 1,3,2 = 3,2,1 .

Zur Abkürzung der Schreibweise definieren wir das Symbol δ_{ikl} durch die Forderung

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = \delta_{ikl} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$$

Also

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum_{i,k,l=1}^{3} a^i b^k c^l (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = \sum a^i b^k c^l \delta_{ikl} \underbrace{(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)}_{+1}$$

<u>Damit haben wir die Definition der 3-reihigen Determinante: Jede Zahl $\sum_{i,k,l=1}^{3} a^i b^k c^l \delta_{ikl}$ heisst 3-reihige Deter-</u>

*) Summen werden multipliziert nach der Formel:

$$\left(\sum_{l=1}^{3} x^l\right)\left(\sum_{l=1}^{3} y^l\right) = \sum_{i,k=1}^{3} x^i y^k,$$ wobei i und k unabhängig von einander von 1 bis 3 laufen.

minante und wir schreiben:

$$\sum_{i\kappa l=1}^{3} a^i b^\kappa c^l \delta_{i\kappa l} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

IX_3 bis XII_3 können wir jetzt als Rechenregeln für dreireihige Determinanten lesen. Sie lauten dann:

IX_3^D
$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b^1 & a^1 & c^1 \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & 0 \\ a^2 & b^2 & 0 \\ a^3 & b^3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & \lambda a^1 + \mu b^1 \\ a^2 & b^2 & \lambda a^2 + \mu b^2 \\ a^3 & b^3 & \lambda a^3 + \mu b^3 \end{vmatrix} = 0$$

X_3^D
$$\begin{vmatrix} \lambda a^1 & b^1 & c^1 \\ \lambda a^2 & b^2 & c^2 \\ \lambda a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

XI_3^D
$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 + \lambda a^1 + \mu b^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 + \lambda a^2 + \mu b^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 + \lambda a^3 + \mu b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

XII_3^D
$$\begin{vmatrix} a^1 + b^1 & c^1 & d^1 \\ a^2 + b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 + b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & c^1 & d^1 \\ a^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^1 & c^1 & d^1 \\ b^2 & c^2 & d^2 \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Untersuchung von δ_{ikl} .

Es ist sicher $\delta_{ikl} = -1$,wenn die Reihenfolge i,k,l aus 1,2,3 durch einmalige Vertauschung hervorgeht (nach IX_3).Hieraus folgt allgemein

$\delta_{ikl} = +1$, wenn die Reihenfolge i,k,l aus 1,2,3 erzeugbar ist durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen.

$\delta_{ikl} = -1$, wenn die Reihenfolge i,k,l aus 1,2,3 erzeugbar ist durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen.

(Es ist hierbei nicht trivial,dass ~~XX~~ i,k,l aus 1,2,3 immer durch eine gerade Anzahl oder immer durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen hervorgeht,einerlei, wie man ~~XXX~~ vertauscht. Für unseren Fall bei drei Gliedern kann man die Richtigkeit aus IX_3 ablesen. Vgl. ~~XXXX~~ Anhang S.3/10/13)

Diese Überlegungen ermöglichen uns,den "Transpositionssatz" für dreireihige Determinanten zu beweisen.

$$XIII_3 \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

(Eine dreireihige Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man die Zeilen mit den Spalten vertauscht).

Anders geschrieben:

$$|a_k^i| = |a_i^k| \quad \text{, wobei wie S. 61 gesetzt ist}$$

$$|a_k^i| = \sum a_1^i a_2^k a_3^l \delta_{ikl}$$

$$\text{also} \quad |a_i^k| = \sum a_i^1 a_k^2 a_l^3 \delta_{ikl}$$

Wir vertauschen in der letzten Gleichung a_i^1, a_k^2 und a_l^3 so , dass die i,k,l in der Reihenfolge 1,2,3 angeordnet sind. Es ist dann

$$\left|a_i^k\right| = \sum_{ikl} a_1^\varrho \; a_2^\sigma \; a_3^\tau \, \delta_{ikl}$$

wobei $\varrho\sigma\tau$ eine Permutation von 1,2,3 ist und zwar die zu ~~ik~~ i,k,l inverse Permutation, denn $\varrho\sigma\tau$ ist aus 1,2,3 dadurch entstanden, dass i,k,l in 1,2,3 übergeführt wurde. Beide Permutationen sind also durch die gleiche Anzahl von Vertauschungen erzeugt. Also $\delta_{ikl} = \delta_{\varrho\sigma\tau}$,also

$$\left|a_i^k\right| = \sum_{ikl} a_1^\varrho \, a_2^\sigma \, a_3^\tau \, \delta_{\varrho\sigma\tau} = \left|a_k^i\right| \qquad q.e.d$$

Aus $XIII_3$ folgen weiter den Formeln IX_3^D bis XII_3^D entsprechende Formeln für die <u>Zeilen</u> von dreireihigen Determinanten.

$$IX_3^D \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^1 & b^1 & c^1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \lambda a^1 + \mu a^2; & \lambda b^1 + \mu b^2; & \lambda c^1 + \mu c^2 \end{vmatrix}$$

$$X_3^D \quad \begin{vmatrix} \lambda a^1 & \lambda b^1 & \lambda c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$XI_3^D \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 + \lambda a^1 + \mu a^2; & b^3 + \lambda b^1 + \mu b^2; & c^3 + \lambda c^1 + \mu c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{XII}^D_3 \qquad \begin{vmatrix} a^1+d^1 & b^1+d^2 & c^1+d^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d^1 & d^2 & d^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung dreireihiger Determinanten geschieht nach der "Sarrus-schen Regel"x),die durch Fig. 51

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} b & c & a & b & c & a & b \\ e & f & d & e & f & d & e \\ h & i & g & h & i & g & h \end{array}$$

Fig. 51

erklärt ist. Dabei verbinden die schrägen Linien die Glieder, die jeweils miteinander multipliziert werden müssen, um die einzelnen $a_1^i\ a_2^k\ a_3^l$ zu erhalten.

Die Sarrus-sche Regel besagt weiterhin,dass die Produkte von links oben nach rechts unten genommen positiv, die andern negativ zu rechnen sind. Die Determinante in Fig. 51 lautet also:

$$a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - a\,f\,h - b\,d\,i - c\,e\,g\,.$$

(Beweis der Regel durch Verifizieren).

Der "Entwicklungssatz" besagt,dass jedes Glied der Determinante mit seiner Unterdeterminante multipliziert werden muss. Dabei definieren wir als Unterdeterminante eines Gliedes die (zweireihige) Determinante,die entsteht, durch Streichen der Zeile und Spalte,in der das betreffende Glied steht.

(In der Determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ hat z.B. d die Unterdeterminante $\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$

x) Für Determinanten höherer Ordnung gilt keine analoge Regel.

Es genügt, den Satz für einen einzigen Fall zu beweisen, da wir durch eine gewisse Anzahl von Vertauschungen der Zeilen und Spalten jedes Glied z.B. an die Stelle links oben bringen können. Bei solchen Vertauschungen bleiben aber Unterdeterminanten Unterdeterminanten. Für diesen Spezialfall folgt der Satz aus der Sarrusschen Regel.

Anwendungen dreiheihiger Determinanten.

1) Berechnung von Inhalt und Schraubungssinn eines Tetraeders.

Das Tetraeder ABCD habe die Eckpunktskoordinaten

$$\underset{x^i}{\underbrace{A}} \qquad \underset{y^i}{\underbrace{B}} \qquad \underset{z^i}{\underbrace{C}} \qquad \underset{u^i}{\underbrace{D}}$$

Wir bilden die Vektoren AB $(y^i - x^i)$, BC $(z^i - y^i)$, und CD $(u^i - z^i)$.

Dann liefert 1/6 (AB,BC,CD) dem Betrage nach den Inhalt, dem Vorzeichen nach den Schraubungssinn des Tetraeders ABCD.

2) Lineare Abhängigkeit dreier Vektoren im Raum.

Drei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen, d.h. wenn der Quader, den sie aufspannen, keinen ~~Flächen~~ Rauminhalt hat. Es muss also sein:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 0$$

Hierdurch löst sich folgende Aufgabe: Die Gleichung einer Ebene ist zu bestimmen, die durch drei Punkte Q,R und S allgemeiner Lage geht. Parameterdarstellung dieser Ebene ist S. 30 abgeleitet. P sei ein laufender Punkt der Ebene mit den Koordinaten x^i

Q habe die " y^i

R " " " z^i

S " " " u^i

Damit die Ebene durch P,Q,R und S hindurchgeht, müssen die Vektoren QR, QS und QP linear abhängig sein, d.h. es muss

$$\begin{vmatrix} (z^1 - y^1) & (u^1 - y^1) & (x^1 - y^1) \\ (z^2 - y^2) & (u^2 - y^2) & (x^2 - y^2) \\ (z^3 - y^3) & (u^3 - y^3) & (x^3 - y^3) \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Dies ist eine lineare Gleichung in x^1, x^2 und x^3. Die x^i stehen nämlich in einer Spalte, ihre Unterdeterminanten, mit denen sie multipliziert werden, enthalten also nur konstante Glieder. Die Gleichung lautet

$$x^1u_1 + x^2u_2 + x^3u_3 + u^4 = 0$$

u_1, u_2 und u_3 sind die Unterdeterminanten aus der zweiten und dritten Spalte. Diese dürfen nach S. 23 nicht alle zugleich verschwinden. Das ist klar, denn für $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ wären nach S.50 - 51 QR und QS linear abhängig, also Q,R und S keine Punkte allgemeiner Lage.

3) Lösung linearer Gleichungssysteme durch Determinanten.

$$\begin{aligned} a^1x + b^1y + c^1z &= d^1 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= d^3 \end{aligned}$$

sei ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten.

Wir deuten

a^1, a^2 und a^3 als Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{a}$

b^1, b^2 und b^3 " " " " $\mathfrak{b}$

c^1, c^2 und c^3 " " " " $\mathfrak{c}$

d^1, d^2 und d^3 " " " " $\mathfrak{d}$

Es ist dann
$$x \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} + z \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$$

Wir bilden $(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$

Nach XI_3 können wir $\mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z$ fortlassen

" X_3 " " x vor die Klammer setzen;

also
$$\underline{x(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})}$$

Entsprechend folgt aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c})$
$$\underline{y(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c})}$$

und aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d})$
$$\underline{z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d})}$$

Wir führen jetzt eine Fallunterscheidung durch.

a) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \neq 0$

Dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar; die Lösung ist:

$$x = \frac{(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})} \qquad y = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})} \qquad z = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d})}{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})}$$

Wir haben zunächst nur gezeigt, dass, wenn es eine Lösung gibt, es diese sein muss. Dass es nun wirklich eine Lösung gibt, folgt aus S.30 1/2; da $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \neq 0$ linear unabhängig sind, ist $\mathfrak{d}$ in der Form $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z$ darstellbar. Ist das Gleichungssystem homogen, so ist die

Lösung

$$x = y = z = 0 .$$

b) $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = 0$ Dann ist

$$x \cdot 0 = (\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$
$$y \cdot 0 = (\mathfrak{a},\mathfrak{d},\mathfrak{c})$$
$$z \cdot 0 = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d})$$

α) Es sei nicht $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{d},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) = 0$ dann gibt es keine Lösung des Gleichungssystems.

β) $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{d},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{d}) = 0$ dann gibt es eine Lösung. Vorläufig sei dies nur für den homogenen Fall $d^1 = d^2 = d^3 = 0$ bewiesen. Dann gibt es nämlich nach dem vorigen wegen $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = 0$ drei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen x,y und z so dass $x \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \cdot z = 0$; denn $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind linear abhängig.

4. Multiplikationssatz und affine Transformation von Rauminhalten.

$\mathfrak{w}_1', \mathfrak{w}_2', \mathfrak{w}_3'$ seien 3 Vektoren, die bei affiner Transformation übergehen in $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_3$. Wie ist die Beziehung

$$(\mathfrak{w}_1', \mathfrak{w}_2', \mathfrak{w}_3') \to (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_3) \quad ?$$

Die Transformationsformeln der Vektorkomponenten lauten

$$v_k^i = \sum_{l=1}^{3} a_l^i \, v_k^{l\prime} \qquad \Big({i \atop k} \Big\} = 1, 2, 3 \Big)$$

(vgl.S.53). v' sind hierbei die Koordinaten von $\mathfrak{w}$ im gestrichenen System. Es bestehen also die Gleichungen :

$$(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_3) = |v_k^i| \, (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$$

und $(\mathfrak{w}_1', \mathfrak{w}_2', \mathfrak{w}_3') = |v_k^{i\prime}| \, (\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3')$

Nun ist aber $(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3') = |a_k^i| \, (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ nach Definition von $|a_k^i|$. Also

$$|v_k^i| \, (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = |v_k^{i\prime}| \, |a_k^i| \, (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$$

$$\underline{|v_k^i| = |v_k^{i\prime}| \, |a_k^i|}$$

Schreiben wir (der Symmetrie halber) für $|v_k^{i\prime}|$ $|b_k^i|$ und setzen ~~XXX~~ ein

$$|v_k^i| = \cancel{v_k^{i\prime}} \left| \sum_{l=1}^{3} a_l^i \, b_k^l \right| ,$$

so lautet der Multiplikationssatz für 3-reihige Determinanten:

$$\underline{\mathrm{XIV}}_3 \qquad |a_k^i| \, |b_k^i| = \left| \sum_{l=1}^{3} a_l^i \, b_k^l \right| \qquad \Big({i \atop k} \Big\} = 1, 2, 3 \Big)$$

Geometrische Deutung: Bei affiner Transformation werden sämtliche Rauminhalte mit einer Konstanten Zahl, der Transformationsdeterminante $|a^i_k|$ multipliziert. Die Umlaufssinne bleiben sämtlich erhalten oder werden sämtlich umgekehrt, je nachdem $|a^i_k| \gtrless 0$ ist x)

5. Anwendung 3-reihiger Determinanten in der Ebene.

Wann liegen in der Ebene 3 gegebene Punkte

P	Q	R	mit den Koordinaten
x^1	y^1	z^1	
x^2	y^2	z^2	

auf einer Geraden?

Wenn es eine Gerade durch die 3 Punkte gibt, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 = 0$$
$$u_1 y^1 + u_2 y^2 + u_3 = 0$$
$$u_1 z^1 + u_2 z^2 + u_3 = 0$$

Diese fassen wir auf als homogenes Bestimmungsgleichungssystem für u_1, u_2 und u_3. Wir wissen: dieses System hat eine nicht triviale Lösung u_1, u_2, u_3, wenn die 3-reihige Determinante aus den Koeffizienten verschwindet. Also ist

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & 1 \\ y^1 & y^2 & 1 \\ z^1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o) die Bedingung dafür, dass P, Q, R auf einer Geraden liegen.

x) $|a^i_k| = 0$ ist ausgeschlossen, denn dann wären die Vektoren $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$ linear abhängig (vgl. S. 65), was der Voraussetzung widerspricht.

o) Die Voraussetzung S. 32 ist erfüllt, dass nicht $u_1 = u_2 = 0$. Denn wäre $u_1 = u_2 = 0$, so ergäbe sich auch $u_3 = 0$, wir hätten also die triviale Lösung, entgegen unserer Annahme.

Auf S. 50 hatten wir hierfür die Bedingung gefunden:

$$\begin{vmatrix} (x^1 - y^1) & (x^1 - z^1) \\ (x^2 - y^2) & (x^2 - z^2) \end{vmatrix} = (PQ, PR) = 0 ,$$

d.h. lineare Abhängigkeit der Vektoren PQ und PR.

Es muss also ein Zusammenhang bestehen zwischen der 3-reihigen und der 2-reihigen Determinante, und wir behaupten:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & 1 \\ y^1 & y^2 & 1 \\ z^1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x^1 - y^1) & (x^1 - z^1) \\ (x^2 - y^2) & (x^2 - z^2) \end{vmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & 1 \\ y^1 & y^2 & 1 \\ z^1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & 1 \\ (y^1 - x^1) & (y^2 - x^2) & 0 \\ (z^1 - x^1) & (z^2 - x^2) & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} (y^1 - x^1) & (y^2 - x^2) \\ (z^1 - x^1) & (z^2 - x^2) \end{vmatrix}$$

(entwickelt nach den Elementen der 3.Spalte).

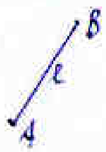
$$= \begin{vmatrix} (x^1 - y^1) & (x^2 - y^2) \\ (x^1 - z^1) & (x^2 - z^2) \end{vmatrix} \quad \text{(beide Spalten mit } -1 \text{ multipliziert)}$$

$$= \begin{vmatrix} (x^1 - y^1) & (x^1 - z^1) \\ (x^2 - y^2) & (x^2 - z^2) \end{vmatrix} \quad \text{(Transpositionsgesetz)}$$

II. Kapitel

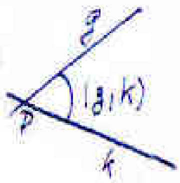
II. Elemente der Euklidischen Metrik.

Die Metrik ist derjenige Teil der Geometrie, der sich mit den Begriffe <u>Länge</u> und <u>Winkel</u> beschäftigt. Die euklidische Metrik setzt das Parallelenaxiom (S.1) voraus, während die nichteuklidische~~n~~ Längen und Winkel einführt, ohne die Existenz von Parallelen vorauszusetzen. Wir wollen uns hier mit der <u>euklidischen</u> Metrik beschäftigen (Literatur: Hilbert, Grundlagen der Geometrie).



Wir definieren: Ein Punktpaar AB hat einen „Abstand" l oder bildet eine „Strecke" mit der „Länge" l.

Fig X51a



Zwei Geraden g und k durch einen Punkt P bestimmen einen „Winkel" (g,k).

II . Elemente der Euklidischen Metrik.

Die Metrik ist derjenige Teil der Geometrie, der sich mit den Begriffen Länge und Winkel beschäftigt. Die euklidische Metrik setzt das Parallelenaxiom (S.1) voraus, während die nichteuklidische Längen und Winkel einführt, ohne die Existenz von Parallelen vorauszusetzen. Wir wollen uns hier mit der euklidischen Metrik beschäftigen (Literatur: Hilbert, Grundlagen der Geometrie).

§ 5 Ebene.

Aus den Axiomen der Euklidischen Metrik folgt der pythagoreische Lehrsatz (wahrscheinlich von den Babyloniern, sicher nicht erst von Pythagoras stammend) :
Im rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ gilt die Beziehung

$$|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 = |\mathfrak{c}|^2$$

Wir bezeichnen dabei die Länge eines Vektors $\mathfrak{d}$ mit $|\mathfrak{d}|$ oder d .

Fig 51 b

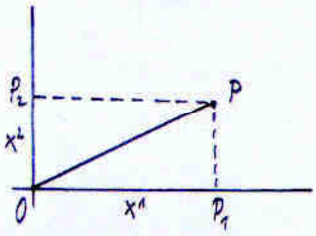
Einführung des rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems.

Wir wählen die Grundvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ des affinen Koordinatensystems speziell so, dass sie zugleich Einheitsvektoren sind, wobei wir als "Einheitsvektor" $\mathfrak{n}$ jeden definieren, dessen Länge $|\mathfrak{n}| = 1$ ist. Also:

$$|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = 1$$

Weiterhin lassen wir $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ senkrecht aufeinander stehen. Die früher abgeleiteten Beziehungen unseres affinen Koordinatensystems bleiben natürlich vollkommen in Kraft. (Das System, das entsteht, heisst: " rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem".)

Fig 52



Ein Punkt P hat die Koordinaten x^1, x^2, wenn

$O P_1 = x^1 \mathfrak{a}_1$ und

$O P_2 = x^2 \mathfrak{a}_2$;

$O P_1$ und $O P_2$ sind hierbei die senkrechten Projektionen von O P auf die Koordinatenachsen.

Da $|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = 1$ ist, gilt also:

$$O P_1 = |x^1|$$
$$O P_2 = |x^2|$$

Wir können die Koordinaten auch durch $O P = \mathfrak{g}$ und den Winkel $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{g})$ bzw. $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{g})$ ausdrücken. (Wir schreiben dem Winkel vorläufig kein Vorzeichen zu). Der Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$ ist nicht mit dem Determinantensymbol $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zu verwechseln, das in folgendem nicht angewandt wird.

Es ist dann

$$x^1 = |\mathfrak{g}| \cdot \cos(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$$
$$x^2 = |\mathfrak{g}| \cdot \cos(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2) = |\mathfrak{g}| \cdot \sin(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\sphericalangle(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$ und $\sphericalangle(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ zusammen einen rechten Winkel bilden.

Die Länge von $\mathfrak{g}$ berechnen wir mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes :

$$1. \quad \underline{|\mathfrak{g}|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2}$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Dieselbe Formel gilt für jeden Vektor, wie man sich leicht klar machen kann, indem man ihn vom Koordinatenursprung aus abträgt. $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiger Vektor mit den Komponenten a^1 und a^2. Dann ist:

$$2.\quad |\mathfrak{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2$$

Den Vektor können wir auch durch seinen Anfangspunkt und Endpunkt ausdrücken. Die Formel kann also für die Entfernung zweier Punkte $P(x^i)$ ~~ohd~~ $Q(y^i)$ umgeschrieben werden und lautet dann:

$$3.\quad |\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|^2 = (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2$$

Dabei sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Vektoren mit den Komponenten x^1, x^2 bzw. y^1, y^2. Ausgerechnet ergibt sich die Formel:

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(y^1x^1 + y^2x^2)$$

und da:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = |\mathfrak{y}|^2$$
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = |\mathfrak{x}|^2$$

folgt:

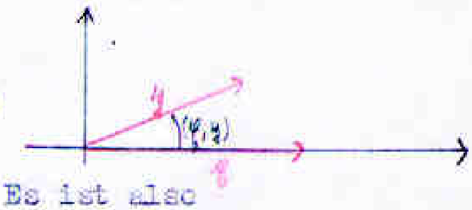
$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|^2 = |\mathfrak{y}|^2 + |\mathfrak{x}|^2 - 2(y^1x^1 + y^2x^2)$$

Der Ausdruck $(y^1x^1 + y^2x^2)$, den wir durch ein Symbol $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ ausdrücken wollen, ist dabei nur von den Längen der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ abhängig, nicht vom Koordinatensystem, obgleich er durch Koordinaten ausgedrückt ist; denn wir können schreiben:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = (y^1x^1 + y^2x^2) = 1/2\,(|\mathfrak{y}|^2 + |\mathfrak{x}|^2 - |\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|^2)$$

Um die geometrische Bedeutung dieses Ausdrucks zu erkennen, wählen wir ein Koordinatensystem so, dass eine Achsenrichtung mit der $\mathfrak{x}$ -Richtung zusammenfällt. Dann sind die Koordinaten

Fig 53



$x^1 = |\mathfrak{x}|$

$x^2 = 0$

$y^1 = |\mathfrak{y}| \cos (\mathfrak{x},\mathfrak{y})$

Es ist also

$$4.\ \underline{\mathfrak{x}\mathfrak{y} = x^1y^1 + x^2y^2 = |\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}| \cos (\mathfrak{x},\mathfrak{y})}$$

Wir nennen $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ "<u>inneres (oder skalares) Produkt</u>" von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Wir können es bis aufs Vorzeichen deuten als Produkt der Länge des einen Vektors mal der Länge der Projektion des 2. auf den ersten:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = |\mathfrak{y}| \cdot \underbrace{|\mathfrak{x}| \cos (\mathfrak{x},\mathfrak{y})}_{\pm x^1}$$

In Formel 3 eingesetzt, erhalten wir den <u>Cosinussatz für schiefwinklige Dreiecke:</u>

Fig 54

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{x} \qquad |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2 - 2|\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}| \cdot \cos(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$$

<u>Rechenregeln für das innere Produkt</u> .

1) Spezialfälle.

α) $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$

Dann ist $\sphericalangle (\mathfrak{x} , \mathfrak{y}) = 0$,

$\cos (\mathfrak{x} , \mathfrak{x}) = 1$

$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2 = |\mathfrak{x}|^2$

β) $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$

a) wenn $\mathfrak{x} = 0$ oder

$\mathfrak{y} = 0$

b) wenn $\cos (\mathfrak{x} , \mathfrak{y}) = 0$, d.h. wenn $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y}$

~~2)XXXXXXXXX~~

2) Allgemeine Regeln.

Aus der Definition

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = x^1y^1 + x^2y^2 \qquad \text{folgt:}$$

α)(Kommutatives Gesetz)

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$$

β)(Assoziatives Gesetz)

$$\lambda\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y} = \lambda\cdot\mathfrak{x}\mathfrak{y}$$

Beweis: Beide Seiten sind gleich $\lambda x^1y^1 + \lambda x^2y^2$

γ) (Distributives Gesetz)

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z} + \mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

Beweis: $(x^1 + y^1)z^1 + (x^2 + y^2)z^2 = x^1z^1 + x^2z^2 + y^1z^1 + y^2z^2$

3) Vorzeichen. von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$

$\mathfrak{x}\mathfrak{y} > 0$, wenn $\sphericalangle(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ spitz ist

$\mathfrak{x}\mathfrak{y} < 0$, wenn $\sphericalangle(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ stumpf ist.

Denn gemäss der Formel

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = |\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{y}|\cdot\cos(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$$

ist das Vorzeichen von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ gleich dem von $\cos(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$

<u>Deutung der Koeffizienten der Geradengleichung.</u>

In den beiden Formen der Geradengleichung

1) $x^1 = x_0^1 + t\,b^1$ (Parameterdarstellung)

$\quad x^2 = x_0^2 + t\,b^2$

und

2) $u_1x^1 + u_2x^2 + u_3 = 0$

wollen wir die Koeffizienten für unser rechtwinkliges cartesisches System geometrisch deuten.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

1) Gegeben sind

der Punkt P_0 und der Vektor b

$$\underbrace{P_0}_{x_0^1,\; x_0^2} \qquad \underbrace{b}_{b^1,\; b^2}$$

O.B.d.A. können wir verlangen, dass

$$b^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2 = 1 \quad {}^{*)}$$

Unter dieser Annahme behaupten wir:

Der Parameter t bedeutet den Abstand des laufenden Punktes $P\ (x^i)$ vom festen Punkt $P_0\ (x_0^i)$.

$$|t| = P_0 P$$

Zum Beweis schreiben wir die Gerade in vektorieller Form:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{b}$$

oder

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = t \cdot \mathfrak{b}$$

Es gilt aber

$$|P_0 P| = |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| = |t \cdot b| \qquad \text{q.e.d.}$$

Man nennt b^1 und b^2 die <u>Richtungskosinus</u> von b in unserem System. Nach Definition der Koordinaten ist nämlich

$$b^1 = \cos(b, \mathfrak{a}_1)$$
$$b^2 = \cos(b, \mathfrak{a}_2)$$

, weil b ein Einheitsvektor ist.

---

*) n.V. ist $b \neq 0$. Jedem Vektor $\mathfrak{c} \neq 0$ kann man einen parallelen Einheitsvektor b, $|b| = 1$ zuordnen durch die Vorschrift $b = \frac{1}{|\mathfrak{c}|}\mathfrak{c}$

2) Die Gleichung $u_1x^1 + u_2x^2 + u_3 = 0$ stellt nur dann eine Gerade dar, wenn nicht $u_1 = u_2 = 0$ ist. Dieser Fall sei also ausgeschlossen.

Wir fassen u_1 und u_2 auf als Komponenten eines Vektors

$\mathfrak{u} \neq 0$

u_1

u_2

Dann lautet die Gleichung:

$\mathfrak{u}\mathfrak{x} + u_3 = 0$ allgemein, und für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}_0$ der Geraden

$$\underline{\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 + u_3 = 0}$$

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0$$

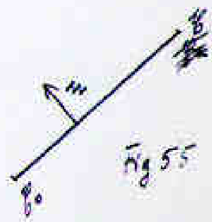


Fig 55

Es ist also überall auf der Geraden

$$\mathfrak{u} \perp \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$$

Die Koeffizienten u_1 und u_2 der Geradengleichung bedeuten also geometrisch die Komponenten eines Vektors, der auf der Geraden senkrecht steht.

Die Gleichung

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3 = 0$$

heisst „Hesse'sche Normalform" der Grundgleichung, falls $u_1^{\,2} + u_2^{\,2} = 1$ ist, wenn also $\mathfrak{u}$ ein Einheitsvektor ist. Wir führen L(x) als Symbol für die linke Seite einer solchen Gleichung ein und bekommen dann für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$, der nicht auf der Geraden liegen muss, und einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden die Beziehung:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{u}\mathfrak{y} + \tilde{u}_3 = \mathfrak{u}(\mathfrak{y}-\mathfrak{x}) + \tilde{u}_3 + \mathfrak{u}\mathfrak{x}$$

Da $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x} + \tilde{u}_3 = 0$ ist, folgt

$$\underline{\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})}$$

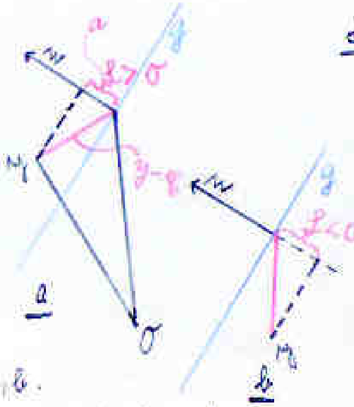


Fig 56 a, b.

$\mathfrak{L}(\mathfrak{y})$ ist das skalare Produkt von $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}$, d.h. aber (s.o.) $|\mathfrak{u}|$ multipliziert mit der Projektion a von $(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{u}$ (bis aufs Vorzeichen). Dabei ist a der Abstand des Punktes y von der Geraden g (Fig. 56). Es ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) = \pm\, a\,|\mathfrak{u}|$ und da $|\mathfrak{u}| = 1$ ist,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) = \pm\, a$$

Das bedeutet: Die Hesse'sche Normalform liefert uns den Abstand jedes beliebigen Punktes von der Geraden, wenn wir die Koordinaten des Punktes einsetzen. Für Punkte auf der Geraden wird dann natürlich $\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) = 0$.
Das Vorzeichen von $\mathfrak{L}(\mathfrak{y})$ richtet sich danach, ob $\sphericalangle((\mathfrak{y}-\mathfrak{x}), \mathfrak{u})$ spitz oder stumpf ist, oder was dasselbe ist, ob $\mathfrak{y}$ auf der Seite der Geraden liegt, nach der $\mathfrak{u}$ hinzeigt oder auf der entgegengesetzten. $\mathfrak{L}(\mathfrak{y})$ ~~hat~~ also auf den beiden Seiten ~~der~~ der Geraden verschiedenes Vorzeichen. Es gilt die Regel:

Liegt $\mathfrak{y}$ mit dem Nullpunkt auf derselben Seite der Geraden, so ist das Vorzeichen von $\mathfrak{L}(\mathfrak{y})$ gleich dem Vorzeichen von u_3.

Anwendung: Beweis, dass die Winkelhalbierenden im Dreieck durch einen Punkt gehen. Die Seiten (1),(2) und (3) des Dreiecks seien gegeben durch folgende Gleichungen in Hesse'scher Normalform:

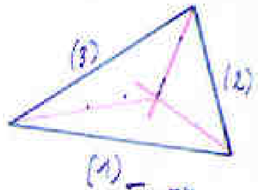


Fig 57

$$L_1(x) = 0$$
$$L_2(x) = 0$$
$$L_3(x) = 0$$

Wir wählen dabei die Vorzeichen der $L_i(x)$ so, dass für alle inneren Punkte des Dreiecks $L_i(x) > 0$ ist. Für jeden inneren Punkt **des Dreiecks** ist dann $L_i(x)$ ~~der~~ sein Abstand von der Seite (i). Jede Winkelhalbierende im Dreieck ist der geometrische Ort für alle inneren Punkte des Dreiecks, die von zwei Seiten denselben Abstand haben. Die Bedingung für die Winkelhalbierende von (1) und (2) ist also

$$L_1(x) = L_2(x)$$

oder $L_1(x) - L_2(x) = 0$. Entsprechend lautet die Bedingungsgleichung der Winkelhalbierenden von (1) und (3)

$$L_1(x) - L_3(x) = 0 .$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Winkelhalbierenden genügen beiden Gleichungen, also auch ihrer Differenz, d.h. der Gleichung

$$L_2(x) - L_3(x) = 0 .$$

Das ist aber gerade die Winkelhalbierende von (2) und (3), die also auch durch den Schnittpunkt geht. q.e.d.

Für je zwei Winkelhalbierende von Aussenwinkeln und die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Innenwinkels gelten entsprechende Schnittpunktssätze, die entsprechend bewiesen werden können, wobei natürlich auf das Vorzeichen der $L_i(x)$ geachtet werden muss.

~~Der Winkel zweier Geraden~~

Der Winkel zweier Geraden.

$$g:\ u_1x^1 + u_2x^2 + u_3 = 0$$
$$k:\ v_1x^1 + v_2x^2 + v_3 = 0$$

seien zwei Geraden. Gefragt ist nach cos (g, k) als Funktion der u_i, v_i.

Wir betrachten die beiden Vektoren

$\mathfrak{u}$ mit den Koordinaten u_1 und u_2

$\mathfrak{v}$ mit den Koordinaten v_1 und v_2

Dann ist $|\cos(g,k)| = |\cos(\mathfrak{u},\mathfrak{v})|$

da $\mathfrak{u} \perp g$ und $\mathfrak{v} \perp k$

Nun ist $u_1v_1 + u_2v_2 = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v} = |\mathfrak{u}|\,|\mathfrak{v}| \cos(\mathfrak{u},\mathfrak{v})$ also

$$|\cos(g,k)| = |\cos(\mathfrak{u},\mathfrak{v})| = \frac{|\mathfrak{u}\mathfrak{v}|}{|\mathfrak{u}|\,|\mathfrak{v}|} = \underline{\underline{\frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}}$$

Dieser Ausdruck hängt in der Tat nur von den Koeffizienten der Gleichung ab. Insbesondere ist also $g \perp k$, wenn

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

Man schreibt eine Gerade häufig in der Form: $y = mx + n$.

Wir behaupten: Es ist

$$y = mx + n \perp y = m'x + n',$$

wenn

$$m \cdot m' = -1 \text{ ist.}$$

<u>Beweis:</u> In den Gleichungen

$$y - mx - n = 0$$
$$y - m'x - n' = 0$$

haben wir die speziellen Werte:

$u_1 = -m$	$v_1 = -m'$
$u_2 = 1$	$v_2 = 1$

Die Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0, \text{ d.h. wenn}$$

$$m \cdot m' + 1 = 0$$
$$m \cdot m' = -1 \qquad \text{q.e.d.}$$

§ 6. Raum.

Entsprechend wie in § 5 wählen wir ein Koordinatensystem so, dass $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ Einheitsvektoren sind und

$$\mathfrak{a}_1 \perp \mathfrak{a}_2$$
$$\mathfrak{a}_2 \perp \mathfrak{a}_3$$
$$\mathfrak{a}_3 \perp \mathfrak{a}_1$$

Dabei ist wieder ein Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ jeder Vektor, dessen Länge $|\mathfrak{e}| = 1$ ist. Also

$$|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = |\mathfrak{a}_3| = 1$$

Der pythagoräische Lehrsatz für den Raum heisst:

$$|\mathfrak{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$$

wenn $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit den Komponenten a^1, a^2, a^3 ist. Er folgt aus Fig. 57: Es sei $OA = \mathfrak{a}$ mit den Koordinaten a^1, a^2 und a^3 AA' sei das Lot von A auf die Ebene $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ und es sei $A'B \perp \mathfrak{a}_1$. Dann ist:

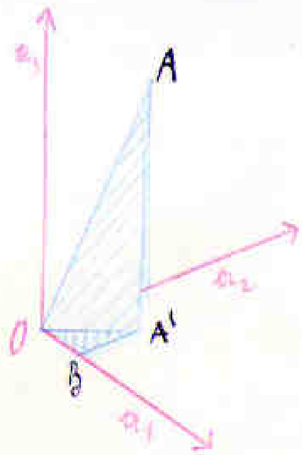


Fig. 57.

$$OB = a^1$$
$$BA' = a^2$$
$$A'A = a^3$$

1)

Wenden wir den Satz des Pythagoras für die Ebene (S.72) an, so gilt in $\Delta OA'A$

$$|\mathfrak{a}|^2 = (OA')^2 + (a^3)^2$$

und in $\Delta OBA'$

$$(OA')^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2$$

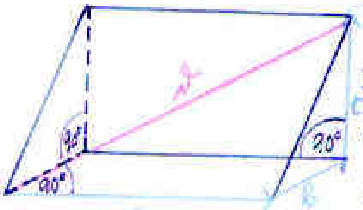
also:

$$|\mathfrak{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$$

q.e.d.

1) B ist zunächst definiert als Durchstosspunkt der $\mathfrak{a}_1$-Achse und der Ebene durch A parallel $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$. Offenbar erhält man aber B auch einfach als Fusspunkt des von A auf die $\mathfrak{a}_1$ -Achse gefällten Lotes. Analog für die andere Achse.

Diesen Satz kann man auch folgendermassen formulieren: Das Längenquadrat der räumlichen Diagonale eines rechtwinkligen Prismas ist gleich der Quadratsumme der drei Kanten. (Fig. 58).



$$|\mathfrak{d}|^2 = |\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{c}|^2$$

Fig 58

Wenn wir den Vektor $\mathfrak{a}$ durch seinen Anfangspunkt $\mathfrak{x}$ (x^i) und seinen Endpunkt $\mathfrak{y}$ (y^i) ausdrücken, erhalten wir die Formel für die Entfernung d zweier Punkte:

$$d^2 = |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}|^2 = (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + (y^3 - x^3)^2$$

Wir bilden nun, genau wie in der Ebene (S. 74)

$$\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 - |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2\right)$$

Dieser Ausdruck ist nicht vom Koordinatensystem abhängig, sondern nur von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Es ist

$$\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 - |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}(a^i)^2 + \sum_1^3 (b^i)^2 - \left(\sum_1^3 (a^i)^2 + \sum_1^3 (b^i)^2 - 2\sum_1^3 a^i b^i\right)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a^i b^i = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Diesen Ausdruck nennen wir das <u>innere (skalare) Produkt</u> von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und schreiben:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i$$

Es folgt dann auch:

$$\underline{\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$$

Da $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ vom Koordinatensystem unabhängig ist, können wir nämlich ein Koordinatensystem so legen, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in einer Koordinatenebene liegen, und dann obige Beziehung wie auf S. 75 folgern.

Rechenregeln für das innere Produkt.

α) (Kommutatives Gesetz)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i$

Ebenso folgt:

β) (Assoziatives Gesetz)

$$\lambda\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \lambda\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

γ) (Distributives Gesetz)

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

Denn:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \sum_{1}^{3} a^i(b^i + c^i) = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i + \sum_{i=1}^{3} a^i c^i = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

Das Verschwinden des inneren Produktes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bedeutet:

$$|\mathfrak{a}| = 0$$

oder $|\mathfrak{b}| = 0$

oder $\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 0$, d.h. $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$.

Äusseres Vektorenprodukt.

Es seien drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ mit den Koordinaten a^i, b^i, c^i gegeben. Sie spannen einen Quader auf, dessen Inhalt wir berechnen wollen. Es ist

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

und nach der ersten Spalte entwickelt:

$$= a^1 A_1 + a^2(-A_2) + a^3 \cdot A_3$$

wobei A_i die Unterdeterminante von a^i ist. Wir deuten nun A_1, $-A_2$ und A_3 als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$. Dann lässt sich die Determinante als inneres Produkt schreiben:

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{A}$$

<u>Behauptung:</u> Es hat dabei $\mathfrak{A}$ folgende Bedeutung:

Die Länge von $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms (b,c). Seine Richtung ist senkrecht zur Ebene (b,c) und zwar so, dass $(\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{A}) > \mathfrak{o}$, dass also $(\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{A})$ denselben Schraubungssinn wie $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3)$ hat.

<u>Beweis:</u> Wir bilden einen Vektor $\mathfrak{A}'$, der obige Eigenschaften hat und müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ ist. Zunächst zeigen wir

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a} = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \mathfrak{A}'\mathfrak{a}$$

Wir können $|(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})|$ ausrechnen durch das Produkt Grundfläche mal Höhe. Es ist die Gundfläche $|(\mathfrak{b},\mathfrak{c})| = |\mathfrak{A}'|$ nach Definition.

Die Höhe ist die senkrechte Projektion p von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{A}'$ (Fig. 59). Es ist $p = \mathfrak{a}\cos(\mathfrak{A}',\mathfrak{a})$ also:

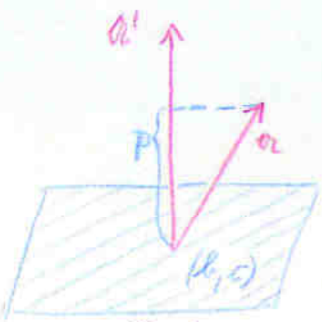


Fig 59

$$|(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})| = |\mathfrak{A}'|\cdot|\mathfrak{a}|\cdot|\cos(\mathfrak{A}',\mathfrak{a})| = |\mathfrak{A}'\mathfrak{a}|$$

Vorzeichen?:

Nach Voraussetzung ist $(\mathfrak{A}',\mathfrak{b},\mathfrak{c}) > \mathfrak{o}$. Ist nun $\mathfrak{a}\mathfrak{A}' > \mathfrak{o}$, so ist $(\mathfrak{a},\mathfrak{A}')$ ein spitzer Winkel (vgl.S. 76), d.h. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}'$ zeigen nach derselben Seite von $(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$; $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{A}',\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ haben gleichen Zeichen, also $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) > \mathfrak{o}$ ferner folgt $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) < 0$ für $\mathfrak{a}\mathfrak{A}' < \mathfrak{o}$. Also in der Tat folgt

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{a} = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}$$

Wir denken uns jetzt $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ fest, also auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ Es ist

$$(\mathfrak{A}'-\mathfrak{A})\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$

Wäre $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A} \neq \mathfrak{o}$, so müsste $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}$ auf jedem beliebigen Vektor senkrecht stehen. Das ist unmöglich. Also

$$\mathfrak{A}'-\mathfrak{A} = \mathfrak{o} \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir nennen $\mathfrak{a}$ das „äussere Produkt" von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und schreiben:

$$\underline{\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}$$

Aus Fig. 60 können wir folgende Beziehung ablesen:

$$|\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| = |\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{c}| \sin(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$

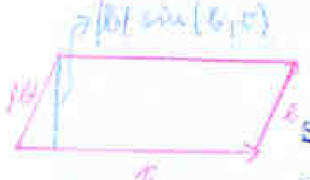


Fig 60

Das äussere Vektorprodukt ist nicht vom Koordinatensystem unabhängig, weil es vom Schraubungssinn abhängt. Es bleibt also nur bei solchen Transformationen erhalten, die den Schraubungssinn nicht ändern.

Rechenregeln für das äussere Produkt.

Aus der Definition der Komponenten A_i von $\mathfrak{a}$

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad A_2 = -\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

folgt für $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$

1.) $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ — nach IX_2^D S. 48

2.) $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = -(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})$ — nach IX_2^B S. 47

3.) $(\lambda\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})$ — nach X_2^D

4.) $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{c})$ — nach XII_2^D

5.) $\lambda\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ — als Kombination von 1) und 3).

Anmerkung: Nach der Definition des äusseren Produkts kann man die Determinante $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ aufspalten in

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})\mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})\mathfrak{b}$$

Deutung der Koeffizienten von Geraden und Ebenengleichung im Raum.

1. Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Geraden:

$$x^1 = x_0^1 + \lambda \cdot \mathfrak{b}^1$$
$$x^2 = x_0^2 + \lambda \mathfrak{b}^2$$
$$x^3 = x_0^3 + \lambda \mathfrak{b}^3$$

Durch den Punkt $\underbrace{P_0}$ und den Vektor $\mathfrak{b}$

$$\begin{array}{ccc} x_0^1 & \qquad & \mathfrak{b}^1 \\ x_0^2 & & \mathfrak{b}^2 \\ x_0^3 & & \mathfrak{b}^3 \end{array}$$

o.B.d.A. können wir verlangen, dass

$$\mathfrak{b}^2 = (\mathfrak{b}^1)^2 + (\mathfrak{b}^2)^2 + (\mathfrak{b}^3)^2 = 1 \qquad \text{(s.S. 77)}$$

Unter dieser Annahme behaupten wir: Der Parameter t bedeutet den Abstand d des laufenden Punktes $P(x^i)$ vom festen Punkt $P_0(x_0^i)$

$$t = d(P, P_0)$$

Beweis durch Quadrieren der Gleichung

$$x^i - x_0^i = t\mathfrak{b}^i \qquad (i = 1,2,3)$$

~~oder~~ $$\sum_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{b}^i)^2$$

$$\cancel{\underbrace{\sum (x^i - x_0^i)^2}_{d^2} = t^2 \sum (\mathfrak{b}^i)^2}$$

$$d = |t| \cdot 1$$

q.e.d.

Man nennt b^1 b^2 und b^3 die <u>Richtungscosinus</u> von b im Raum. Weil $|\mathfrak{b}| = 1$, ist nämlich nach Definition der Koordinaten

$$\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1)$$

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 = \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_2)$$

$$\mathfrak{b}^3 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_3 = \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_3)$$

2.) Gegeben ist die Ebenengleichung

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4 = 0$$

Diese Gleichung stellt nur dann eine Ebene dar, wenn nicht $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ist. Dieser Fall sei also ausgeschlossen.

Wir fassen u_1, u_2 und u_3 auf als Komponenten eines Vektors

$$\begin{array}{c} \mathfrak{u} \neq 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

und behaupten: Der Vektor $\mathfrak{u}$ steht immer senkrecht auf der

Ebene. Zum Beweise schreiben wir allgemein die Gleichung in der

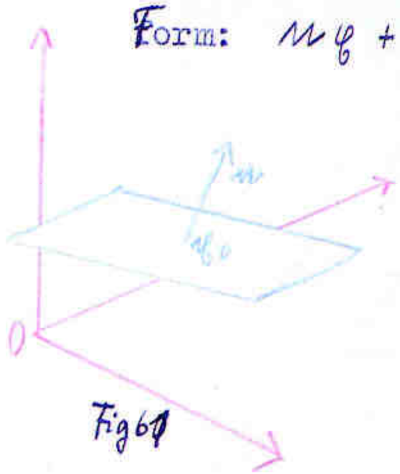


Fig 6

Form: $\mathfrak{u}\mathfrak{x} + u_4 = 0$, wobei $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor von 0 zum laufenden Punkt ist, und für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}_0$ der Ebene:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 + u_4 = 0$$

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0$$

Es ist also überall auf der Ebene

$$\mathfrak{u} \perp (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)$$

Die Koeffizienten u_1, u_2, u_3 der Ebenengleichung bedeuten also geometrisch die Komponenten eines Vektors, der auf allen Vektoren der Ebene senkrecht steht. (Damit haben wir auch allgemein die Existenz des Lotes auf eine Ebene bewiesen.)

Der Winkel zweier Ebenen.

Unter dem Winkel zweier Ebenen verstehen wir den Winkel zwischen ihren Loten.

$$\left.\begin{aligned} e:&\ \sum_1^3 u_i x^i + u_4 = 0 \\ f:&\ \sum_1^3 v_i x^i + v_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,3$$

seien zwei Ebenen.

$\mathfrak{u}$ sei der Vektor mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3

$\mathfrak{v}$ sei der Vektor mit " " v_1, v_2, v_3 .

Welchen Wert hat

$$|\cos(e,f)| = |\cos(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})| \ ?$$

Es ist $\sum_{i=1}^3 u_i v_i = \mathfrak{u}\mathfrak{v} = |\mathfrak{u}||\mathfrak{v}|\cos(\mathfrak{u},\mathfrak{v})$ also:

$$|\cos(\mathfrak{u},\mathfrak{v})| = \frac{|\mathfrak{u}\mathfrak{v}|}{|\mathfrak{u}||\mathfrak{v}|} = \frac{|\sum u_i v_i|}{\sqrt{\sum (u_i)^2}\sqrt{\sum (v_i)^2}} = |\cos(e,f)|$$

Insbesondere ist also

$$e \perp f \text{ , wenn } \sum_{i=1}^3 u_i v_i = 0.$$

Die Gleichung

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 = 0$$

heisst in „Hesse'scher Normalform" geschrieben, wenn $\mathfrak{u}_1^2+\mathfrak{u}_2^2+\mathfrak{u}_3^2=1$ d.h. wenn $|\mathfrak{u}|=1$. Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung mit L(x), so gilt für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$, der nicht auf der Ebene zu liegen braucht und für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der Ebene:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) &= \mathfrak{u}\mathfrak{y}+\mathfrak{u}_4 \\
\mathfrak{L}(\mathfrak{x}) = 0 &= \mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}_4 \\
\hline
\mathfrak{L}(\mathfrak{y}) &= \mathfrak{u}(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})
\end{aligned}
$$

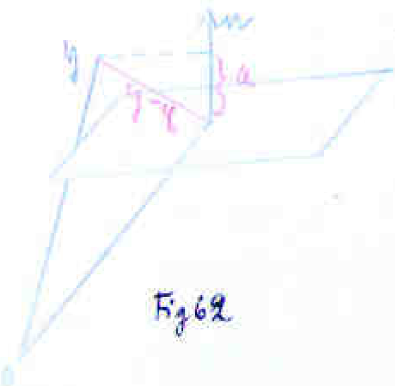


Fig 62

Wir behaupten: $|L(y)|$ ist der Abstand a eines Punktes $\mathfrak{y}$ von der Ebene. a ist nämlich der Betrag der rechtwinkligen Projektion von $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{u}$ und es ist $|L(y)| = |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})|$ $(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})$

$= |\mathfrak{u}|\,a$ (vgl.S. 79)

Da aber

$$|\mathfrak{u}|=1,$$

so ist in der Tat $L(y) = \pm a$.

Die Verteilung des Vorzeichens ist analog der in der Ebene (S. 79)

Anwendungen.

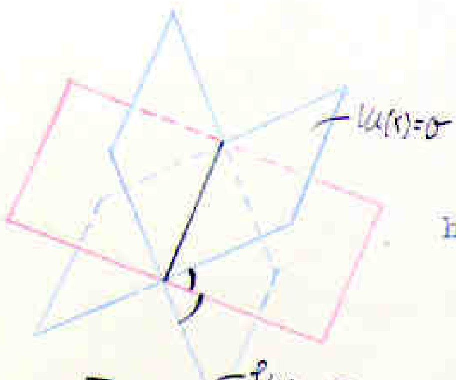


Fig 63

1. Die winkelhalbierenden Ebenen.

Gesucht ist eine Ebene, die durch die Schnittgerade zweier gegebener Ebenen geht und den Winkel zwischen ihnen halbiert. Jeder Punkt der gesuchten Ebene wird also von beiden gegebenen Ebenen gleichen Abstand haben. $L(x) = 0$ und $M(x) = 0$ seien die Gleichungen der gegebenen Ebenen in Hesse'scher Normalform. Dann werden die Punkte der Ebenen

$L(x) = \pm M(x)$ von beiden gleichen Abstand haben. Also

$$L(x) + M(x) = 0$$

und

$$L(x) - M(x) = 0 .$$

halbieren den Winkel zwischen $L(x) = 0$ und $M(x) = 0$.

2.) Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, die von 20 gegebenen Ebenen

$$L_i(x) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,20)$$

(L_i in Hesse'scher Normalform) gleiche Abstandssummen haben? Die gesuchte Fläche wird durch die Gleichung dargestellt:

$$\sum_{i=1}^{20} |L_i(x)| = \text{const.}$$

in jedem Gebiet, durch das keine der Ebenen $L_i = 0$ geht, ist die Fläche eine Ebene $\sum \pm L_i(x) = 0$. Beim Überschreiten einer der gegebenen Ebenen ändert sich ein Vorzeichen in der Summe; von da an wird die Fläche also durch eine neue Ebene dargestellt.

3.) <u>Satz über das Tetraeder.</u>

Wir legen durch jede Kante eines Tetraeders eine Ebene, die den inneren Winkel zwischen den angrenzenden Tetraederflächen halbiert und behaupten: Diese 6 Ebenen gehen durch einen Punkt.

Es seien $L_i(x) = 0 \qquad (i = 1,2,3,4)$

die Gleichungen der Tetraederflächen in Hesse'scher Normalform. Wir wählen dabei das Vorzeichen der $L_i(x)$ so, dass für jeden inneren Punkt des Tetraeders $L_i(x) > 0$ ist. Die 6 winkelhalbierenden Ebenen sollen von beiden zugehörigen Ebenen gleichen Abstand haben, es soll also gelten:

$$L_i(x) - L_k(x) = 0 \qquad (i \neq k;\ 1,\ldots,4)$$

$$L_1(x) - L_2(x) = 0 \qquad L_1(x) - L_3(x) = 0$$
$$L_1(x) - L_4(x) = 0 \qquad L_2(x) - L_3(x) = 0$$
$$L_2(x) - L_4(x) = 0 \qquad L_3(x) - L_4(x) = 0$$

Alle diese Ebenen erfüllen das Gleichungssystem

$$L_1(x) = L_2(x) = L_3(x) = L_4(x).$$

Das System ist äquivalent mit
$$L_1 - L_2 = 0$$
$$L_1 - L_3 = 0$$
$$L_1 - L_4 = 0$$

Diese drei Gleichungen bestimmen einen Punkt. Durch ihn gehen alle Ebenen $L_i - L_k = 0$.

4.) Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Die Gerade sei gegeben durch den Punkt $\mathfrak{x}_0$ und den Vektor $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{y}$ sei ein Punkt ausserhalb der Geraden.

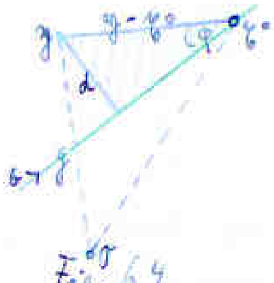


Fig. 64

Es ist dann der gesuchte Abstand

$$d = |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \, |\sin \varphi|$$

Wir können nun schreiben:

$$|\mathfrak{b}| \, |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0| \, |\sin(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{b})| = |\mathfrak{b}| \, d$$

$$|(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b}| \, d$$

(nach der Definition des äusseren Produkts). Also ist

$$d = \frac{|(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{b}|}{|\mathfrak{b}|}$$

Speziell erhalten wir für die Punkte der Geraden das Gleichungssystem

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_0) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$$

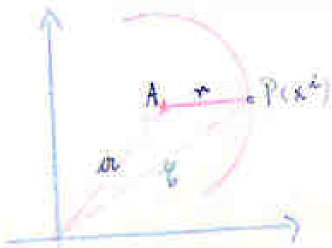


Fig 65. (Ebene)

§ 7. Kreise und Kugeln.

Das Folgende gilt in gleicher Weise für Ebene und Raum, nur dass in der

Ebene : $i = 1,2$

im Raum: $i = 1,2,3$.

Ein Kreis (bzw. eine Kugel) habe den Mittelpunkt $A(a^i)$ und den Radius r . Wie lautet seine (ihre) Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten? $P(x^i)$ ist genau dann ein Punkt auf dem Kreis (der Kugel), wenn

$$|AP| = r$$

oder

$$(AP)^2 - r^2 = 0$$

AP hat die Koordinaten $x^i - a^i$. Wir erhalten also

$$\sum (x^i - a^i)^2 - r^2 = 0$$

Ausmultiplizieren nach x^i :

$$(\underline{\mathrm{XV}})\quad \underbrace{\sum (x^i)^2}_{Q} - \underbrace{2\sum a^i x^i}_{L} + \underbrace{\sum (a^i)^2 - r^2}_{A} = 0$$

Dies ist die gesuchte Gleichung.

Die Kreis-(Kugel)Gleichung setzt sich also additiv zusammen aus einem quadratischen Glied Q,

einem linearen Glied L

und einem Absolutglied A ,

das die Variablen x^i nicht enthält. Die quadratische Form Q 1) muss dabei die Gestalt $\sum (x^i)^2$ haben.

Stellt nun jeder Ausdruck

$$\sum (x^i)^2 + L + A = 0$$

einen Kreis in der Ebene bzw. eine Kugel im Raum dar? Jedenfalls kann man das lineare Glied L immer in der Form schreiben

(o.B.d.A.) $\quad L = -2\sum a^i x^i$

$$\sum (x^i)^2 - 2\sum a^i x^i + A + \sum (a^i)^2 - \sum (a^i)^2 = 0$$

$$\sum (x^i - a^i)^2 - \underbrace{\left(\sum (a^i)^2 - A\right)}_{r^2} = 0$$

Diese Gleichung stellt dann und nur dann einen Kreis (eine Kugel) dar, wenn $\sum (a^i)^2 - A \equiv r^2 > 0$ ist; r wird der Radius, und der Mittelpunkt erhält die Koordinaten a^i .

---

1) Man nennt jeden Ausdruck $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k$ eine „quadratische Form" der n Variablen x^i . „Form" oder „homogenes Polynom" r-ten Grades heisst jede Summe von Gliedern

$$a x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \quad ,$$

wenn in allen Gliedern $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = r$ ist $(0 \leq \lambda_i \leq n)$

Folgerungen: Ein Kreis (eine Kugel) wird durch 3 (4) Punkte allgemeiner Lage eindeutig bestimmt. Denn in der Gleichung

$$\sum (x^i)^2 + L(x) + A = 0$$

enthält $L(x)$ 2(3) Konstante und A ist eine 3.(4.), von denen allen die Gleichung linear abhängt. Wir führen diese Untersuchung nur für den Raum durch. Für Kreise in der Ebene verläuft sie analog.

Wann geht eine Kugel durch 4 gegebene Punkte $P_1(\xi^i)$, $P_2(\eta^i)$, $P_3(\zeta^i)$, $P_4(\tau^i)$ und einen laufenden Punkt $P(x^i)$? $(i = 1,2,3)$

Wenn P_1, P_2, P_3, P_4, P Punkte einer Kugel sein sollen, müssen folgende fünf Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} \sum (x^i)^2 + \sum b_i x^i + A = 0 \\ \hline \sum (\xi^i)^2 + \sum b_i \xi^i + A = 0 \\ \sum (\eta^i)^2 + \sum b_i \eta^i + A = 0 \\ \sum (\zeta^i)^2 + \sum b_i \zeta^i + A = 0 \\ \sum (\tau^i)^2 + \sum b_i \tau^i + A = 0 \end{cases}$$

Die vier unteren fassen wir auf als lineare inhomogene Bestimmungsgleichungen für die 4 Grössen b^i und A. Damit das System nach b^i und A auflösbar ist, muss die Determinante ungleich Null sein.

$$\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & 1 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 & 1 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 & 1 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

D.h.aber: Wenn die 4 Punkte $P_1, \ldots, P_4$ nicht in einer Ebene liegen, kann man genau eine Kugel durch sie legen.[1] Wir

1) Liegen $P_1 \ldots P_4$ in einer Ebene und nicht auf einem Kreis, so gibt es keine Kugel durch sie, denn diese müsste die Ebene in einem durch $P_1 \ldots P_4$ gehenden Kreis schneiden. Liegen die Punkte $P_1 \ldots P_4$ auf einem Kreis, so gibt es unendlich viele Kugeln durch sie; nämlich alle, deren Mittelpunkt M auf dem Lot im Kreismittelpunkt auf der Kreisebene liegt und deren Radius gleich MP_1 ist.

betrachten nun unter dieser Vorraussetzung alle 5 Gleichungen. Indem wir eine Konstante α hinzufügen, fassen wir sie auf als homogenes System für die 5 Grössen b_i, A und α.

$$
\begin{aligned}
&\alpha \sum (x^i)^2 + \sum b_i x^i + A = 0\\
&\alpha \sum (\xi^i)^2 + \sum b_i \xi^i + A = 0\\
&\alpha \sum (\eta^i)^2 + \sum b_i \eta^i + A = 0 \qquad (X)\\
&\alpha \sum (\varphi^i)^2 + \sum b_i \varphi^i + A = 0\\
&\alpha \sum (\vartheta^i)^2 + \sum b_i \vartheta^i + A = 0 .
\end{aligned}
$$

Das System ist nichttrivial lösbar (nämlich mit $\alpha = 1$).

Also ist

$$
\begin{vmatrix}
\sum (x^i)^2 & x^1 & x^2 & x^3 & 1\\
\sum (\xi^i)^2 & \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & 1\\
\sum (\eta^i)^2 & \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 & 1\\
\sum (\varphi^i)^2 & \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 & 1\\
\sum (\vartheta^i)^2 & \vartheta^1 & \vartheta^2 & \vartheta^3 & 1
\end{vmatrix} = \Delta = 0
$$

Umgekehrt folgt aus $\Delta = 0$, dass (X) nichttrivial lösbar ist. Wir wissen aber nicht, ob in dieser Lösung gerade $\alpha \neq 0$ ist. Wäre nun $\alpha = 0$, dann würde das homogene Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
&\sum b_i x^i + A = 0\\
&\sum b_i \xi^i + A = 0\\
&\sum b_i \eta^i + A = 0\\
&\sum b_i \varphi^i + A = 0\\
&\sum b_i \vartheta^i + A = 0
\end{aligned}
$$

eine nichttriviale Lösung b_1, b_2, b_3, A haben, insbesondere die 4 letzten Gleichungen. Das hiesse aber, die Punkte $P_1 \dots P_4$ lägen auf der Ebene $\sum b_i x^i + A = 0$, entgegen der Voraussetzung.

Also ist sicher $\alpha \neq 0$, also $\alpha = 1$ o.B.d.A.

Lassen wir in der Kreis(Kugel-)gleichung das absolute Glied variieren, die anderen Koeffizienten unveränderlich, so bekommen wir konzentrische Kreise (Kugeln). Denn der Mittelpunkt hängt nicht vom Absolutglied ab.

Parameterdarstellung von Kreis und Kugel.

1\. Kreis: In der Kreisgleichung

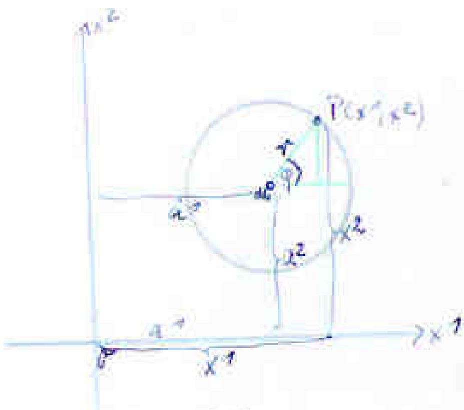


Fig. 65

$$(x^1-a^1)^2 + (x^2-a^2)^2 = r^2$$

wollen wir x^1 und x^2 als Funktionen eines Parameters φ darstellen.

$$x^1 = x^1(\varphi)$$
$$x^2 = x^2(\varphi)$$

Aus der Figur folgt sofort:

$$x^1 = a^1 + r \cos\varphi$$
$$x^2 = a^2 + r \sin\varphi$$

2\. Kugel: Für die Kugelgleichung

$$(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2 = r^2$$

brauchen wir zwei Parameter φ und ϑ. Wir setzen

$$x^1 = a^1 + r \cos\varphi \quad . \text{ Dann folgt:}$$

$$(x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2 = r^2 \sin^2\varphi \quad , \text{ also}$$

$$x^2 = a^2 + r \,\cancel{\cos}\sin\varphi \,\cancel{\sin}\cos\vartheta$$
$$x^3 = a^3 + r \sin\varphi \sin\vartheta .$$

Variieren φ und ϑ in den Intervallen

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi,$$

so erhalten wir alle Kugelpunkte.

Zusatz: Dieses Verfahren lässt sich auch auf n Dimensionen ausdehnen. Z.B. wäre in 4 Dimensionen die Parameterdarstellung einer Kugel

$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$

$(M(0,0);\ r = 1)$

$x^1 = \cos\alpha_1$

$\rightarrow (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = \sin^2\alpha_1$

$x^2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2$

$\rightarrow (x^3)^2 + (x^4)^2 = \sin^2\alpha_1 \cdot \sin^2\alpha_2$

$x^3 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3$

$x^4 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3$

Polarkoordinaten.

Man erhält sie aus dem Früheren, indem man den Radius r als veränderlich betrachtet. Der Mittelpunkt ist der Einfachheit halber als der Nullpunkt gewählt. $(a^i = 0)$

1. Ebene. Ein Punkt P wird bestimmt durch den Abstand r vom Anfangspunkt O und den Winkel φ, den OP mit einer festen Achse x^1 bildet. Nach Fig. 66 ist

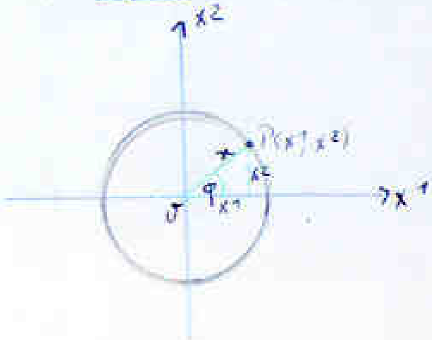


Fig. 66

$$x^1 = r\cos\varphi$$
$$x^2 = r\sin\varphi$$

Durch $0 \leq r < \infty$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

erfassen wir, sämtliche Punkte der Ebene.

Die Kurven $r = \text{const}$ sind konzentrische Kreise um O.

$\varphi = \text{const}$ sind Geradem durch den Mittelpunkt.

Die „Niveaulinien" $r=\text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ stehen also stets senkrecht aufeinander.

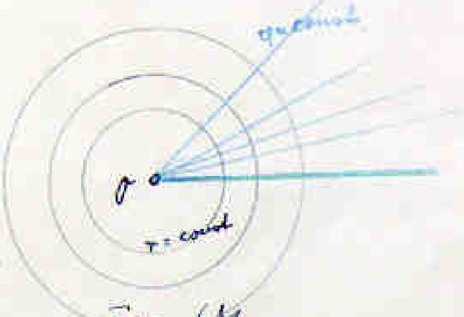


Fig. 67

2. Räumliche, sphärische Polarkoordinaten.

Ein Punkt P wird bestimmt durch den Abstand r vom Nullpunkt O, die geographische Breite $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und die geographische Länge ϑ, also

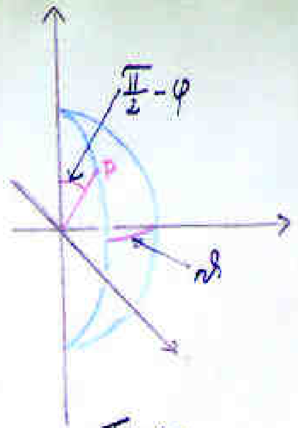


Fig 68

$$x^1 = r \cos\varphi$$
$$x^2 = r \sin\varphi \quad \cos\vartheta$$
$$x^3 = r \sin\varphi \quad \sin\vartheta$$

Durch Variieren von r, sodass

$$0 \le r < \infty,$$

erhalten wir ein System von Kugeln, das sämtliche Raumpunkte umfasst.

Hierbei müssen φ, ϑ die Intervalle

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le +\frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \vartheta < 2\pi$$

durchlaufen, damit alle Kugelpunkte erfasst werden.

Die „Niveauflächen"

r = const sind Kugeln um 0,

ϑ = const sind Ebenen durch die x^3-Achse,

φ = const sind Kegel von 0 aus an den Breitenkreis

$$\varphi = \text{const}.$$

Auch hier stehen die Niveauflächen paarweise senkrecht aufeinander.

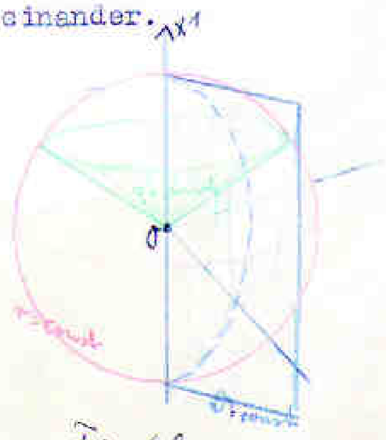


Fig. 69

Die Durchdringungskurven der Niveau~~xxxxx~~flächen:

φ und ϑ = const sind Geraden durch den Mittelpunkt

r und ϑ = const. sind Längenkreise

r und φ = const sind Breitenkreise.

3. Zylinderkoordinaten im Raum.

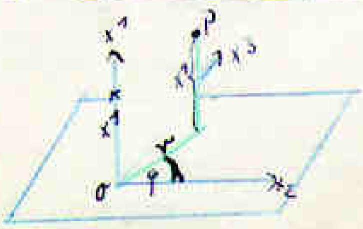


Fig. 70.

In Zylinderkoordinaten wird ein Punkt P bestimmt durch das Zahlentripel:

$$x^1, \ r, \ \varphi. \quad \text{Dabei ist}$$

$$x^1 = x^1$$
$$x^2 = r \cos \varphi$$
$$x^3 = r \sin \varphi$$

r = const ergibt Zylinder um die x^1-Achse

x^1 = const ergibt Ebenen parallel der Ebene $x^1 = 0$

φ = const ergibt Ebenen durch die x^1-Achse

Auch hier durchsetzen sich die 3 Niveauflächen r = const, x^1 = const, φ = const ~~vollständig~~. rechtwinklig

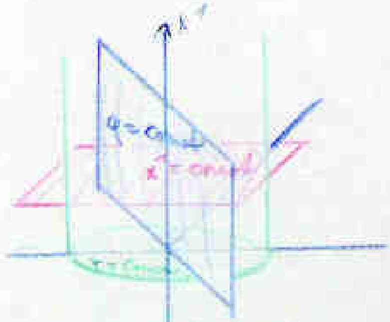


Fig. 71

§ 8. Bewegungen, Symmetrien und orthogonale Matrizen.

Definitionen: Bewegung oder Symmetrie nennt man jede affine Transformation der Ebene (bzw. des Raumes), bei der alle Längen und Winkel erhalten bleiben. Bei Bewegungen bleibt der Umlaufssinn (bzw. Schraubungssinn) erhalten; bei Symmetrien ~~bleibt~~ wird er umgekehrt.

Orthogonale Matrizen:

Bestimmt die affine Transformation (vgl. S. 13)

$$x^i = A^i + \sum a^i_k x^{k'}$$
$$x^{k'} \longrightarrow x^i$$

eine Bewegung oder eine Symmetrie in Cartesischen Koordinaten, so nennt man (a^i_k) eine orthogonale Matrix. Hierbei ist die Tatsache benutzt, dass die Längentreue und Winkeltreue nur von den a^i_k abhängt. Das ist ohne weiteres klar, denn eine Veränderung der A^i würde nur eine Translation zur Folge haben.

Wir können auch von der Vektortransformation

$$v^i = \sum a^i_k v^{k'}$$

(in Cartesischen Koordinaten) ausgehen und die Transformationsmatrix (a^i_k) einer längen- und winkeltreuen Vektortransformation als orthogonale Matrix definieren.

Eine Transformation, die durch eine orthogonale Matrix bestimmt wird, wollen wir als „orthogonale Tranformation" bezeichnen.

Eigenschaften orthogonaler Matrizen: Für die Orthogonalität von (a^i_k) sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$1) \quad |a^i_k| = \pm 1$$

Wegen der Längentreue bleiben Dreiecksinhalte (bzw. Tetraederinhalte) bei Bewegungen und Symmetrien erhalten. Ein solcher Inhalt wird bei affiner Transformation mit dem absoluten Betrag der Transformationsdeterminante $|a^i_k|$ multipliziert. Es muss also $|a^i_k| = \pm 1$ sein. Es ist:

$|a^i_k| = +1$ für Bewegungen, da der Umlaufs- bzw. Schraubungssinn erhalten bleibt, also $|a^i_k| > 0$.

$|a^i_k| = -1$ für Symmetrien, da der Umlaufssinn bzw. Schraubungssinn umgekehrt wird, also $|a^i_k| < 0$.

Die a^i_k sind hierbei die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}'_k$, in die die Grundvektoren $\mathfrak{a}_k$ übergehen.

$$\mathfrak{a}_k \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{a}'_k}_{a^i_k}$$

Wir haben uns auf den Fall des Cartesichen Koordinaten-Systems beschränkt. Es haben also alle $\mathfrak{a}_k$ die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht. Daraus folgt die Bedingung 1)

$$\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_k = e^i_k$$

Da die Längen und Winkel bei der Transformation erhalten bleiben, folgt die entsprechende Gleichung für die Bildvektoren

$$\mathfrak{a}'_i \cdot \mathfrak{a}'_k = e^i_k$$

und da

$$\mathfrak{a}'_i \cdot \mathfrak{a}'_k = \sum a^l_i a^l_k \quad , \qquad \text{(S.83)}$$

folgt:

2.) $$\sum_{l=1}^{2(3)} a^l_i a^l_k = e^i_k$$

1) und 2) sind notwendige Bedingungen für die Orthogonalität von (a^i_k). Bedingung 2) ist aber für die Orthogonalität auch hinreichend.

---

1) Definition von e^i_k s.S. 305)

Bedingung 2) besagt nämlich, dass

$$\mathfrak{a}_i' \cdot \mathfrak{a}_k' = e^i_k$$

ist, dass also die Bildvektoren der Grundvektoren wieder ein kartesisches System sind,

Für die Abbildung $\mathfrak{v}' \to \mathfrak{v}$

gilt nun $\alpha)$ $\mathfrak{v}' = \sum v^{i'} \mathfrak{a}_i$

$$\beta) \quad \mathfrak{v} = \sum v^i \mathfrak{a}_i = \sum v^{i'} \mathfrak{a}_i'$$

Quadriert und addiert man und berücksichtigt, dass sowohl die $\mathfrak{a}_k$ als auch die $\mathfrak{a}_k'$ kartesisch sind, so folgt aus $\alpha)$

$$\mathfrak{v}'^2 = \sum (v^{i'})^2$$

und aus $\beta)$ $\mathfrak{v}^2 = \sum (v^i)^2 = \sum (v^{i'})^2$

also $\mathfrak{v}'^2 = \mathfrak{v}^2$

Es bleiben also vermöge Bedingung 2) Längen erhalten und damit auch Winkel, da man jeden Winkel durch ein Dreieck bestimmen kann, und nach dem 3. Kongruenzsatz jedes Dreieck bis auf Symmetrien durch seine Seitenlängen bestimmt ist. Bedingung 2) ist also in der Tat hinreichend für die Orthogonalität der Matrix (a^i_k).

Satz: <u>Eine Matrix ist dann und nur dann orthogonal, wenn die transponierte Matrix zugleich die inverse Matrix ist.</u> (vgl. Anhang S.326/27)

Beweis: Ist (a^i_k) orthogonal und bewirkt $\mathfrak{a}_k \longrightarrow \mathfrak{a}_k'$ so gilt

$$a^i_k = \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_k'$$

Denn a^i_k ist die i-te Komponente von $\mathfrak{a}_k'$. Nach S.73 erhält man sie durch Multiplikation von $\mathfrak{a}_k'$ mit dem Grundvektor $\mathfrak{a}_i$

Die zu (a^i_k) inverse Matrix, die die Transformation $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}$ bestimmt, sei (A^i_k) .

Dann muss sich wegen der zwischen $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}$ bestehenden Symmetrie schreiben lassen

$$(A^i_k) = (\mathfrak{a}_i' \cdot \mathfrak{a}_k)$$

Da innere Produkte kommutativ sind (S.76), folgt:

$$(A^i_k) = (\mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_i')$$

Das ist aber $= (a^k_i)$ q.e.d.

Nun muss noch gezeigt werden, dass diese Bedingung hinreichend für die Orthogonalität von (a^i_k) ist. Es genügt zu zeigen, dass die (für Orthogonalität hinreichende) Bedingung 2) erfüllt ist.

Dass (A^i_k) zu (a^i_k) invers ist, ist nun äquivalent mit dem Gleichungssystem (vgl.S. 326,327)

$$\gamma)\ \sum_{l=1}^{2(3)} A^i_l a^l_k = e^i_k$$

Denn setze ich

$$v'^l = \sum_{k=1}^{2(3)} a^l_k v''^k$$

$$v^i = \sum_{l=1}^{2(3)} A^i_l v'^l$$

so muss für beliebiges v''^k stets $v^i = v''^i$ gelten; nun ist

$$v^i = \sum_l A^i_l \sum_k a^l_k v''^k = \sum_k v''^k \Big(\sum_l A^i_l a^l_k\Big)$$

also wegen $v^i = v''^i = \sum_{k=1}^{2(3)} e^i_k v''^k$

$$\sum_k v''^k \Big(\sum_l A^i_l a^l_k - e^i_k\Big) = 0$$

Dieses Gleichungssystem ist für beliebiges v''^{k} dann und offenbar nur dann erfüllt, wenn γ) erfüllt ist.

γ) ist aber nach der Voraussetzung $A^i_k = a^k_i$ äquivalent mit

$$2) \sum_{l=1}^{2(3)} a^l_i a^l_k = e^i_k \qquad \text{q.e.d}$$

Anmerkungen 1) Für die Orthogonalität von (a^i_k) ist ebenso wie 2) auch das System 2)' $\sum a^i_l a^k_l = e^i_k$ notwendig und hinreichend. Denn 2') besagt die Orthogonalität von (a^k_i). Ist (a^i_k) orthogonal, so ist (a^k_i) zu (a^i_k) invers, also als inverse zu einer orthogonalen Matrix ebenfalls orthogonal; ist umgekehrt (a^k_i) orthogonal, so ist (a^i_k) zu (a^k_i) invers, also ebenfall orthogonal.

2) Es ist $a^i_k = (\mathfrak{r}^i \mathfrak{r}_k') = \cos\sphericalangle(\mathfrak{r}^i, \mathfrak{r}'_k)$

Daher bezeichnet man die a^i_k auch als die "Richtungskosinus" einer orthogonalen Transformation.

3) In n Dimensionen heisst eine Matrix (a^i_k) orthogonal, wenn für beliebiges v'^{k} $(k=1,\dots n)$ und für

$$v^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k v^{k'} \qquad (i=1\dots n)$$

stets $\sum_{i=1}^{n}(v^i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(v^{i'})^2$ gilt.

Auch hier ist die Orthogonalität äquivalent damit, dass die zu (a^i_k) inverse Matrix $(A^i_k) = (a^k_i)$ wird, dass also die Gleichungen gelten

$$\sum_{l=1}^{n} a^l_i a^l_k = e^i_k \qquad (i=1,\dots n;\ k=1,\dots n)$$

§ 9. Bewegungen und Symmetrien in der Ebene.

Jede orthogonale Matrix in zwei Dimensionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ läßt sich durch sinus und cosinus eines Parameters φ folgendermassen ausdrücken: Aus 2) 2') ergeben sich die Relationen

$$\alpha)\quad a^2 + b^2 = 1$$
$$\beta)\quad a^2 + c^2 = 1$$
$$\gamma)\quad c^2 + d^2 = 1$$
$$\delta)\quad ac + bd = 0$$

Nach α) gibt es ein reelles φ, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \leqq +\pi$, sodass $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Aus β) folgt $c = \pm \sin\varphi$. Aus δ) folgt im Fall $\varphi \neq 0, \pi$: $d = \mp \cos\varphi$ (obere bzw. untere Vorzeichen von c und d entsprechen einander). Im Fall $\varphi = 0, \pi$, $c = 0$ folgt aus γ): $d = \pm 1$, also wieder $d = \pm \cos\varphi$ (oberes oder unteres Vorzeichen frei wählbar). Somit hat jede orthogonale Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Gestalt

$$(B)\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (S)\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Jede Matrix (B) oder (S) erfüllt α), γ), δ). Diese Gleichungen sind das System 2') (S-103) im zweidimensionalen Fall, sind also für Orthogonalität hinreichend. Daher ist jede Matrix (B) oder (S) wirklich orthogonal. Die Determinante von (B) ist $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$; ebenso ist die von (S): $-\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1$.
(B) gibt also die Bewegungen, (S) die Symmetrien der Ebene.

Geometrische Diskussion der Bewegungen.

Die Matrizen (B) gestatten die Übersicht über alle Bewegungen der Ebene, die einen Fixpunkt haben, d.h. einen Punkt, der in sich selbst transformiert wird. Denn für diesen Punkt als Koordinatenanfangspunkt fallen in den Transformationsgleichungen die Translationsglieder fort, und die Transformation heisst (x, y statt x^1, x^2 geschrieben):

$$\text{XVI} \quad \begin{aligned} x &= \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y' \\ y &= -\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten $x' = r'\cdot\cos t'$, $y' = r'\sin t'$, $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ wird XVI :

$$r\cos t = r'(\cos\varphi\cos t' + \sin\varphi\sin t') = r'\cos(t'-\varphi)$$

$$r\sin t = r'(\cos\varphi\sin t' - \sin\varphi\cos t') = r'\sin(t'-\varphi)$$

Hieraus durch Quadrieren und Addieren ($r \geqq 0, r' \geqq 0$ vorausgesetzt):

$$r = r'$$

Also für alle Punkte $r \neq 0$:

$\cos t = \cos(t'-\varphi)$, $\sin t = \sin(t'-\varphi)$,

folglich $\underline{t = t' - \varphi}$. (bis auf ganzzahliche Vielfache von 2π). Dies bedeutet (O Anfangspunkt, P' beliebig, P Bild von P' vermöge XVI):

<u>OP' geht in OP über durch Drehung um den Winkel φ im negativen Sinn.</u>

<u>Jede ebene Bewegung mit Fixpunkt ist eine Drehung um diesen.</u>

Wir beweisen jetzt: Jede fixpunktfreie Bewegung ist eine Translation. (Damit sind dann alle Bewegungen erschöpft).

Fixpunkt ist nämlich jeder Punkt (x_f, y_f), der das System erfüllt $x_f = x'_f$, $y_f = y'_f$. Dies System ist nach (B) äquivalent mit

$$x_f = \cos\varphi\, x_f + \sin\varphi\, y_f + A$$
$$y_f = -\sin\varphi\, x_f + \cos\varphi\, y_f + B$$

oder

$$(F) \qquad \begin{aligned} (\cos\varphi - 1)x_f + \sin\varphi\, y_f &= -A \\ -\sin\varphi\, x_f + (\cos\varphi - 1)y_f &= -B \end{aligned}$$

Die Bewegung ist nur fixpunktfrei, wenn (F) keine Lösung x_f, y_f hat. Das kann nur eintreten (vgl. S. 52), wenn die Determinante von (F) verschwindet, also

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi$$
$$= 2(1 - \cos\varphi) = 0 \;;$$
$$\cos\varphi = 1 \;, \quad \sin\varphi = 0.$$

Die Bewegung heisst also

$$x = x' + A$$
$$y = y' + B$$

Das ist eine Translation, q.e.d.

Beispiele.

1. Die Punktspiegelung $x = -x'$, $y = -y'$ ist eine Drehung um π. Denn die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist (B) für $\varphi = \pi$.

2. Die Bewegungen: Drehung um φ, Translation, Drehungen um $-\varphi$ geben hintereinander ausgeführt immer eine Translation, wie auch die Fixpunkte der beiden Drehungen gewählt werden. Denn Vektoren werden dabei in gleiche Vektoren übergeführt.

3. Ein Kreis k' rolle im Innern eines festen, Kreises k von doppeltem Radius. Die Bahn eines mit k' starr verbundenen Punktes ist zu bestimmen (spezielles Problem aus der allgemeinen Theorie der „Trochoiden" bzw. "Zykloiden", d.h. der Bahnkurven eines beliebigen bzw. Peripheriepunktes einer Kreisscheibe, die auf einem Kreis oder einer Geraden rollt).

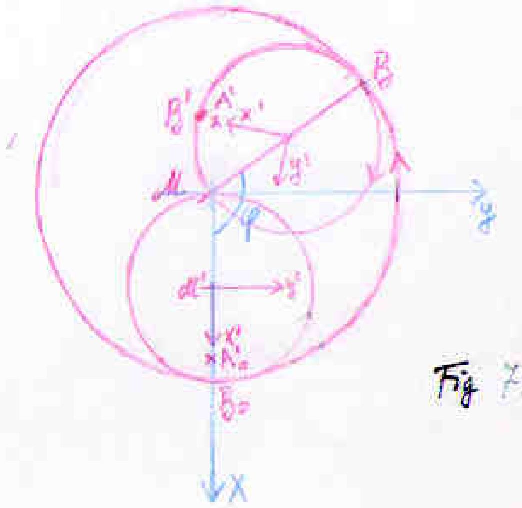


Fig 72

Lösung: O.B.d.A. werde nur die Bahn eines Punktes A' betrachtet, der zu Beginn der Bewegung ($A' = A_0'$) mit den Mittelpunkten ~~XXX~~ M , ($M' = M_0'$) von k, k' ~~zusammenfällt~~ auf einer Geraden liegt. M' sei Anfangspunkt eines mit k' starr verbundenen kartesischen Systems x',y' mit M' A' als positiver x'Richtung. Dann hat A' die Koordinaten $x' = a \geq 0$, $y' = 0$. B sei auf k der laufende Berührungspunkt von k,k' (Anfangslage $B = B_0$); B' sei derjenige Punkt auf k', der zu Beginn mit B_0 zusammenfällt. Die Rollbewegung führe M' im positiven Sinn um M herum. Dann ist $\overset{\frown}{B_0B}$ (auf k positiv durchlaufen) gleich $\overset{\frown}{BB'}$ (auf k' ~~positiv~~ negativ durchlaufen). Das ist die Definition des Rollens.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Sei $\sphericalangle(MB_0, MB) = \varphi$ gesetzt. Dann folgt wegen $MM' = 1/2\, MB$: $\sphericalangle(M'B, M'B') = -2\varphi$, also $\sphericalangle(M'B', MB_0) = \varphi$.
Nun sei M der Anfangspunkt und MB_0 die positive x-Richtung eines mit k fest verbundenen kartesischen Systems (x,y). Dann bestehen zwischen x, y und x', y' die Formeln (für $MM' = 1$):

$$x = \cos\varphi + \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y'$$

$$y = \sin\varphi - \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y'$$

Der Punkt A' ($x' = a \geq 0$, $y' = 0$) hat also in x, y die Koordinaten

$$x = (1+a)\cos\varphi, \quad y = (1-a)\sin\varphi .$$

Das ist eine Parameterdarstellung (φ als Parameter) der gesuchten Kurve. Diese ist für $a \neq 1$ eine Ellipse. Denn sie erfüllt die Gleichung

$$\frac{x^2}{(1+a)^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1$$

Für $a = 1$ ergibt sich $y = 0$, also eine geradlinige Bahn und zwar längs der Geraden MB_0. Daraus ergeben sich verschiedene Ellipsenerzeugungsmechanismen.
Vergleiche hierzu die Modelle 610 und 380 (~~Katalog~~ Inventarnummern)

Geometrische Deutung der Symmetrien.

Wir betrachten zunächst Symmetrien mit Fixpunkt und wählen diesen als Anfangspunkt, dann wird nach (S):

$$x = \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y'$$

$$y = \sin\varphi\, x' - \cos\varphi\, y'$$

In Polarkoordinaten analog wie für die Bewegungen

$$r = r', \quad t = \varphi - t'.$$

Setzen wir $t - \frac{\varphi}{2} = \tau$, $t' - \frac{\varphi}{2} = \tau'$, d.h. betrachten wir die Transformation in einem anderen Polarkoordinatensystem r, τ mit dem-selben Anfangspunkt und einer Achse, die um $\frac{\varphi}{2}$ gegen $t = 0$ gedreht ist, so nimmt die Symmetrie die Gestalt an

$$r = r', \quad \tau = -\tau'$$

Im kartesischen System $\xi = r\cos\tau$, $\eta = r\sin\tau$ heisst die Symmetrie $\xi = \xi'$, $\eta = -\eta'$

Das ist eine Umklappung um die ξ-Achse.

Die allgemeinste Symmetrie lässt sich demnach durch passende Systemwahl auf die Form bringen

$$\xi = \xi' + A, \qquad \eta = -\eta' + B$$

Betrachten wir endlich die Symmetrie in dem System

$Y = \eta - \frac{B}{2}$, $X' = \xi'$, $Y' = -\eta' - \frac{B}{2}$,

so bekommen wir die Darstellung

$$X = X' + A, \quad Y = -Y'.$$

Das heisst in Worten: <u>Jede Symmetrie lässt sich erzeugen durch eine Umklappung und eine Translation längs der Umklappungsachse.</u>

§ 10 Bewegungen und Symmetrien im Raum.

Bewegungen.

Drehungen um eine Achse nennen wir jede Bewegung, die alle Punkte einer Geraden (der Achse) fest lässt. Wir zeigen nachher, dass die allgemeinste Bewegung sich auf diesen Fall zurückführen lässt.

Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege auf der Achse. Dann bleibt er fest, die Transformation enthält daher keine Translationsglieder und heisst (x,y,z statt x^1, x^2, x^3 geschrieben)

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= dx' + ey' + fz' \\ z &= gx' + hy' + kz' \end{aligned} \qquad (\vartheta)$$

Die Drehungsachse sei die x-Achse. Dann ist der Punkt (1,0,0) sein eigener Bildpunkt; sein Bild vermöge (ϑ) heisst aber $x = a$, $y = d$, $z = g$. Also ist $a = 1$, $d = g = 0$.

Da $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ orthogonal ist, gilt $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, also wegen $a = 1$: $b = c = 0$. Die Transformation heisst also

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \quad ey' + fz' \\ z &= \quad hy' + kz' \end{aligned}$$

Die ~~beiden~~ Gleichungen besagen, dass die Ebene $x = 0$ affin in sich transformiert wird und zwar n.V. längentreu. Also ist $\begin{pmatrix} e & f \\ h & k \end{pmatrix}$ orthogonal und

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & k \end{vmatrix} = +1$$ n.V. Also ist $\begin{pmatrix} e & f \\ h & k \end{pmatrix}$ nach § 9 von der Form $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Jede Drehung um die x-Achse hat also eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad {}^{*)}$$

Durch cyklische Vertauschung der Zeilen und Spalten findet man für Drehungen um die y-Achse die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Fig 73

und für Drehungen um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

φ heisst der „Drehungswinkel". Die Ebene senkrecht zur Achse wird um $-\varphi$ gedreht.

<u>Drehung um ein Zentrum</u> nennen wir jede Bewegung, die einen Punkt (das Zentrum) fest lässt. Ist dieser als Nullpunkt des Systems gewählt, so hat die Transformation wieder die Form (ϑ) , und umgekehrt stellt

---

*) Matrizen heissen gleich, $(a_k^i) = (b_k^i)$, wenn $a_k^i = b_k^i$ für alle vorkommenden i,k.

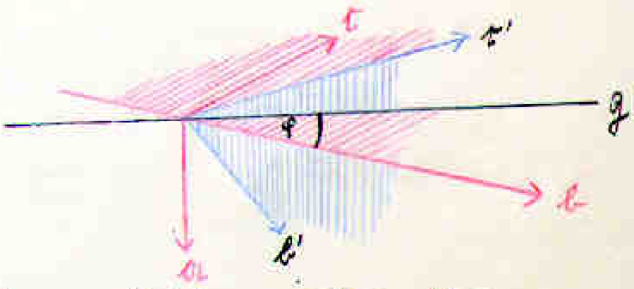
(ϑ), wenn $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ orthogonal ~~ist~~ mit positiver Determinante ist, eine Drehung um den Nullpunkt dar.

Behauptung: Jede Drehung um den Nullpunkt ist eindeutig erzeugbar aus einer Drehung I um die x-Achse (Drehwinkel φ), einer darauffolgenden Drehung II um die (vermöge I transformierte) y-Achse (Drehwinkel ψ) und einer Drehung III um die (vermöge II transformierte) x-Achse (Drehwinkel χ). Dabei ist

$0 \le \varphi < \pi$, $0 \le \psi < 2\pi$, $0 \le \chi < 2\pi$

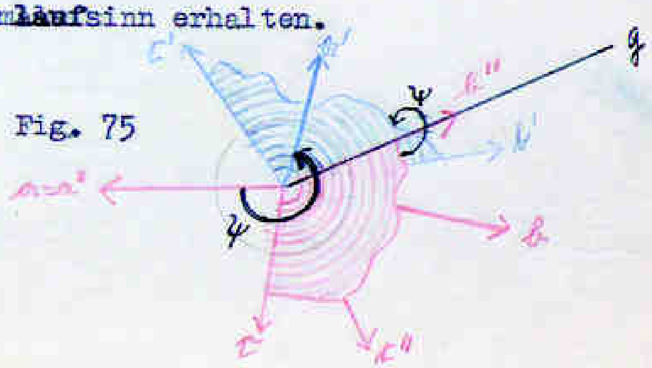
Beweis: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ seien die im Nullpunkt angehefteten Grundvektoren des ursprünglichen, bzw. des gedrehten Systems. Drehung I um $\mathfrak{a}$ führe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}''(=\mathfrak{a}), \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}''$ folgendermassen über: $\mathfrak{b}''$ soll auf der Ebene $\mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ liegen , und der Drehungswinkel φ soll nicht negativ und möglichst klein sein. Dies ist auf genau eine Weise erfüllbar. Denn liegt $\mathfrak{b}$ auf der Ebene ($\mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$) , so ist $\varphi = 0$ zu wählen, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}''$. Sonst sei g die Schnittgerade von ($\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$) und ($\mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$). Dann ist $\mathfrak{b}''$ der eindeutig bestimmte Einheitsvektor auf g von O aus, der ~~XXX~~ mit $\mathfrak{b}$ einen positiven Winkel $\varphi < \pi$ einschliesst.

Fig. 74



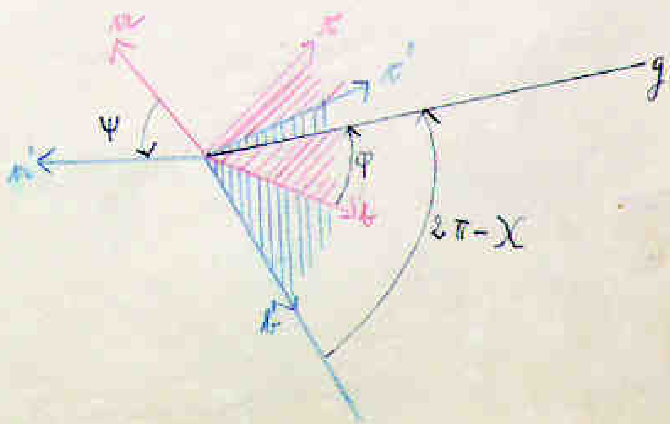
Drehung II um $\mathfrak{b}''$ führe $\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}''$ in $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}} (= \mathfrak{b}''), \bar{\mathfrak{c}}$ so über, dass $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'$ wird und zwar durch einen möglichst kleinen nichtnegativen Drehwinkel ψ. a' steht nämlich auf b'' senkrecht, weil b'' in der Ebene (b', c') liegt; a' liegt also in der Ebene (c'', a''), die vermöge II in sich übergeht. ψ ist der eindeutig bestimmte kleinste nichtnegative Winkel zwischen a'' und a' in der Ebene (a'', a'). Dabei ist der Drehsinn positiv, der c'' in a'' überführt. Offenbar ist ψ im Intervall $0 \leq \psi < 2\pi$ eindeutig bestimmt. ψ ist auch derjenige Winkel bei g, um den die Ebene (b, c) um g gedreht werden muss, bis sie so mit $(b' c')$ zusammenfällt, dass (b', c') und das Bild von (b, c) gleichen Umlaufsinn erhalten.

Fig. 75



Drehung III ist die Drehung um $\bar{a} = a'$, die mit möglichst kleinem nichtnegativen Drehwinkel χ b'' in b' überführt. χ ist eindeutig, $0 \leq \chi < 2\pi$. χ ist der positive Winkel zwischen g und b' in der Ebene (b', c').

Fig. 76



Die Eulerschen Winkel liefern eine <u>Parameterdarstellung</u> der Matrix $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, analog dem Fall der Ebene. Zur Vereinfachung der Formeln sei dabei die <u>Matrizenmultiplikation</u> eingeführt.

Definition: Das Produkt $(a^i_k)(b^i_k)$ bedeutet die Matrix $\quad (\sum a^i_l\, b^l_k) = (a^i_k)(b^i_{k;})$

(Gewöhnlich ist $(a^i_k)(b^i_k) \neq (b^i_k)(a^i_k)$. Nichtkommutative Multiplikation !)

$(a^i_k)(b^i_k)(c^i_k)$ bedeutet das Produkt $(a^i_k)\,(b^i_k)(c^i_k)$.

<u>Bedeutung dieser Definition</u>: Bestimmt (a^i_k) die Abbildung $x' \to x$ durch die Gleichungen $x^i = \sum_k a^i_k x^{k'}$, und bestimmt entsprechend (b^i_k) die Abbildung $x'' \to x'$, so bestimmt $(a^i_k)(b^i_k)$ die Abbildung $x'' \to x$.

Beweis:

$$x^i = \sum_l a^i_l x^{l'} = \sum_l a^i_l \cdot \sum_k b^l_k\, x^{k''} = \sum_k \left(\sum_l a^i_l\, b^l_k\right) x^{k''}.$$

Da nun die Drehung (D) aus I,II,III entstanden ist, gilt (man muss in den Formeln für die Achsendrehung beachten, dass diesmal im <u>positiven</u> Sinn gedreht wurde !) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & -\sin\chi \\ 0 & \sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Damit ist die Matrix der allgemeinen Nullpunktsdrehung für ein beliebiges Koordinatensystem durch unabhängige Parameter dargestellt.

Behauptung:

Jede Drehung um einen Punkt ist auch Drehung um eine Achse (die durch den Punkt geht).

Jede Bewegung lässt einen nichtverschwindenden Vektor fest.

Die zweite Behauptung umfasst die erste, nur sie werde deshalb bewiesen. Die gegebene Bewegung transformiere die Vektorkomponenten gemäss der Formel

$$v^i = \sum a^i_k \, v^{k'}$$

Für den gesuchten Vektor $\mathfrak{v}$ gilt $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$.
Wir ~~unter~~suchen zunächst einen Vektor $\mathfrak{v} \neq 0$ mit $\mathfrak{v} = \lambda \mathfrak{v}'$, also mit nicht sämtlich verschwindenden Komponenten $v^k = \lambda v^{k'}$. Diese Gleichungen sind äquivalent mit

$$\lambda v^i = \sum_k a^i_k \, v^k$$

oder wegen $\quad v^i = \sum e^i_k \, v^k \quad$:

$$(F) \qquad \sum_k (a^i_k - \lambda e^i_k) \, v^k = 0 .$$

Eine nichttriviale Lösung v^k (k= 1,2,3) von (F) soll existieren. Dazu ist notwendig und hinreichend

$$a(\lambda) = \left| a^i_k - \lambda e^i_k \right| = 0 .$$

$$a(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 - \lambda \end{vmatrix}$$ ist ein Polynom

dritten Grades *) in λ ; $a(\lambda) = -\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$.

Es ist $A_3 = a(0) = |a_k^i| = +1$. $\perp$

A_1, A_2 sind reell. Daher kann man (Beweis S. 334) $a(\lambda)$ in der Form $a(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$ darstellen . Dabei ist λ_1 eine reelle Konstante. λ_2, λ_3 sind entweder reelle, oder konjugiert komplexe Konstanten. Es ist $a(\lambda_1) = a(\lambda_2) = a(\lambda_3) = 0$ und

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a(0) = 1 .$$

Also kann kein λ_i verschwinden und es können nicht $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sämtlich negativ reell ~~sind~~ sein. Auch können nicht λ_1 negativ und λ_2, λ_3 konjugiert komplex sein, denn dann wäre $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) < 0 \neq +1$

Also ist ein $\lambda_\ell > 0$. Die zu $\lambda = \lambda_\ell$ gehörige nicht-triviale Lösung v^i von (F) bestimmt einen Vektor $\mathfrak{w}$, $|\mathfrak{w}| > 0$,sodass $\mathfrak{w} = \lambda_\ell \mathfrak{w}'$. Wegen der Längentreue der Transformation ist $|\lambda_\ell||\mathfrak{w}'| = |\mathfrak{w}| = |\mathfrak{w}'|$ also $|\mathfrak{w}'| \neq 0, |\lambda_\ell| = 1$. Also wegen $\lambda_\ell > 0$: $\lambda_\ell = 1$ $\underline{\underline{\mathfrak{w} = \mathfrak{w}'}}$ q.e.d.

---

*) $a(\lambda)$ heisst (in beliebig vielen Dimensionen, für beliebige, nicht nur orthogonale (a_k^i)) das „charakteristische Polynom" der Matrix (a_k^i). Dieselben Betrachtungen wie im Text lehren: Die „Fixrichtungen" $v^k = \lambda v^{k'}$ der Vektortransformation $v^i = \sum a_k^i v^{k'}$ sind nichttriviale Lösungen von $\sum (a_k^i - \lambda e_k^i) v^k = 0$ $(i = 1 - \ldots . n)$, wobei λ der Gleichung $a(\lambda) = 0$ genügt, oder wie man auch sagt: „charakteristische Wurzel von (a_k^i)" ist.

Behauptung:

Jede Bewegung ist eine Schraubung, d.h. zusammensetzbar aus einer Drehung um eine Achse und einer Translation längs der Achse (diese Drehung und diese Translation dürfen auch die Identität sein).

Beweis:

Der Fixvektor der Bewegung (R) sei parallel der x-Achse. Dann schreibt sich die Bewegung

$$x = x' + A$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \cos\varphi\, y' + \sin\varphi\, z' + B \\ z &= -\sin\varphi\, y' + \cos\varphi\, z' + C \end{aligned}} \quad (R)$$

Die Bewegung der Ebene (z, y) in sich, die die eingerahmten Gleichungen darstellen, ist nur fixpunktfrei, falls Translation (§9). Dann heisst

$$(R): \quad \begin{aligned} x &= x' + A \\ y &= y' + B \\ z &= z' + C \end{aligned}$$

(R) ist also eine Translation.

Besitzt das eingerahmte System einen Fixpunkt $y_0 = y'_0$, $z_0 = z'_0$, so nimmt (R) in dem kartesischen System $\xi = x,\ \eta = y + y_0,\ \zeta = z + z_0$ die Form an:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + A \\ \eta &= \cos\varphi\, \eta' + \sin\varphi\, \zeta' \\ \zeta &= -\sin\varphi\, \eta' + \cos\varphi\, \zeta' \end{aligned} \qquad (R')$$

Der Translationsvektor heisst jetzt $\begin{matrix} A \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, liegt also parallel zur ξ-Achse, der Drehachse. q.e.d.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Bemerkungen.

1) Dass jede orthogonale Matrix (a_k^i) mit $\left|a_k^i\right| = +1$ eine Drehung um eine durch den Nullpunkt gehende Achse definiert, gibt eine neue Darstellungsmöglichkeit von (a_k^i) durch drei unabhängige Parameter. Nämlich durch den Drehwinkel und durch die Länge und Breite eines Punktes der Einheitskugel um den Nullpunkt , der auf der Drehachse liegt.

2) Schraubungen mit parallelen Achsen um gleiche Winkel sind identisch bis auf eine Translation. Denn Achsenrichtung und Drehwinkel bestimmen die Transformation $x^i = \sum_k a_k^i x^{k'} + t^i$ bis auf die t^i .

3) Zwei beliebige Schraubungen s_1 , s_2 hintereinander ausgeführt, ergeben eine Bewegung, also eine Schraubung s_3 . Im folgenden soll Achse und Drehwinkel von s_3 aus den Achsen und Drehwinkeln von s_1 , s_2 konstruiert werden.

„Umlegung" heisse jede Drehung um eine Achse um π . Jede Schraubung ist äquivalent zwei Umlegungen. Seien nämlich g, t, φ bzw. Achse, Translationsvektor, Drehwinkel der Schraubung, seien A B auf g so gewählt, dass $A\,B = -\frac{t}{2}$; sonst beliebig. Seien a,b Lote auf g in A B , so dass $\sphericalangle(a,b) = -\frac{\varphi}{2}$; sonst beliebig . Dann ist die Schraubung äquivalent einer Umlegung um a und einer zweiten um die Grade, die nach der ersten Umlegung aus b entsteht. Sind umgekehrt a,b beliebige Gerade, ist A B das

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

gemeinsame Lot (bzw. irgendeines, falls $a \parallel b$), so dass A auf a und B auf b liegt, und ist $\sphericalangle(a,b) = \alpha$, so sind eine Umlegung ~~auf~~ um a und eine zweite um das Bild von b zusammen äquivalent einer Schraubung ~~und~~ um die Achse AB mit dem Translationsvektor $-2\,AB$ und dem Drehwinkel -2α. Zum Beweis verifiziere der Leser, dass die Achse die richtige Translation in sich erfährt, und die Vektoren die richtige Drehung erfahren.

Sind nun s_1, s_2 zwei Schraubungen mit den Achsen g_1, g_2 und ist l das gemeinsame Lot von g_1, g_2 (bzw. irgend eines, falls $g_1 \parallel g_2$), so zerlege man s_i durch Umlegungen mit den Achsen $a_i\ b_i$ derart, dass $b_1 = a_2 = l$ wird. Zu gegebenem l ist das eindeutig möglich. Von den 4 Umlegungen a_1, b_1, a_2, b_2, denen die aus s_1, s_2 resultierende Schraubung s äquivalent ist, finden die beiden mittleren um dieselbe Achse statt, geben also die Identität; s ist äquivalent der Umlegung um a_1 und der um das Bild von b_2. Woraus nach dem oben gesagten alle Daten von s bestimmt sind.

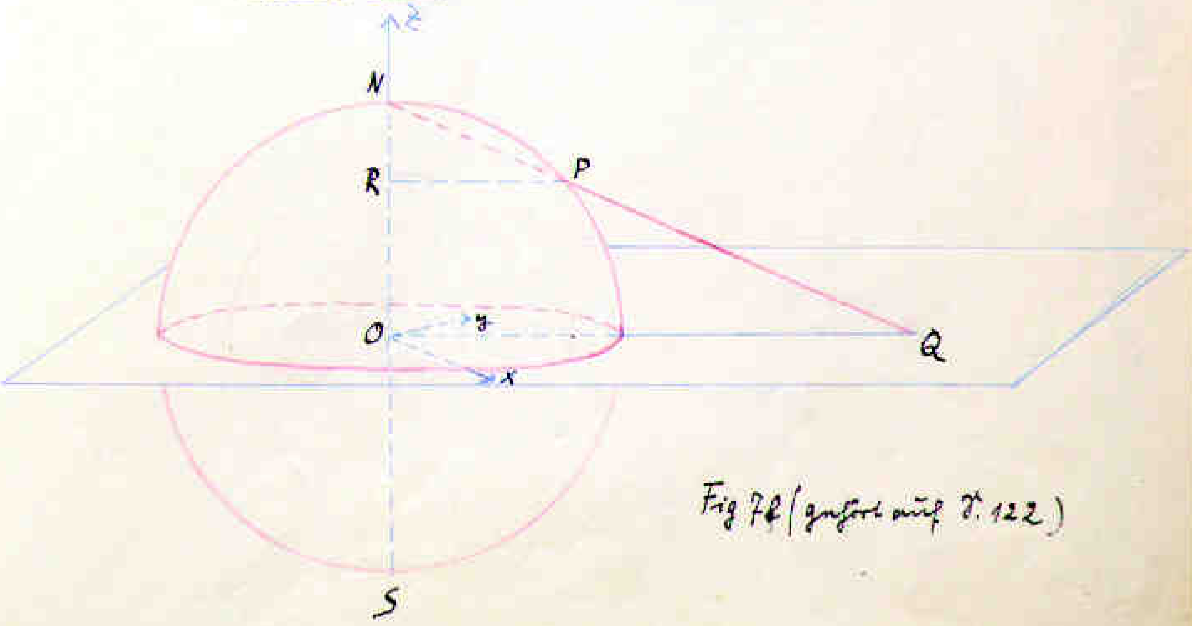


Fig 78 (gehört auf S. 122)

Symmetrien.

Bestimmt die Matrix (a^i_k) eine Symmetrie, so bestimmt $(-a^i_k)$ eine Bewegung. Denn mit (a^i_k) ist auch $(-a^i_k)$ orthogonal, und es gilt $\left|-a^i_k\right| = +1$; denn n.V. ist $\left|a^i_k\right| = -1$ und nach S. 61 E^b_3 ist $\left|-a^i_k\right| = (-1)(-1)(-1)\left|a^i_k\right|$

$$= -\left|a^i_k\right| .$$

Die Transformation $x^i = \sum a^i_k x^{k'} + t^i$ lässt sich nun zusammensetzen aus 1) $y^i = -x^{i'}$

2) $x^i = \sum - a^i_k y^k + t^i$.

1) ist eine Spiegelung am Nullpunkt (S. 20), 2) eine Schraubung, weil durch die Matrix $(-a^i_k)$ bestimmt.

Jede Symmetrie ist also zusammensetzbar aus einer Spiegelung an einem beliebigen Punkt und einer Schraubung.

Ist der Schraubungswinkel π, so werden die Vektoren senkrecht zur Achse nicht nur vermöge 1), sondern auch vermöge 2) mit -1 multipliziert, also im ganzen ungeändert gelassen. Dann ist die Symmetrie, wie man zeigen kann, äquivalent einer senkrechten Spiegelung an einer Ebene (S. 20) und einer Translation parallel dieser Ebene.

§ 11 Ähnlichkeitstransformationen.

Definition: Eine Ähnlichkeitstransformation ist eine winkeltreue affine Transformation.

Es sei eine solche durch die Matrix (c^i_k) bestimmt.

Behauptung:

$(c^i_k) = (\lambda\, a^i_k)$, wobei (a^i_k) eine orthogonale Matrix ist und $\lambda > 0$.

Zum Beweise betrachten wir die Grundvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ bzw. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und ihre Bilder $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2'$ bzw. $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'$.

Sei $0 A_1 = \mathfrak{a}_1$, $0 A_2 = \mathfrak{a}_2$, dann ist $0 A_1 A_2$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, also sind die Winkel von A_1 A_2 gleich, also auch die entsprechenden im Bilddreieck $0' A_1' A_2'$, also ist auch dieses rechtwinklig gleichschenklig, also $|\mathfrak{a}_1'| = |\mathfrak{a}_2'|$. Ebenso folgt $|\mathfrak{a}_1'| = |\mathfrak{a}_3'|$ (im Raum).

Setzen wir $|\mathfrak{a}_i'| = \lambda$, so ist $\lambda > 0$. $\mathfrak{a}_i'' = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{a}_i'$ sind zueinander orthogonale Einheitsvektoren, die Transformation $\mathfrak{a}_i \rightarrow \mathfrak{a}_i''$ ist orthogonal. Sei (a^i_k) deren Matrix, (c^i_k) die Matrix von $\mathfrak{a}_i \rightarrow \mathfrak{a}_i'$, so ist

$c^i_k = \lambda\, a^i_k$ q.e.d.

Die Transformation $\mathfrak{a}_i'' \rightarrow \mathfrak{a}_i'$ führt jeden Vektor $\mathfrak{v}$ in $\lambda \mathfrak{v}$ über. Solche Transformationen heissen Streckungen. Aus der Zerlegung von $\mathfrak{a}_i \rightarrow \mathfrak{a}_i'$ in $\mathfrak{a}_i \rightarrow \mathfrak{a}_i''$, $\mathfrak{a}_i'' \rightarrow \mathfrak{a}_i'$ folgt:

Eine Ähnlichkeitstransformation lässt sich ersetzen durch eine Bewegung oder Symmetrie und eine Streckung.

(Literatur für §§ 8–11: Lagally, Vektorrechnung und Bianchi, Geometria analitica).

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Kap. III , Kreise und Kugeln.

§ 12 Stereographische Projektion und Inversion.

a) Stereographische Projektion.

Es sei ein kartesisches Raumkoordinatensystem (x,y,z) vorgegeben und die Einheitskugel K um den Nullpunkt. Dann erfüllen die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes P auf K die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Der eine Durchstosspunkt (0,0,1) der z-Achse mit K heisse N (Nordpol), der andere (0,0, – 1) S (Südpol).

Es sei P $\neq$ N, also $\zeta \neq 1$. Dann liegt die Gerade P N nicht in der Parallelebene $\zeta = 1$ durch N zur (x,y)-Ebene. Also hat die Gerade P N sicher einen Punkt Q mit der (x,y)-Ebene gemeinsam. Die Abbildung P $\longrightarrow$ Q nennen wir die stereographische Projektion von K auf die (x,y)-Ebene von N aus.

Fig 78 (auf S. 119)

Q habe die Koordinaten x,y,0. Um x und y durch ξ, η, ζ auszudrücken, fällen wir das Lot P R von P auf N S. Dann ist P R $\parallel$ O Q, denn P R und O Q liegen beide in der Ebene (N, O , Q) und stehen senkrecht auf N S. Es ist

$$\rho^2 = PR^2 = \xi^2 + \eta^2$$
$$r^2 = OQ^2 = x^2 + y^2$$

Die Ebene (N,O,Q) bilde mit der (x,z)-Ebene den Winkel φ. Dann ist

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$
$$\xi = \rho \cdot \cos\varphi$$
$$\eta = \rho \cdot \sin\varphi$$

Also: $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{r}{\rho}$

2. Nach dem Strahlensatz (N als Scheitel) ist

$$\frac{r}{\rho} = \frac{ON}{RN} = \frac{1}{1-\zeta}$$, da ON = 1 und RN = ON − OR = $1 - \zeta$

Also ist $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1-\zeta}$

Daraus folgt

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y &= \frac{\eta}{1-\zeta} \end{aligned}} \qquad (S)$$

Dies sind die gesuchten Transformationsformeln.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Behauptungen: 1.) Den Kreisen auf der Kugel entsprechen bei stereographischer Projektion die Kreise und Geraden auf der Ebene.

2.) Winkel bleiben bei stereographischer Transformation erhalten. (Dabei verstehen wir unter dem Winkel zweier Kurven den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt.

Beweis für 1): Die Kreise und Geraden der (x,y)Ebene sind gegeben durch die Gleichung:

I. $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

$a \neq 0$ gibt die Kreise, $a = 0$ die Geraden. Nun folgt aus (8):

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

I gibt also für die entsprechenden Punkte von K :

II' $\dfrac{a(1+\zeta)+b\xi+c\eta+d(1-\zeta)}{1-\zeta}=0$

da $P \neq N$, $\zeta \neq 1$, hat II' einen Sinn und ist gleichbedeutend mit

II) $a(1+\zeta)+b\xi+c\eta+d(1-\zeta)=0$

Dies ist die Gleichung einer Ebene e. Alle Bildpunkte P des Kreises I liegen also auf der Schnittlinie von K mit e, also auf einem Kreis. Umgekehrt erfüllen die Punkte jedes Kreises auf K eine lineare Gleichung, nämlich die der Kreisebene; diese lineare Gleichung lässt sich stets in die Form II bringen und zieht für die Punkte $P \neq N$ I nach sich. $a = 0$ ergibt sich dann und nur dann, wenn die Koordinaten 0,0,1 von N II erfüllen. d.h. ein Kreis auf K wird dann und nur dann in eine Gerade abgebildet, wenn der Kreis durch N geht.

Beweis der Behauptung 2). In Fig. 79 sei Q das stereographische Bild von P . N sei der Pol. t_1, t_2 seien

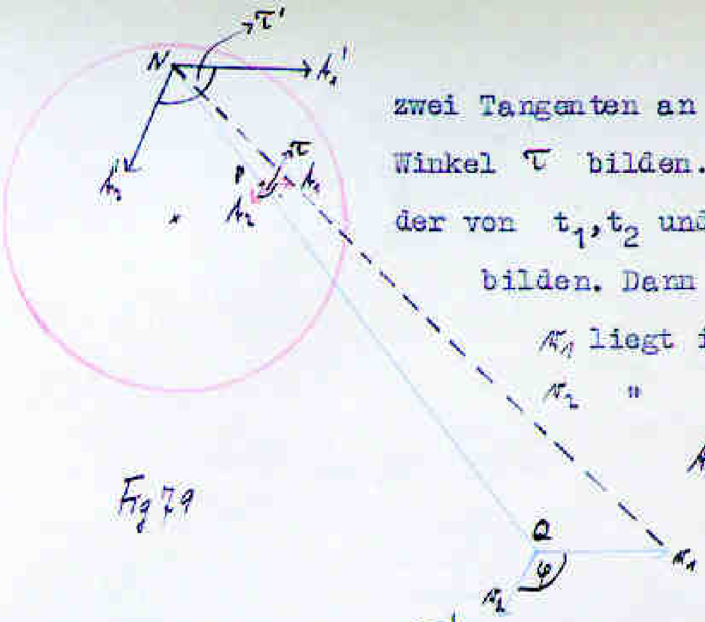


Fig 79

zwei Tangenten an K in P, die den Winkel τ bilden. $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ seien die Bilder von t_1, t_2 und sollen den Winkel φ bilden. Dann ist zu zeigen: $\tau = \varphi$

$\mathfrak{t}_1$ liegt in der Ebene $e_1(N, t_1)$

$\mathfrak{t}_2$ " " " " $e_2(N, t_2)$

t_1', t_2' seien die Tangenten in N an die Schnittkreise von e_1 und e_2 mit K

Sie sollen den Winkel τ' einschliessen. Es ist t_1' die Schnittgerade von e_1 und der Tangentialebene an K durch N und $\mathfrak{t}_1$ die Schnittgerade von e_1 und der (xy)Ebene. Da aber die Tangentialebene durch N parallel der (xy)Ebene ist, ~~so~~ folgt $t_1' \parallel \mathfrak{t}_1$

Entsprechend $t_2' \parallel \mathfrak{t}_2$ also $\tau' = \varphi$

Nun muss nur noch bewiesen werden: $\tau = \tau'$. Zu diesem Zweck betrachten wir die Ebene e durch $\mathfrak{f}$, die auf NP senkrecht steht (Fig.80). Wir spiegeln senkrecht an e. Dann wird

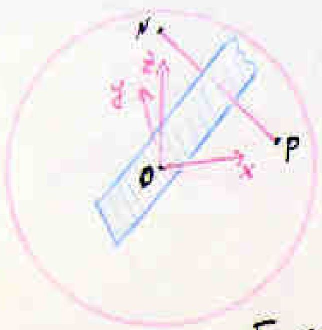


Fig 80

$$e_1 \rightarrow e_1$$
$$e_2 \rightarrow e_2$$
$$K \rightarrow K$$
$$N \longrightarrow P$$
$$P \longrightarrow N$$
$$\tau \longrightarrow \tau'$$

Da aber Spiegelungen winkeltreu sind, so ist $\tau = \tau'$ q.e.d.

b. Inversion.

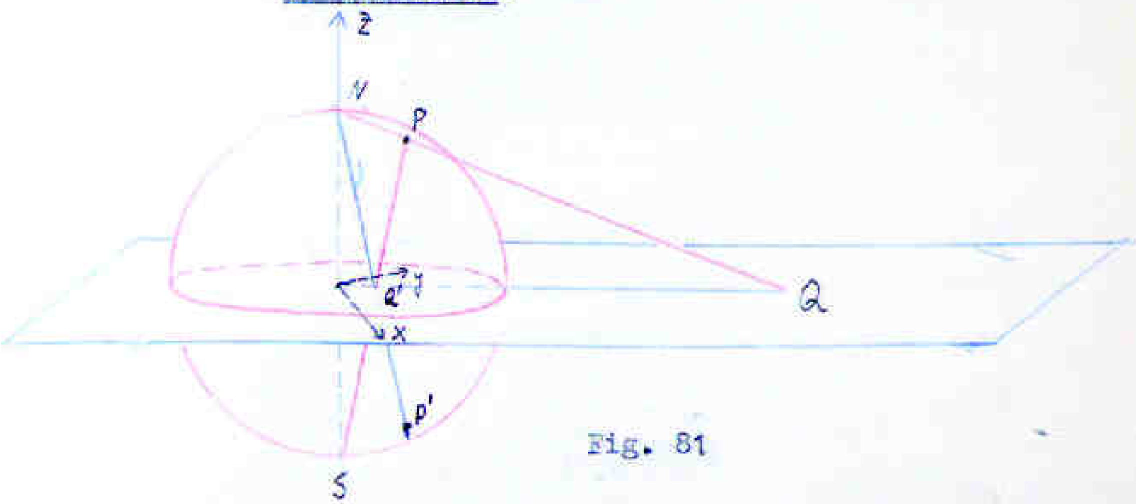


Fig. 81

Definition: Die stereographische Projektion eines Punktes P von N aus und von S aus seien Q und Q' . Dann heisst die Transformation $Q \rightleftarrows Q'$ der (x,y)-Ebene Inversion am Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Die Inversion an einem beliebigen Kreis ist bestimmt durch die angegebene Konstruktion in einem System, wo jener Kreis Einheitskreis um den Nullpunkt ist. Für die Koordinaten x,y von Q gilt:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \; ; \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} \; ; \quad x^2 + y^2 = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \, .$$

Entsprechend folgt für die Koordinaten x',y' von Q':

$$x' = \frac{\xi}{1+\zeta} \; ; \quad y' = \frac{\eta}{1+\zeta} \; ; \quad x'^2 + y'^2 = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \, .$$

Also $x = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \dfrac{y'}{x'^2 + y'^2}$

$$(J) \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{x'^2 + y'^2} \, .$$

Q' kann auch aufgefasst werden als stereographische Projektion eines Punktes P' von N aus. Dabei entsteht

P' durch Spiegelung von P an der (x,y)-Ebene (Fig. 81).

Beweis: Bei der Spiegelung geht über:

$$Q' \longrightarrow Q'$$
$$P' \longrightarrow P$$
$$N \longrightarrow S$$

also $NQ'P' \longrightarrow SQ'P$ q.e.d.

Anschaulich klar und ~~nicht~~ leicht aus (J) zu verifizieren ist der Satz:

<u>Wenn man am selben Kreis zweimal invertiert, so bekommt man die Identität.</u>

Wir können also die Inversion als „Spiegelung an einem Kreis" bezeichnen.

<u>Konstruktion der Inversion ohne räumliche Hilfsmittel.</u>

Es sei K ein Einheitskreis. $Q \neq O$. Dann sind Q und Q' invers in Bezug auf K, wenn

$$OQ = \frac{1}{OQ'}, \quad (\text{ Fig. } 82)$$

und wenn Q', Q auf einer durch O gehenden Geraden auf derselben Seite von O liegen.

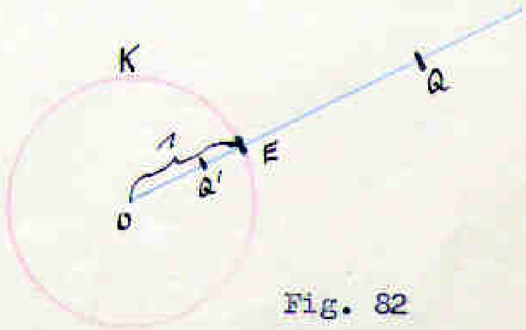


Fig. 82

<u>Beweis</u> (durch Ausrechnen):

Wir führen Polarkoordinaten ein und lassen den Mittelpunkt des Kreises zum Nullpunkt des Systems werden.

$x = r \cdot \cos\varphi \qquad x' = r' \cos\varphi'$

$y = r \cdot \sin\varphi \qquad y' = r' \sin\varphi'$

Dann ist:

$$x' = \frac{1}{r} \quad \cos\varphi$$

$$y' = \frac{1}{r} \quad \sin\varphi$$

Also $\varphi = \varphi'$

$$r = \frac{1}{r'} \qquad\qquad \text{q.e.d.}$$

Damit ein Punkt Fixpunkt sei, ist notwendig und hinreichend $r = 1$, denn dann und nur dann ist

$$r' = \frac{1}{r} = r, \quad \varphi' = \varphi \, .$$

D.h. fest bleiben alle und nur die Punkte auf der Peripherie des spiegelnden Kreises.

Der Punkt O hat kein Bild und kein Original. Denn (J) versagt dann und nur dann, wenn $x^2 + y^2 = 0$, also $x = y = 0$.

Behauptung: Die Inversion ist kreistreu und winkeltreu. (Dabei ist die Gerade wieder als Spezialfall eines Kreises zu betrachten).

Die Winkeltreue folgt ohne weiteres aus der Winkeltreue von stereographischen Projektionen (S. 124/125).

Beweis für die Kreistreue.

I $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$

ist die Gleichung eines Kreises falls $a \neq 0$, einer Geraden, falls $a = 0$ (S. 124). x' und y' erfüllen dann die Gleichung

$$\cancel{\frac{a}{x'^2 + y'^2} + b\,x' + c\,y' + d = 0}$$

$$a + b\,x' + c\,y' + d\,(\,x'^2 + y'^2\,) = 0 \quad .$$

Das Bild ist also auch ein Kreis bzw. eine Gerade q.e.d.

Geraden gehen bei Inversion in Kreise durch den Nullpunkt über und umgekehrt.

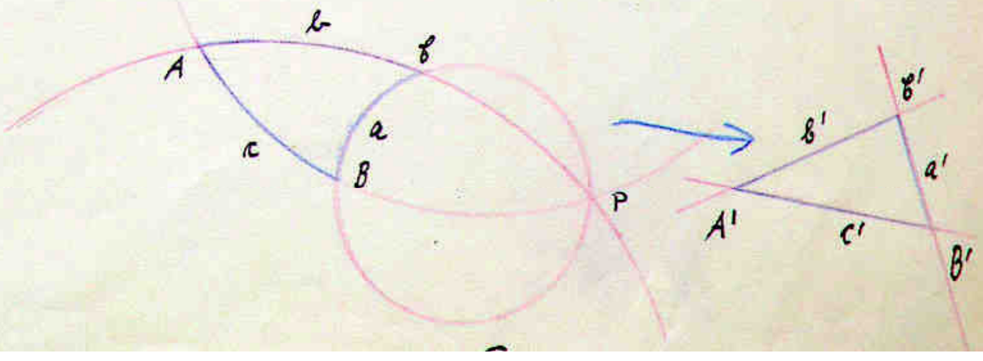
Beweis: Geraden, die durch I dargestellt werden, wobei $a = 0$ ist, gehen über zu Kurven der Form

$$bx' + cy' + d(\,x'^2 + y'^2\,) = 0 \;.$$

Das sind aber Kreise durch 0 (denn das Absolutglied fehlt). Die Umkehrung folgt analog.

Beispiel für Anwendung der Inversion auf Sätze über Winkel.

Die Winkelsumme in einem Dreieck, das aus Bögen dreier durch einen Punkt P gehender Kreise gebildet wird, ist 2 R, wenn P ausserhalb des Dreiecks liegt.



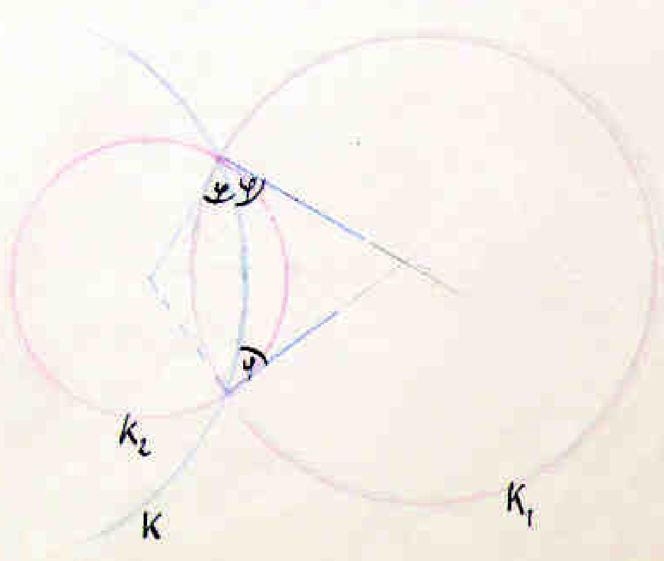
ABC mit den Bögen a,b,c sei das Dreieck (Fig.83).
Wir spiegeln an P als Inversionszentrum. Dabei gehen a,b,c in Geraden a',b',c' über. Diese schliessen die Winkelsumme 2 R ein. Wegen der Winkeltreue schließt also auch ABC die Winkelsumme 2 R ein q.e.d.

Die Abbildung allgemeiner Kreise.

1) Der gespiegelte Kreis liegt innerhalb von K ,wenn der ursprüngliche Kreis ausserhalb von K liegt und umgekehrt.

2) Schneidet ein Kreis K_1 den Spiegelungskreis K , so hat der Bildkreis K_2 dieselben Schnittpunkte mit K und denselben Winkel. Wir können ihn also zeichnen, wie es in Fig. 84 angegeben ist. Speziell gilt dann:
<u>Ein Kreis, der den Spiegelkreis K senkrecht schneidet, geht in sich selbst über und umgekehrt.</u>

Fig. 84.



Ferner gilt:

Kreise, die sich im Inversionszentrum O berühren, werden parallele Geraden und umgekehrt. Dass diese Kreise nämlich Geraden werden, ist bereits gezeigt. Damit nun die Geraden sich nicht schneiden, also parallel sind, ist notwendig und hinreichend, dass jene Kreise keinen Punkt ausser O gemein haben. Sie müssen sich also, wie behauptet, in O berühren.

§ 13 Orthogonale Kreisbüschel.

Die Gesamtheit der Kreise durch zwei verschiedene Punkte nennt man ein Kreisbüschel.

Sei Q' invers zu Q bezüglich K; Q liege nicht auf K, also $Q \neq Q'$ (Fig. 86). Dann geht jeder Kreis ~~durch~~ durch Q und Q' bei Spiegelung an K in sich über, steht also nach § 12 Ende auf K senkrecht.

Beweis:

Jeder Kreis K' durch QQ' muss K in zwei Punkten P_1P_2

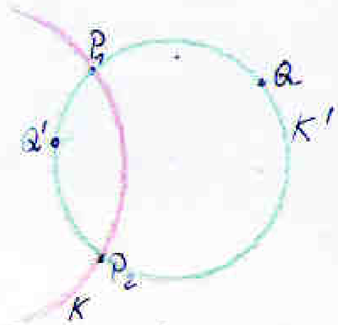


Fig. 86 .

schneiden, denn von den Punkten Q Q' liegt einer innerhalb, einer ausserhalb K. Die vier verschiedenen Punkte Q Q' P_1P_2 werden in Q' Q P_1P_2 gespiegelt, das Bild K'' von K' geht also durch Q' Q P_1P_2 ; ebenso K'. Also $K'' = K'$, da ein Kreis durch 3 verschiedene Peripheriepunkte bestimmt ist.

Umgekehrt: Stehen zwei Kreise mit den Schnittpunkten Q, Q' senkrecht auf einem Kreis K, so ist Q' invers zu Q bezüglich K (und jeder Kreis durch Q , Q' steht auf K senkrecht).

Beweis: Nach § 12 Ende gehen beide Kreise bei Inversion an K in sich über, also auch das Punktepaar Q, Q'. Entweder $Q \rightarrow Q'$, $Q' \rightarrow Q$, oder $Q' \rightarrow Q'$, $Q \rightarrow Q$. Der zweite Fall bedeutete, dass $Q\,Q'$ beide auf der Peripherie von K lägen, das geht nicht, denn dann gäbe es nur <u>einen</u> Kreis durch Q, Q' senkrecht auf K. Also $Q \rightleftarrows Q'$, q.e.d.

(Um also Q' bei gegebenem Q, K zu konstruieren, hat man nur zwei auf K senkrechte Kreise durch Q zu legen; Q' ist deren zweiter Schnittpunkt; als einer der Kreise kann der durch Q' gehende Durchmesser von K gewählt werden. Falls K eine Gerade ist, liefert die Konstruktion die senkrechte Spiegelung an dieser Geraden. Senkrechte Spiegelung an einer Geraden ist also ein Sonderfall der Inversion)

Die Gesamtheit (K) aller Kreise, ~~die wie K auf allen Kreisen~~, die wie K auf allen Kreisen des Büschels (K') durch $Q\,Q'$ senkrecht stehen, heisst auch Kreisbüschel und zwar das zu (K') orthogonale.

(K) besteht aus den und nur den Kreisen, bezüglich derer Q invers zu Q' liegt. Der Mittelpunkt O eines solchen Kreises liegt auf der Geraden $Q\,Q'$, und jeder Punkt O dieser Geraden ausserhalb der Strecke $Q\,Q'$ ist auch Mittelpunkt genau eines Kreises aus (K). Der Radius $r_0 > 0$ des gesuchten Kreises muss nämlich nur der Bedingung $r_0^2 = OQ \cdot OQ'$ genügen und ist dadurch eindeutig bestimmt.

Die Büschel (K) , (K') mögen an einem Kreise mit dem Zentrum Q' und dem Radius Q Q' gespiegelt werden (Fig.88).

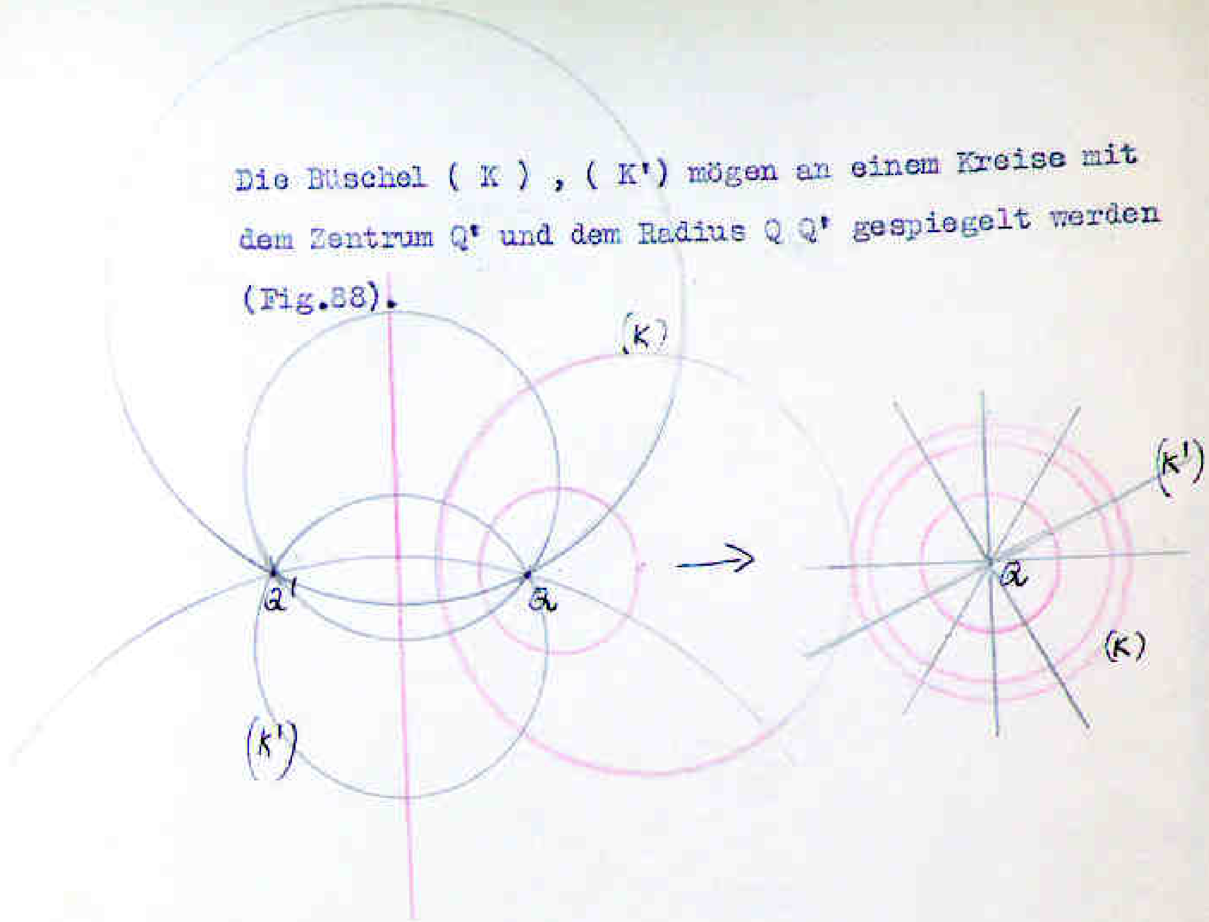


Fig. 88

Dann geht (K') über in die Geraden durch Q und (K) in das zu diesen Geraden orthogonale Büschel, also die konzentrischen Kreise um Q.

Hieraus folgt: Die Kreise des Büschels, das auf einem Büschel durch zwei verschiedene Punkte senkrecht steht, schneiden einander nicht.

Ferner: Konzentrische Kreise sind ein Büschel, ebenso die Geraden durch einen Punkt.

Als Büschel bezeichnet man auch die Gesamtheit (K) der Kreise durch einen Punkt Q, die in Q dieselbe Tangente t haben. Das zu (K) orthogonale Büschel (K') besteht aus allen Kreisen durch Q , die dort dieselbe

Tangente $t' \perp t$ haben. Dass alle Kreise aus (K') senkrecht auf allen Kreisen aus (K) stehen, ist klar. Dass es ausser (K') keine solchen Kreise gibt, folgt durch Inversion mit Q als Zentrum (Fig. 89). Denn diese führt (K) in parallele Geraden (K_o) über (§ 12 Ende). Jeder auf (K) senkrechte Kreis geht in ~~MK~~ einen Kreis (bzw. eine Gerade) über, der auf allen Geraden (K_o) senkrecht steht; das tun nur die auf (K_o) senkrechten Geraden, und diese sind Bilder von (K'); also gehört jeder auf (K) senkrechte Kreis zu (K') q.e.d.

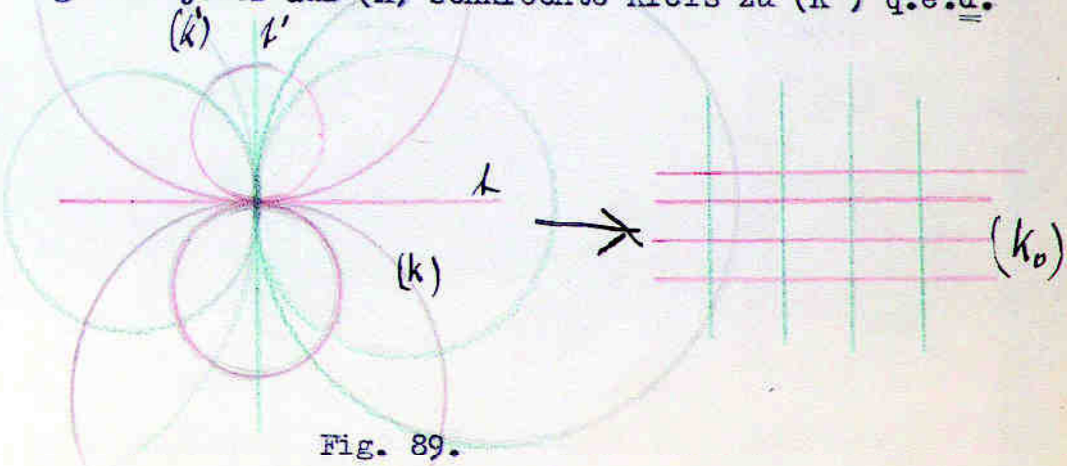


Fig. 89.

<u>Folgerung</u>: Alle zu einer Geraden Parallelen sind ein Büschel.

Bemerkung: Sei

$$K_i = a_i (x^2 + y^2) + b_i x + c_i y + d_i \qquad (i = 1,2) .$$

Dann ist offenbar

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 = 0 \qquad (B)$$

für jedes Zahlenpaar α_1, α_2 ausser $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ die Gleichung eines Kreises oder einer Geraden, wenn wir noch voraussetzen, dass es keine Konstanten ~~gibt~~ α_1, α_2 gibt, für die (B) identisch in x,y gilt. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen:

(B) stellt, wenn α_1 , α_2 alle Werte durchlaufen, ein Kreisbüschel gemäss einer der Definitionen dieses § dar, und umgekehrt lässt sich jedes Kreisbüschel in der Form (B) darstellen.

Die Linearität von (B) in K_1 , K_2 ist der Grund, warum man solche Mannigfaltigkeiten von Kreisen betrachtet.

§ 14 Inversion im Raum.

Sei K eine Kugel mit dem Radius r und den Mittelpunkt O, Q ein beliebiger Punkt $\neq O$. „Inversion" oder „Spiegelung" an K heisst die Abbildung $Q \longrightarrow Q'$, wobei Q' folgendermassen konstruiert wird:
Q' liegt auf der Geraden O Q, sodass O nicht zwischen Q und Q' liegt, und so dass $OQ \cdot OQ' = r^2$.
Die Inversion im Raum hat analoge Eigenschaften wie die in der Ebene. Sie seien im folgenden kurz mit blossen Andeutungen der Beweise genannt.

1) Ist Q' invers zu Q, so auch Q zu Q' (klar).

2) Ungeändert bleiben alle und nur die Punkte von K (klar).

3) In einem System mit dem Nullpunkt O und der Einheitsstrecke r stehen die Koordinaten (x^i) von Q mit denen von Q' (y^i) in der Beziehung:

$$y^i = \frac{x^i}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \qquad (i = 1,2,3)$$

(Ausrechnen mittels Polarkoordinaten).

4) Die Gesamtheit aller Kugeln und Ebenen geht in sich über; den Ebenen entsprechen die Kugeln durch O und umgekehrt.

(Die Gleichung

$$a_0 \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{3} a_i x^i + a_4 = 0 \quad \text{geht über in}$$

$$a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i y^i + a_4 \sum_{i=1}^{3} (y^i)^2 = 0 \quad)$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

5) Die Gesamtheit der Kreise und Geraden geht in sich über. Den Geraden entsprechen die Kreise durch O.

(Kreise bzw. Geraden sind die Schnittkurven von Kugel bzw. Ebenen.)

6) Die und nur die Kugeln und Kreise (Ebenen und Geraden) gehen in sich über, (enthalten also mit jedem Punkt auch den Inversen), die K senkrecht schneiden. (Zurückführung auf die Inversion in der Ebene. Die Ebenen durch O und irgendeinen Punkt des betrachteten Gebildes gehen definitionsgemäss in sich über und erleiden eine Inversion an ihrem Schnittkreis mit K.)

7) Die räumliche Inversion ist winkeltreu. (Die Richtungen t_1 t_2 durch Q mögen in die Richtungen t'_1 t'_2 durch Q' übergehen. Dann lege man durch Q diejenigen-eindeutig bestimmten Kreise k_1, k_2, die auf K senkrecht stehen und in Q die Richtungen t_1 t_2 haben. Nach 6) gehen k_1 k_2 durch Q' und haben dort die Richtungen t'_1 t'_2. Nun genügt für den Beweis von 7) der allgemeine Satz:

Schneiden sich zwei Kreise k_1, k_2 im Raum in zwei Punkten Q Q', so bilden sie bei Q und Q' gleiche Winkel.

Beweis: Spiegelt man senkrecht an der Ebene e, die im Mittelpunkt von $Q\,Q'$ auf $Q\,Q'$ senkrecht steht, so geht Q in Q' über und die Kreise k_1, k_2 gehen in sich über; denn sei P_i ein Durchstosspunkt von k_i mit e, so wird das Punktetripel $P_i\,Q\,Q'$ durch die Spiegelung in $P_i\,Q'\,Q$, also in sich übergeführt, also auch k_i, weil durch dieses Tripel eindeutig bestimmt, und weil die Spiegelung an e keine Symmetrie ist (§ 10), also Kreise in Kreise überführt. Da jene Spiegelung auch winkeltreu und der Winkel von k_1 k_2 bei Q in den bei Q' übergeführt wird, sind beide gleich.)

Kap. IV. Kurven und Flächen 2. Ordnung in affiner Behandlung.

§ 15. Definitionen, Schnittsätze.

„Quadratische Form" in n Variabeln $x^1, x^2 . . , x^n$ heisst jeder Ausdruck

$$Q(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k ,$$

wobei die a_{ik} nicht von $x^1 . . . x^n$ abhängen.

Wir setzen voraus, dass die Matrix (a_{ik}) symmetrisch ist, d.h. $a_{ik} = a_{ki}$. Das ist keine Beschränkung, denn wegen $x^i x^k = x^k x^i$ ist

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} x^i x^k = \sum_{i,k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) x^i x^k .$$

„Linearform" in $x^1, . . . x^n$ heisst jeder Ausdruck

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i ,$$

wobei die a_i nicht von $x^1 . . . . x^n$ abhängen.

„Quadratisches Gebilde" in $x^1, . . . , x^n$ heisst die Gesamtheit aller Systeme $(x^1, . . . , x^n)$, die eine Gleichung

$$Q(x,x) + 2 L(x) + A = 0$$

erfüllen, wo Q eine quadratische, L eine Linearform in $x^1, x^2 . . , x^n$ und A eine Konstante ist.

„Schar quadratischer Gebilde" heissen die quadratischen Gebilde, deren Gleichungen in Q und L übereinstimmen, während A, der „Parameter" der Schar, von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Jede Schar bedeckt den n-dimensionalen Raum einfach und lückenlos, d.h. zu jedem System ($\xi^1 . . . . \xi^n$) gehört genau ein Exemplar der Schar, nämlich dasjenige mit

$$A = - 2 L(\xi) - Q(\xi,\xi) .$$

Ein quadratisches Gebilde in x^1, x^2, x^3 heisst <u>Fläche 2. Ordnung,</u> wenn $x^1 \ldots x^3$ affine Raumkoordinaten sind.

Ein quadratisches Gebilde in x^1, x^2 heisst <u>Kurve 2. Ordnung,</u> wenn x^1, x^2 affine Koordinaten in der Ebene sind.

Ein quadratisches Gebilde in t heisst <u>Punktepaar,</u> wenn t Pargmeter einer Geraden ist, d.h. wenn eine Gerade durch

$$x^i = x^i_0 + t\,b^i \quad (i = 1 \ldots n), \quad (n = 2, 3),$$

gegeben ist. $\left(\sum_{i=1}^{n} (b^i)^2 > 0\right)$

Aus diesen Definitionen folgen die „Schnittsätze":

<u>1) Eine Schar von Kurven oder Flächen 2. Ordnung wird von jeder Geraden in einer Schar von Punktepaaren geschnitten.</u>

Beweis: Die Schnittpunkte der Geraden $x^i = y^i + tb^i$ mit $Q(x,x) + 2L(x) + A = 0$ gehören zu den Werten t, die die Gleichung

$$Q(y + tb, y + tb) + 2L(y + tb) + A = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sum_{i,k} a_{ik}(y^i + tb^i)(y^k + tb^k) + 2\sum_i a_i(y^i + tb^i) + A = 0 \quad \text{oder}$$

$$t^2 \sum a_{ik} b^i b^k + 2t\left[\sum a_{ik} y^i b^k + \sum a_i b^i\right] + Q(y) + 2L(y) + A = 0 \quad \text{oder}$$

$$t^2 \alpha_{11} + 2t\alpha_1 + A' = 0$$

erfüllen. α_{11}, α_1 hängen nicht von t und nicht von A ab, A' läuft mit A von $-\infty$ bis $+\infty$. q.e.d.

2) <u>Jede Schar von Flächen 2. Ordnung wird von jeder Ebene in einer Schar von Kurven 2. Ordnung geschnitten.</u>

Beweis: Ist die Ebene gegeben durch

$x^i = y^i + sb^i + tc^i \qquad (i = 1 \,.\,.\, 3) \quad (b \neq c)$,

so sind s,t affine Koordinaten in dieser Ebene (S. 22) .

Die Schnittpunkte mit

$$Q(x,x) + 2\,L(x) + A = 0$$

sind durch die Wertsysteme s,t gegeben, die

$Q(y + sb + tc, y + sb + tc) + 2\,L(y + sb + tc) + A = 0$

erfüllen.

Nach den Potenzen von s,t geordnet, erhält diese Gleichung die Form

$\alpha_{11}\, s^2 + 2\,\alpha_{12}\, st + \alpha_{22}\, t^2 + 2\,\alpha_1\, s + 2\,\alpha_2\, t + A' = 0$.

Dabei hängen die α weder von s,t noch von A ab, und für $-\infty < A < +\infty$ durchläuft offenbar A' dasselbe Intervall. q.e.d.

Quadratische Formen in $x^1 \,.\,.\, x^n$ gehen in quadratische Formen in $y^1 \,.\,.\,.\, y^n$ über, wenn man die Transformation $x^i = \sum_{k=1}^{n} c^i_k\, y^k$ vornimmt.

Scharen von Gebilden zweiter Ordnung in $x^1 \,.\,.\,.\, x^n$ gehen über in Scharen von Gebilden zweiter Ordnung in $y^1 \,.\,.\, y^n$, wenn man die Transformation

$x^i = \sum_{k=1}^{n} c^i_k\, y^k + t^i$

vornimmt.

§ 16 Normaltypen der Scharen von Punktepaaren, Kurven und Flächen 2. Ordnung.

Die in Anhang § 7 gegebenen Typen sollen in den Fällen $n = 1,2,3$ angewandt werden.

I) $n=1$ Punktepaare .

a) $\varepsilon_1 = 1$, $(z)^2 + B = 0$

Für $B < 0$ die beiden zu $z = 0$ symmetrischen Punkte $z = \pm \sqrt{-B}$. Für $B = 0$: $z = 0$. Für $B > 0$: kein reeller Punkt.

b) $\varepsilon_1 = 0$

$bz + B = 0$

α) $b \neq 0$: Für jedes B ein Punkt .

β) $b = 0$: Für $B = 0$ alle Punkte, für $B \neq 0$ keiner.

Damit haben wir die volle Übersicht über den Schnitt irgend einer Schar von Gebilden 2. Ordnung mit einer Geraden. Wann tritt b) ein ? Für den Parameter t der Geraden $x^i = y^i + tb^i$ gibt die Gleichung des gegebenen Gebildes :

$$t^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b^i b^k + 2\, tc + A = 0 .$$

Fall b) ist äquivalent mit

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b^i b^k = Q(b,b) = 0 .$$

Die Richtungen, deren Komponenten b^i $Q(b,b) = 0$ erfüllen, heissen <u>Asymptotenrichtungen</u> des Gebildes.

Wir haben den Satz:

<u>Eine Gerade, die nicht Asymptotenrichtung hat, schneidet die Schar in Punktepaaren vom selben Mittelpunkt.</u>

Oder: Trifft eine Gerade g das Gebilde F_1 in $P_1 Q_1$, und trifft g das Gebilde derselben Schar F_2 in $P_2 Q_2$, so ist $P_1 P_2 = Q_1 Q_2$ (bei richtiger Benennung).

Beweis: Die Punktepaare, die g mit F_1, F_2 gemein hat, sind n.V. nicht vom Typ b), also vom Typ a).

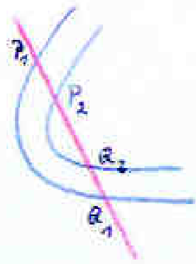


Fig. 90.

II. Kurvenscharen 2.Ordnung.

a) $\quad Q = (y^1)^2 + (y^2)^2$

Das lineare Glied lässt sich fortschaffen (S.338), wir erhalten also den Typ

$$(z^1)^2 + (z^2)^2 + A = 0 \qquad (E)$$

Für $A > 0$ genügt kein Punkt dieser Gleichung, für $A = 0$ nur der Punkt $z^1 = z^2 = 0$. Für $A < 0$ erhalten wir konzentrische Kreise um diesen Punkt, falls das Koordinatensystem kartesisch ist. (E) stellt daher für $A < 0$ Kurven dar, die durch affine Transformation in konzentrische Kreise überführbar sind. Diese Kurven heissen <u>Ellipsen</u>. Jede Gerade schneidet konzentrische Kreise, also auch Ellipsenscharen in Punktepaaren vom Typ Ia; Ellipsen haben keine Asymptotenrichtung.

b) $\quad Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 \qquad$ Das lineare Glied lässt sich fortschaffen. Typ

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

$$(\mathfrak{z}^1)^2 - (\mathfrak{z}^2)^2 + A = 0 \qquad (H)$$

Für $A = 0$ heisst (H): $(\mathfrak{z}^1 + \mathfrak{z}^2)(\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2) = 0$, stellt also die beiden Geraden $\mathfrak{z}^1 \pm \mathfrak{z}^2 = 0$ dar. Für $A \neq 0$ heissen die Kurven (H) Hyperbeln. Asymptotenrichtung besitzt jeder Vektor $(\mathfrak{b}^1\ \mathfrak{b}^2)$, der die Gleichung erfüllt

$(\mathfrak{b}^1)^2 - (\mathfrak{b}^2)^2 = 0$, also $\mathfrak{b}^1 \pm \mathfrak{b}^2 = 0$. Da Hyperbeln Asymptotenrichtungen haben, Ellipsen nicht, kann eine Hyperbel durch eine affine Transformation nicht in eine Ellipse übergehen. Die Geraden $\mathfrak{z}^1 \pm \mathfrak{z}^2 = 0$ heissen Asymptoten der Hyperbeln (H); es sind die einzigen Geraden die keine dieser Hyperbeln (H) schneiden, denn die Schar (H) bedeckt die Ebene einfach und lückenlos; durch jeden Punkt, der nicht auf einer Asymptote liegt, geht eine Kurve (H) mit $A \neq 0$.

Durch die Transformation

$$\omega^1 = \mathfrak{z}^1 + \mathfrak{z}^2$$
$$\omega^2 = \mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}^2$$

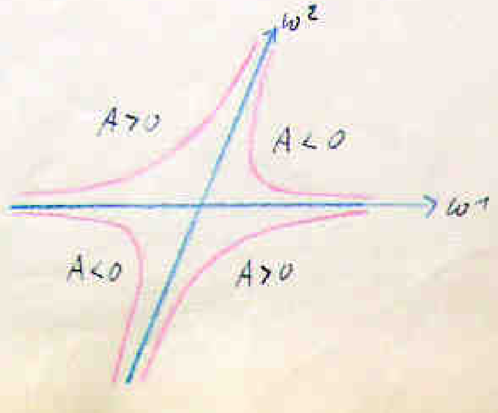
(Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$)

geht H über in

$$\omega^1 \omega^2 + A = 0 \qquad (H')$$

die für die Punktkonstruktion der Hyperbeln bequemer ist als (H)

Fig. 91



c) $Q = (y^1)^2$. Nach S. 338 sind zwei Fälle möglich, je nachdem das lineare Glied fehlt oder nicht.

α) $(z^1)^2 + z^2 + A = 0 \quad (P)$.

Alle Kurven der Schar sind durch die Translation

$z^1 = w^1$

$z^2 + A = w^2$

in die Kurve $(w^1)^2 + w^2 = 0$ überführbar, die dem Wert $A = 0$ in (P) entspricht. Der Translationsvektor t ($t^1 = 0$, $t^2 = A$) hat Asymptotenrichtung $(t^1)^2 = 0$. Weitere Asymptotenrichtungen gibt es nicht. Die Kurven (P) sind daher weder einer Hyperbel noch einer Ellipse affin äquivalent. Sie heissen Parabeln.

Fig. 92

β) $(z^1)^2 + A = 0$.

Für $A > 0$ kein Punkt, für $A = 0$ die Gerade $z^1 = 0$, für $A < 0$ das Paar zu $z^1 = 0$ paralleler und symmetrischer Geraden $z^1 = \pm\sqrt{-A}$.

d) $Q = 0$;

α) $L \not\equiv 0$: $z^1 + A = 0$, parallele Geraden.

β) $L \equiv 0$: $A = 0$; für $A \neq 0$ kein Punkt, für $A = 0$ die ganze Ebene.

Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln heissen „nichtausgeartete" Kurven 2. Ordnung. Die übrigen heissen „ausgeartet".

III, Raum: Flächenscharen 2. Ordnung.

a) $Q = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2$. Nach S. 335 kann man das lineare Glied durch Translation beseitigen.

Normaltyp:

$$\underline{(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + A = 0} .$$

Für $A > 0$ kein Punkt, für $A = 0$ der Nullpunkt, für $A < 0$ Flächen, die Kugeln um den Nullpunkt affin äquivalent sind. Sie heissen Ellipsoide. Aus der affinen Äquivalenz mit der Kugel folgt: Ebene und Ellipsoid haben nichts, einen Punkt oder eine Ellipse gemein.

b) $Q = (y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2$. Linearglied durch Translation tilgbar; Normaltyp:

$$\underline{(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 + A = 0} .$$

Die Flächen dieser Schar heissen

α) für $A > 0$: Zweischalige~~s~~ Hyperboloide,

β) für $A = 0$: Kegel 2. Ordnung,

γ) für $A < 0$: einschalige Hyperboloide.

α) $A > 0$. $(z^3)^2 = (z^1)^2 + (z^2)^2 + A$; also $|z^3| \geq \sqrt{A}$.

Die Ebenen $z^3 = \text{const} = c$ schneiden für $|c| < \sqrt{A}$ das zweischalige Hyperboloid überhaupt nicht, für $c = \pm\sqrt{A}$ enthalten sie nur den Punkt $z^1 = z^2 = 0$ und für $|c| > \sqrt{A}$ schneiden sie die Fläche in Ellipsen. Die Ebenen $z^1 = \text{const}$ schneiden Hyperbeln aus, ebenso $z^2 = \text{const}$.

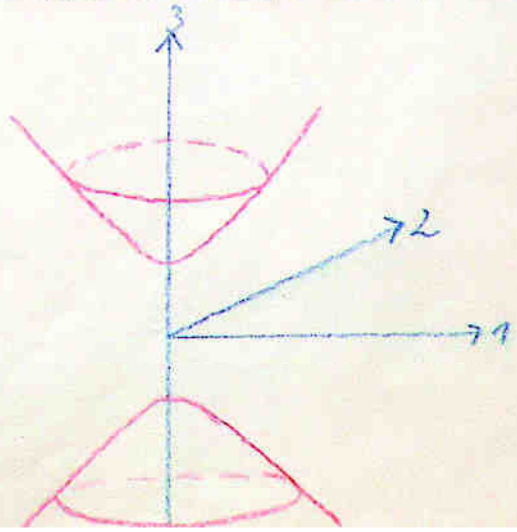


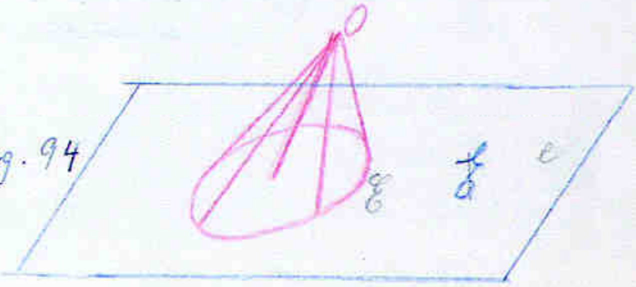
Fig. 93

3) $A = 0$. Mit jedem Punkt $P(z^1, z^2, z^3)$ liegt auch $Q(\alpha z^1, \alpha z^2, \alpha z^3)$ für beliebiges α auf der Fläche, d.h. jeder Punkt der Geraden OP; hieraus folgt die Erzeugung des Kegels 2. Ordnung. durch Projektion;

In einer Ebene e sei eine Ellipse E gegeben, ferner ein Punkt O ausserhalb e ; <u>die Geraden von O nach allen Punkten von E überstreichen einen Kegel 2. Ordnung.</u>

Machen wir nämlich O zum Nullpunkt eines Koordinatensystems z^1, z^2, z^3 , so dass e die Gleichung $z^3 = 1$ bekommt und E in e die Gleichung $(z^1)^2 + (z^2)^2 - 1 = 0$, so ~~ist~~ erfüllt die betrachtete Fläche die Gleichung $(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 = 0$, ist also ein Kegel 2. Ordnung.

Fig. 94



O heisst Scheitel oder Spitze des Kegels. Allgemein heisst Kegel jede Fläche, die von den Geraden überstrichen wird, die einen festen Punkt (den Scheitel des Kegels) mit allen Punkten einer beliebig gegebenen Kurve verbinden.

<u>Alle nichtausgearteten Kurven zweiter Ordnung sind „Kegelschnitte"</u>, genauer: ebene Schnitte eines Kegels 2. Ordnung. Wir haben das für die <u>Ellipse</u> schon bewiesen: Schnitt mit $\parallel z^3 = \text{const.} \neq 0$ $(c^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 = 0)$

Die Ebene $z^3 - z^1 = 1$ schneidet in einer <u>Parabel.</u> In

$\parallel z^3 = \text{const} \neq 0$. <u>Hyperbeln</u> sind z. B. die Schnitte mit ...

Dann erhält das einschalige Hyperboloid die Gleichung

$w^1w^2 - (B + w^3)(B - w^3) = 0$, in Determinantenform:

$$D = \begin{vmatrix} w^1 & B + w^3 \\ B - w^3 & w^2 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Jeder Punkt P der Fläche erfüllt $D = 0$, liefert also eine nichttriviale Lösung λ, μ des homogenen Systems

$$(G_1) \quad \begin{aligned} &1)\ \lambda w^1 + \mu(B + w^3) = 0 \\ &2)\ \lambda (B - w^3) + \mu w^2 = 0; \end{aligned}$$

denn D ist die Determinante von G_1 (vgl. S. 327, 301).
Die Gleichungen G_1 bestimmen zwei Ebenen, die nach S. 25, 26 weder parallel noch identisch sind, also eine Schnittgerade g_1 besitzen. g_1 geht durch P , denn P erfüllt beide Gleichungen. G_1 . g_1 liegt auf der Fläche, denn in allen Punkten von g_1 sind beide Gleichungen G_1 erfüllt, also $D = 0$. Eine zweite Gerade g_2 durch P, die ganz in der Fläche läuft, liefert in analoger Weise das in ρ, σ homogene System

$$(G_2) \quad \begin{aligned} &1)\ \rho\, w^1 + \sigma\, (B - w^3) = 0 \\ &2)\ \rho\, (B + w^3) + \sigma\, w^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

Denn auch (G_2) hat die Determinante D. g_1 und g_2 sind verschieden. Denn sonst hätten g_1, g_2 ausser P (w^i) noch einen Punkt Q (v^i) gemein. Die v^i würden ebenfalls G_1 , G_2 erfüllen, also würden die Komponenten $c^i = v^i - w^i$ des Vektors PQ die Gleichungen erfüllen

$$\begin{aligned} &1)\quad \lambda c^1 + \mu c^3 = 0 \\ &2)\quad \mu c^2 - \lambda c^3 = 0 \\ &3)\quad \rho c^1 - \sigma c^3 = 0 \\ &4)\quad \sigma c^2 + \rho c^3 = 0 \,. \end{aligned} \qquad (30)$$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Da $P \neq Q$, verschwinden nicht alle c^i; verschwinden nun c^1, c^3 nicht beide, dann folgt aus H 1) 3)

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \varrho & -\sigma \end{vmatrix} = -\lambda\sigma - \mu\varrho = 0$$

verschwinden c^1, c^3, so ist notwendig $c^2 \neq 0$; also folgt aus H 2) 4)

$$\begin{vmatrix} \mu & -\lambda \\ \sigma & \varrho \end{vmatrix} = \mu\varrho + \lambda\sigma = 0$$

Also müsste $\mu\varrho + \lambda\sigma = 0$ unter allen Umständen gelten.
Nun gilt

$$G_1\ 1) \quad \lambda\omega^1 + \mu(B + \omega^3) = 0$$

$$G_2\ 1) \quad \varrho\,\omega^1 + \sigma(B - \omega^3) = 0$$

also wenn wir G_1 1) mit ϱ, G_2 1) mit $-\lambda$ multiplizieren und addieren: $(\mu\varrho - \lambda\sigma)B = 0$, also wegen $B \neq 0$:

$\mu\varrho - \lambda\sigma = 0$, also wegen $\mu\varrho + \lambda\sigma = 0$: $\mu\varrho = \lambda\sigma = 0$

Da nach Voraussetzung nicht $\mu = \lambda = 0$ oder $\varrho = \sigma = 0$, bleiben nur die Möglichkeiten $\mu = \sigma = 0$, $\lambda \neq 0$, $\varrho \neq 0$, oder $\lambda = \varrho = 0$, $\mu \neq 0$, $\sigma \neq 0$. In beiden Fällen würde aus (G_1) (G_2) folgen $B + \omega^3 = B - \omega^3 = 0$; also $B = 0$, was nicht der Fall ist.

Die Asymptotenrichtungen r^i der Schar $(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 - A = 0$ erfüllen

$$(r^1)^2 + (r^2)^2 - (r^3)^2 = 0,$$

liegen also, vom Nullpunkt abgetragen, auf dem zur Schar gehörigen Kegel. ($A = 0$). Dieser heisst deswegen „Asymptotenkegel" der Schar.

Mit $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2$ und $(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2$ sind die wesentlich verschiedenen Normaltypen von $Q(xx)$ mit drei von Null verschiedenen ε_i erschöpft. Alle anderen Vorzeichenkombinationen lassen sich durch Umnumerieren oder Multiplizieren mit -1 auf diese beiden zurückführen.

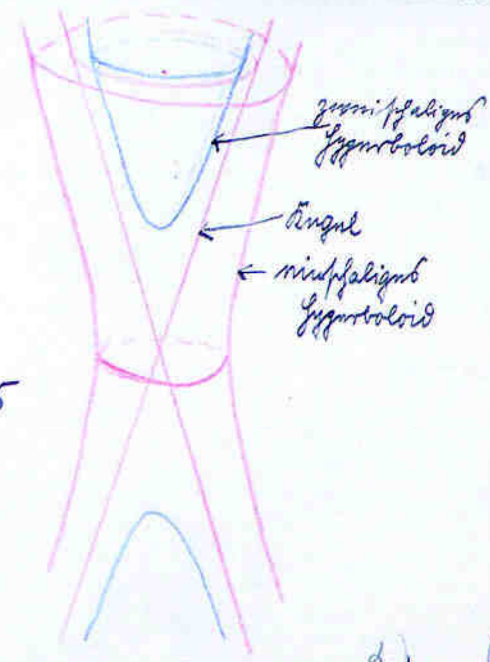


Fig 95

c) $Q = (y^1)^2 + (y^2)^2$

Nach S. 338 sind durch Translation die Fälle erreichbar:

α) $L = z^3$

oder β) $L = 0$

α) $(z^1)^2 + (z^2)^2 + z^3 + A = 0$

Alle Flächen der Schar sind durch Translation mit den Komponenten $0,0,A$ ineinander überführbar. Sie heissen <u>elliptische Paraboloide.</u>

Schnitt mit $z^3 = \text{const} = c$: Für $c + A > 0$ nichts, für $c + A = 0$ ein Punkt, $c + A < 0$ Ellipsen.

Schnitt mit $z^1 = \text{const}$: Parabeln.

Asymptotenrichtung r^i : $(r^1)^2 + (r^2)^2 = 0$; $r^i = 0, 0, r^3$

Also genau eine Asymptotenrichtung. Daraus folgt, dass ein elliptisches Paraboloid keinen der bisher betrachteten Flächentypen äquivalent ist.

β) $(z^1)^2 + (z^2)^2 + A = 0$

„<u>Elliptische Zylinder</u>". z^3 kommt in der Gleichung nicht vor. z^3 = const schneidet in einer Ellipsenschar. Mit jedem Punkt P liegt auch jeder solche Punkt Q auf der Fläche, der in den ersten beiden Koordina-

Fig 96

Fig. 97

(Zylinder heisst jede Fläche, die von einer Geraden überstrichen wird, die man entlang einer beliebigen Kurve parallelverschiebt.)

d) $Q = (y^1)^2 - (y^2)^2$

Durch Translation entsteht (S.338) einer der Typen:

α) $(z^1)^2 - (z^2)^2 + z^3 + A = 0$

β) $(z^1)^2 - (z^2)^2 + A = 0$

α) „hyperbolisches Paraboloid" oder „Sattelfläche". Alle Flächen der Schar sind durch Translation $(0,0,A)$ ineinander überführbar. Asymptotenrichtungen r^i : $(r^1)^2 - (r^2)^2 = 0$

Das sind alle Vektoren parallel den Ebenen $z^1 \pm z^2 = 0$ ~~x~~ .
Der Typ stimmt also mit keinem der früheren überein. (Fig 98)

d α) kann man als Determinantengleichung schreiben

$$\begin{vmatrix} z^1 + z^2 & z^3 + A \\ -1 & z^1 - z^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Wie beim einschaligen Hyperboloid folgt daraus, dass das hyperbolische Paraboloid doppelte Regelfläche ist.

β)
1) $A \neq 0$ „hyperbolische Zylinder" (Fig 99)

2) $A = 0$ die Ebenen $z^1 \pm z^2 = 0$.

Fig. 98

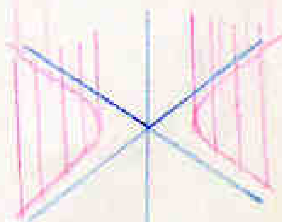


Fig. 99

e) $Q = (y^1)^2$

α) $(z^1)^2 + z^2 + A = 0$

„parabolischer Zylinder"

β) $(z^1)^2 + A = 0$

für $A > 0$ nichts, für $A = 0$ die Ebene $z^1 = 0$, für $A < 0$ die Ebenen $z^1 = \pm\sqrt{-A}$.

f) $Q \equiv 0$ α) $z^1 + A = 0$ parallele Ebenen.

β) $A = 0$; für $A \neq 0$ nichts, für $A = 0$ der ganze Raum.

Die Ellipsoide, Hyperboloide, und Paraboloide heissen „nicht ausgeartete" Flächen 2.Ordnung.

§ 17. Mittelpunktseigenschaften der Sekanten.

Der Vektor (b^i) habe bezüglich $Q + 2L + A = 0$ nicht Asymptotenrichtung, also $Q(b,b) \neq 0$. Dann schneidet jede Gerade parallel (b^i) das Gebilde in einem Punktepaar vom ersten Typ. Wir suchen dessen Mittelpunkt. Dieser sei (y^i). Dann kann die Gerade in der Gestalt geschrieben werden

$$x^i = y^i + tb^i .$$

Für t erhält man die Gleichung

$$\sum a_{ik}(y^i + tb^i)(y^k + tb^k) + 2\sum a_i(y^i + tb^i) + A = 0$$

oder

$$t^2 Q(b,b) + 2t\left[\sum a_i b^i + \sum a_{ik} b^i y^k\right] + A' = 0 .$$

Da (y^i) der Sehnenmittelpunkt ist, müssen die Wurzeln t dieser Gleichung entgegengesetzt gleich sein, d.h. der Koeffizient von t verschwindet:

$$(M) \qquad \sum a_i b^i + \sum a_{ik} b^i y^k = 0 .$$

(M) ist notwendig und hinreichend dafür, dass (y^i) Sehnenmittelpunkt ist. (M) ist eine lineare Gleichung für die y^i, mit Koeffizienten, die nur von denen des quadratischen Gebildes und von den b^i abhängen. Die Gleichung stellt eine (b^i) nicht parallele Gerade bzw. Ebene dar; in ihr liegen also die Mittelpunkte aller (b^i) parallelen Sehnen.

Die unterstrichene Behauptung wird indirekt bewiesen. Entweder würde sonst (M) für keinen oder für alle Punkte, oder wenigstens für alle Punkte einer Geraden parallel (b^i) gelten. (M) gilt aber für mindestens einen Punkt; denn eine Gerade parallel (b^i) durch einen Punkt P des Gebildes bestimmt eine

Sehne mit Mittelpunkt (der evtl. mit P zusammenfällt). (M) gilt auch nicht für alle Punkte einer (b^i) parallelen Geraden, denn auf ihr gibt es höchstens einen Sehnenmittelpunkt, weil sie nicht Asymptotenrichtung hat.

Wir wählen (b^i) als z^1-Achse eines Koordinatensystems, in dem ausserdem die zu (b^i) gehörige Mittelpunkts-Gerade bzw. -Ebene die Gleichung

$$z' = \text{const}$$

erhält. Das geht, weil (b^i) jener Geraden bzw. Ebene nicht parallel ist.

Dann ist in diesem System $a_{1k} = 0$ für $k > 1$.

Denn die b^i werden n.V. $b^1\ 0\ 0$; (M) wird also nach Division durch $b^1 \neq 0$:

$$a_1 + \sum a_{1k} y^k = 0$$

Damit diese Gleichung äquivalent $y^1 = \text{const}$ sei, ist notwendig und hinreichend $a_{12}\ (=a_{13}) = 0$, wie behauptet. (vgl. S. 26). Im Falle der Ebene hat Q die Gestalt $Q = a_{11}(z')^2 + a_{22}(z^2)^2$, lässt sich also durch Dilatation auf Normaltyp bringen. Im Falle des Raumes heisst Q:

$$Q = a_{11}(z^1)^2 + a_{22}(z^2)^2 + 2a_{23}z^2z^3 + a_{33}(z^3)^2 = a_{11}(z')^2 + Q'$$

Das Glied a_{23} können wir nun zum Verschwinden bringen, indem wir in der Ebene $z^1=0$ dasselbe Verfahren nochmals anwenden bezüglich Q'. Damit ist die im Anhang § 7 gegebene Reduktion quadratischer Formen auf Normaltypen im Fall von 2 und 3 Dimensionen geometrisch gedeutet.

Anhang: Lineare Gleichungen.

§ 1 Grundlagen.

Gegeben seien n lineare Gleichungen mit n Unbekannten der Form

$$c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots\dots\dots + c_nx^n = c_0$$

Wir schreiben sie :

$$\begin{array}{l} c^1_1x^1 + c^1_2x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + c^1_nx^n = c^1_0 \\ c^2_1x^1 + c^2_2x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + c^2_nx^n = c^2_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{n-1}_1x^1 + c^{n-1}_2x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + c^{n-1}_nx^n = c^{n-1}_0 \\ c^n_1x^1 + c^n_2x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + c^n_nx^n = c^n_0 \end{array}$$

Wir nennen ein solches System inhomogen, wenn nicht alle c^k_0 ($k = 1,2,\dots,n$) verschwinden (bezeichnet mit dem Buchstaben J). Wir nenen es homogen, wenn alle $c^k_0 = 0$ sind (bezeichnet mit H) . H heisse dabei das zu J zugehörige System, wenn die linken Seiten von H und J übereinstimmen.

Zur Abkürzung der Schreibweise und Erleichterung der Übersicht dient die Einführung des Vektorbegriffs in n Dimensionen *) .

Wir definieren als Vektor $\mathfrak{c}$ in n Dimensionen jedes System von n Zahlen $c^1, c^2, c^3, \dots\dots, c^n$; dabei nennen wir c^k die Komponenten oder Koordinaten des Vektors $\mathfrak{c}$.

---

*) Vgl. zum Folgenden Caratheodory, Reelle Funktionen, S. 307 ff.

$\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$ sei definiert als d.Vektor m.d.Komponenten $c^1+d^1, \dots c^n+d^n$

$\lambda\mathfrak{c}$ " " " " " " $\lambda c^1, \lambda c^2, \dots \lambda c^n$

"Nullvektor" heisse das System 0,0 0

Weiterhin schreiben wir $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, wenn $c^1 = d^1, \dots, c^n = d^n$.

Wir können jetzt unser Gleichungssystem in der Form schreiben:

$$(J) \quad \mathfrak{c}_1 x^1 + \mathfrak{c}_2 x^2 + \dots + \mathfrak{c}_n x^n = \mathfrak{c}_0$$

$$(H) \quad \mathfrak{c}_1 x^1 + \mathfrak{c}_2 x^2 + \dots + \mathfrak{c}_n x^n = \mathfrak{o}$$

Einführung des Begriffes der linearen Abhängigkeit für k Vektoren.

Wir definieren: Die Vektoren $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots \mathfrak{c}_n$ heissen linear abhängig, wenn das Gleichungssystem $\mathfrak{c}_1 x^1 + \mathfrak{c}_2 x^2 + \dots + \mathfrak{c}_k x^k = 0$ eine nichttriviale Lösung $x^1, \dots, x^k$ hat. Dabei definieren wir als nichttriviale Lösung ~~xxx~~ eine solche, die nicht trivial ist und als triviale Lösung die Nulllösung, d.h. $x^1 = x^2 = \dots = x^k = 0$. hat.

Die Aussage " H hat eine nichttriviale Lösung" ist also identisch mit: " $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots \mathfrak{c}_k$ sind linear abhängig".

$\mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_k$ heissen linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängen, wenn also aus $\sum_{i=1}^{k} \mathfrak{c}_i x^i = 0$ folgt; $x^1 = \dots = x^k = 0$.

Satz 1. ~~XXXXX~~ Sind die Vektoren $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots \mathfrak{c}_n$ linear unabhängig, so ist J eindeutig lösbar.

Oder anders formuliert:

J ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige System H nur die Nulllösung hat.

a) Beweis, dass es nur eine Lösung gibt:

Angenommen, wir haben zwei Lösungen $x^1 \dots x^n$ und $z^1 \dots z^n$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i x^i = \mathfrak{r}_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i z^i = \mathfrak{r}_0$$

Durch Subtraktion folgt: $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i (x^i - z^i) = \mathfrak{o}$ und da die $\mathfrak{r}_i$ linear unabhängig sind,

$$x^i - z^i = \mathfrak{o}$$

oder $x^i = z^i$, d.h. beide Lösungen sind gleich. q.e.d.

b) Beweis, dass eine Lösung existiert:

Wir benutzen hierzu den Hilfssatz 1, der noch zu beweisen ist. Er lautet: <u>Ein System von n homogenen linearen Gleichungen mit n+1 Unbekannten ist immer nichttrivial lösbar.</u>

Es sind also die n+1 Vektoren $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_n$ immer linear abhängig, d.h. es gibt Zahlen $x^0, x^1, \dots x^n$, die nicht alle verschwinden, sodass

$$\sum_{i=0}^{n} \mathfrak{r}_i x^i = \mathfrak{o}$$

Da $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots \mathfrak{r}_n$ linear <u>un</u>abhängig sind, so muss $x^0 \neq 0$ sein; denn wäre $x^0 = 0$, so gälte die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i x^i = \mathfrak{o}$$

wo nicht $x^1 = \dots = x^n = 0$ wäre; d.h. aber $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots \mathfrak{r}_n$ wären linear abhängig, was nicht der Fall sein soll. Wir dürfen also durch $x^0 \neq 0$ dividieren und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \frac{x^i}{x^0} + \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{o}$$

Ersetzen wir jetzt $-\frac{x^i}{x^0}$ durch y^i, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i y^i = \mathfrak{r}_0$$

$y^1 \dots y^n$ sind also eine Lösung von $\mathfrak{J}$.

Beweis für den Hilfssatz 1

Wir führen den Beweis durch Induktion. Für n = 1 gilt der Satz sicher; $c_0 x^0 + c_1 x^1 = \mathfrak{o}$ hat immer eine nichttriviale Lösung, denn

a) $c_0 \neq \mathfrak{o}$

(für n=1 sind die Vektoren Zahlen!)

Dann ist $x^1 = 1,\ x^0 = -\frac{c_1 x^1}{c_0}$ eine nichttriviale Lösung.

b) $c_0 = \mathfrak{o}$ Dann ist $x^1 = 0,\ x^0 = 1$ eine nichttriviale Lösung.

Angenommen, der Satz sei bis n-1 bewiesen. Wir beweisen ihn für n . Das System lautet

$$\left.\begin{array}{l} c_0^1 x^0 + c_1^1 x^1 + \dots + c_n^1 x^n = \mathfrak{o} \\ \vdots \\ c_0^{n-1} x^0 + c_1^{n-1} x^1 + \dots + c_n^{n-1} x^n = \mathfrak{o} \\ \boxed{c_0^n x^0 + c_1^n x^1 + \dots + c_n^n x^n = \mathfrak{o}} \end{array}\right\} \quad (K)$$

Wir betrachten vorläufig alle Gleichungen ausser der letzten. Das sind n-1 homogene lineare Gleichungen mit n + 1 Unbekannten, ~~das~~ die wir ~~K~~ K' nennen wollen.

Setzen wir $x^0 = \mathfrak{o}$, so wird aus K' ein System von n-1 Gleichungen für die n Unbekannten $x^1, \dots x^n$. Dies hat nach Induktionsvoraussetzung eine nichttriviale Lösung $y^1, \dots, y^n$. Sei etwa $y^k \neq \mathfrak{o}$. Setzen wir noch $y^0 = 0$, so ist $x^i = y^i\ (i = 0, \dots n)$ eine nichttriviale Lösung von K'. Aus analogen Gründen besitzt K' eine nichttriviale Lösung $x^i = z^i$, wo $z^k = \mathfrak{o}$. Wegen der Homogenität von K' ist auch $x^i = \lambda y^i + \mu z^i\ (i = 0, 1, \dots n)$ bei beliebigem λ, μ eine Lösung von K'. Nun suchen wir λ, μ so zu bestimmen, dass $x^i = \lambda y^i + \mu z^i$ auch die letzte Gleichung von K, also das ganze System K erfüllt. Es soll also sein

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^n x^i = \sum_{i=0}^{n} c_i^n (\lambda y^i + \mu z^i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} c_i^n y^i + \mu \sum_{i=0}^{n} c_i^n z^i$$

Das ist eine lineare homogene Bestimmungsgleichung für die

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

zwei Unbekannten λ, μ , gehört also zu dem zuerst erledigten Fall n = 1 unseres Satzes. Somit gibt es zwei nicht beide verschwindende Zahlen λ, μ , sodass $x^i = \lambda y^i + \mu z^i \quad (i = 0, 1, \dots n)$ eine Lösung von K ist. Diese Lösung ist nichttrivial. Denn ist $\lambda \neq 0$, so ist wegen $y^k \neq 0, z^k = 0$: $x^k = \lambda y^k \neq 0$. Ist $\lambda = 0$, so ist $\mu \neq 0, x^i = \mu z^i$. Verschwänden alle x^i, so auch alle z^i entgegen unserer Konstruktion.

§ 2. n-reihige Determinanten. I.

Wir definieren als n-reihige Determinante eine Funktion der Komponenten von n Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_n$ (wobei $\mathfrak{r}_k$ die Komponenten $r_k^1, r_k^2, \dots r_k^n$ habe), die wir folgendermassen schreiben:

$$(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n) = \begin{vmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \dots & r_n^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^n & r_2^n & \dots & r_n^n \end{vmatrix} = |r_k^i| \quad \left(\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \; 1, 2 \dots n\right)$$

Wir verlangen nun von dieser Funktion die Gültigkeit folgender Formeln

1.) $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \lambda \mathfrak{r}_k, \dots \mathfrak{r}_n) = \lambda (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_k, \dots \mathfrak{r}_n)$

wobei k jede Zahl von 1 bis n sein kann.

2.) $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_k, \dots \mathfrak{r}_k, \dots \mathfrak{r}_n) = 0$

(Sind irgend zwei der Vektoren $\mathfrak{r}_1 \dots \mathfrak{r}_n$ einander gleich, so soll die Determinante $|r_k^i|$ verschwinden)

3.) $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_k + \mathfrak{d}_k, \dots \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k, \dots, \mathfrak{r}_n) + (\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{d}_k, \dots \mathfrak{r}_n)$

(Distributives Gesetz: Steht an einer Stelle die Summe zweier Vektoren, so soll die Determinante nach diesen Vektoren zerlegt werden können.)

4.) $(n_1, n_2, \ldots, n_n) = +1$

Dabei sind $n_k \; (k = 1, 2, \ldots n)$ die „Einheitsvektoren" im n-dimensionalen Raum, die die Koordinaten e_k^i haben, die folgendermassen definiert werden:

$$e_k^1 = 0$$
$$e_k^2 = 0$$
$$e_k^3 = 0$$
$$\vdots$$
$$e_k^k = 1$$
$$\vdots$$
$$e_k^n = 0$$

Es ist also für $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$

$$e_k^i = 0 \quad (i \neq k)$$
$$e_k^k = 1$$

(z.B. hat n_1 die Komponenten 1,0,0,0,...0,0,0)

Es ist also

$$(n_1, n_2, \ldots n_n) = |e_k^i| = \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,0 & \ldots & 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 & \ldots & 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 & \ldots & 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 & \ldots & 0\,0\,0\,0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\,0\,0\,0 & & 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & & 0\,0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

Wir zeigen im folgenden, dass, wenn es tatsächlich solche Funktionen gibt, die wir als n-reihige Determinanten definiert haben, wir mit ihnen Gleichungssysteme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten lösen können. (Dass es tatsächlich Determinanten in beliebig vielen Dimensionen gibt, wird erst später (S. 316) bewiesen.)

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{r}_k x^k = \mathfrak{r}_0$$ sei ein solches Gleichungssystem.

Wir betrachten die Determinante

$$(\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_{k-1}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{r}_k x^k, \mathfrak{r}_{k+1}, \dots \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_{k-1}, \mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_{k+1}, \dots, \mathfrak{r}_n)$$

Es gilt nach 1), 2) und 3) :

$$(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k + \lambda \mathfrak{r}_i, \dots \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k, \dots \mathfrak{r}_n) \quad (i \neq k)$$

Beweis: Nach 3) ist

$$(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k + \lambda \mathfrak{r}_i, \dots, \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_n) + (\mathfrak{r}_1 \dots \lambda \mathfrak{r}_i \dots \mathfrak{r}_n)$$

nach 1) folgt

$$= (\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_n) + \lambda (\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_i \dots \mathfrak{r}_i, \dots \mathfrak{r}_n)$$

Die letzte Klammer ist gleich Null nach 2), da $\mathfrak{r}_i$ zweimal vorkommt. Es ist also tatsächlich

$$(\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_k + \lambda \mathfrak{r}_i, \dots \mathfrak{r}_n) = (\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_n)$$

Durch ~~ein~~ mehrmalige Anwendung dieser Formel und 1) folgt dann

$$(\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{k-1}, \sum \mathfrak{r}_k x^k, \mathfrak{r}_{k+1}, \dots \mathfrak{r}_n) = x^k (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots \mathfrak{r}_n)$$
$$= x^k |\mathfrak{r}^i_k|$$

Andererseits ist $(t_1,\dots,\sum_{i=1}^{n} x^i t_i, t_{k+1},\dots t_n) = (t_1,\dots, t_0, t_{k+1},\dots t_n)$ wegen (J). Also besteht die Formel (wenn wir $(t_1,\dots, t_n) = \mathfrak{D}$ und $(t_1,\dots, t_0, t_{k+1},\dots t_n) = \mathfrak{D}_k$ setzen):

$$(L') \qquad \mathfrak{D}\, x_k = \mathfrak{D}_k$$

Diese Formel liefert als Lösung von (J):

$$(L) \quad x_k = \frac{(t_1, t_2,\dots t_{k-1}, t_0, t_{k+1},\dots t_n)}{(t_1, t_2,\dots\dots t_n)} = \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}}$$

Vorausgesetzt, dass $D \neq 0$.

Es fragt sich nun, was das Verschwinden einer Determinante bedeutet. Teilweise wird das beantwortet durch Satz 2 : Sind n Vektoren $t_1, t_2,\dots t_n$ linear abhängig, so verschwindet ihre Determinante.

Beweis: Die Vektoern $t_1, t_2,\dots t_n$ sind linear abhängig, heisst: Es gibt ein System von Zahlen y^i, wobei nicht alle $y^i = 0$ sind, sodass

$$y^1 t_1 + y^2 t_2 + \dots + y^n t_n = 0$$

o.B.d.A. können wir annehmen: $y^n \neq 0$ und nach Multiplikation der Gleichung mit einem geeigneten Faktor: $y^n = -1$. Also

$$t_n = y^1 t_1 + y^2 t_2 + \dots + y^{n-1} t_{n-1}$$

In die Determinante $(t_1,\dots, t_n) = \mathfrak{D}$ eingesetzt, ergibt das

$$D = (t_1,\dots, t_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} y^i t_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (t_1,\dots t_{n-1}, y^i t_i) \qquad \text{(Regel 3)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} y^i (t_1,\dots t_{n-1}, t_i) \qquad \text{(Regel 1)}$$

Nun ist aber für i = 1,2,. . . . , n-1

$$(t_1,\dots, t_i \dots t_{n-1}, t_i) = 0 \quad \text{(Regel 2)}$$

Also in der Tat

$D = 0$

<u>Satz 3: Ist H nichttrivial lösbar, so hat J im allgemeinen keine Lösung.</u>

Denn nach (L *) muss jedenfalls, wenn (J) eine Lösung haben soll, $D_k = 0$ gelten. $(k = 1, \ldots n)$. Das ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung, wie wir später sehen werden.

<u>Satz 4. Ist H nichttrivial lösbar und hat J eine Lösung, so hat J unendlich viele Lösungen.</u>

Beweis:

$z^1, z^2 \ldots\ldots z^n$ sei eine Lösung von J

$x^1, x^2 \ldots\ldots x^n$ " " nichttriviale Lösung von H,

dann ist auch $z^i + \lambda x^i$ eine Lösung von J, wobei λ jede Zahl sein kann. Denn es ist

$$\sum_{i=1}^{n} z^i c_i = c_0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x^i c_i = 0$$
$$\overline{\sum_{i=1}^{n} (z^i + \lambda x^i)\, c_i = c_0} \qquad \text{q.e.d.}$$

Nach diesen Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen linearen Gleichungen und Determinanten gehen wir daran, die Determinanten selbst explizit aufzustellen.

Analog dem 2- und 3-dimensionalen Fall zerlegen wir die Vektoren nach den Einheitsvektoren n_ℓ $(\ell = 1, 2 \ldots n)$

Es gilt nämlich $\quad c_k = \sum_{\ell=1}^{n} c_k^\ell\, n_\ell$

denn $\quad c_k^i = \sum_{\ell=1}^{n} c_k^\ell\, e_\ell^i$

Also $\quad (c_1, \ldots c_n) = \left(\sum c_1^\ell n_\ell, \sum c_2^\ell n_\ell, \ldots\ldots \sum c_n^\ell n_\ell \right)$

Unter Beachtung von 3) und 1) und der Regel für Multiplikation von Summen (S.60) folgt:

$$(a_1, \dots a_n) = \sum_{i,k,l,\dots r=1}^{n} a_1^i a_2^k a_3^l \dots a_n^r \, (a_i, a_k, a_l, \dots, a_r)$$

Die n Indizes i,k,l . . .r haben in dieser Summe unabhängig von einander von 1 bis n zu laufen .

Es ist $(a_i, a_k, a_l, \dots, a_r) = 0$, wenn zwei Indizes gleich sind.

Welchen Wert hat$(a_i, a_k, a_l, \dots a_r)$,sonst?.

Ein Schritt zur Beantwortung dieser Frage ist folgende Regel:

<u>Die Determinante ändert ihr Vorzeichen,wenn zwei Kolonnen vertauscht werden</u>.d.h.

5) $\underline{(\dots a_1 \dots b_1 \dots) = -(\dots, b_1 \dots, a_1 \dots)}$

Beweis: Nach 2) ist:

$(\dots\dots, a+b_1 \dots, a+b_1 \dots\dots) = 0$

Es ist aber nach 3)

$$(\dots, a+b_1 \dots, a+b_1 \dots) = (\dots a_1 \dots, a_1 \dots) + (\dots a_1 \dots, b_1 \dots) + (\dots b_1 \dots a_1 \dots) + (\dots, b_1 \dots, b_1 \dots).$$

Weiterhin nach 2)

$$(\dots, a_1 \dots a_1 \dots) = (\dots, b_1 \dots, b_1 \dots) = 0$$

Also: $(\dots a_1 \dots b_1 \dots) + (\dots, b_1 \dots, a_1 \dots) = 0$

<u>Also: $(\dots a_1 \dots b_1 \dots) = -(\dots, b_1 \dots, a_1 \dots)$ q.e.d.</u>

Wir können also $(a_i, a_k, a_l, \dots a_r)$ aus $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1$ (Regel 4) berechnen,wenn wir beweisen,dass i,k,.l,.......r aus 1,2,3 . . . .n immer durch eine gerade oder immer durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zu erzeugen ist. Zu diesem Zweck machen wir einen Exkurs in die Permutationslehre.

§ 3 Gerade und ungerade Permutationen.

(S. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik I Anfang)

a) Definitionen.

Jede Anordnung der Zahlen 1,2,3,.......,n-1,n nennen wir eine " Permutation " der n " Elemente" 1,2,....n. Die Anordnung 1,2,3,....... heisst die "identische" Permutation. Unter " Transposition" verstehen wir die Vertauschung zweier verschiedener Elemente. Z.B. geht 1 5 3 4 2 aus 1 2 3 4 5 durch die Transposition $(5 \rightleftarrows 2)$ hervor.

b) Sätze.

Hilfssatz 2: Jede Permutation lässt sich durch endlich viele Transpositionen aus der Identität erzeugen.

(Z.B. geht 3 5 2 4 1 aus der Identität durch Transposition folgendermassen hervor:

1 2 3 4 5

3 2 1 4 5

3 5 1 4 2

3 5 ~~4~~ ~~2~~ 1
    2 4

Wir führen den Beweis durch Induktion. Der Satz gilt für n = 2 .Er sei bis n-1 bewiesen.

Es soll nun 1 2 3 4 . . . . .n in

i k l m . . . . r übergeführt werden.

Wir führen zuerst die Transposition $(1 \rightleftarrows i)$ aus und erhalten die Permutation

i 2 3 4 . . . . 1 . . . n .

Jetzt muss noch 2 3 . . 1 . . n in k l . . . r übergeführt werden, was nach Induktionsvoraussetzung durch eine endliche Anzahl von Vertauschungen möglich ist. Damit ist der Beweis fertig.

<u>Hilfssatz 3: Die Permutationen zerfallen in zwei Klassen, gerade und ungerade. Eine gerade Permutation kann aus der Identität nur durch eine gerade Anzahl von Transpositionen erzeugt werden; eine ungerade nur durch eine ungerade Anzahl.</u>

(Die Identität selbst ist eine gerade Permutation, da sie durch 0 Transpositionen aus sich selbst entsteht. Man kann nach Hilfssatz 3 aus ihr niemals durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen wieder die Identität erhalten).

Beweis:

Es seien n Variable $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ gegeben. Dann betrachten wir die Funktion:

$$f(x_1, \ldots\ldots x_n) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)$$
$$\cdot (x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$\cdot(x_{n-1}-x_n)$$

Ist $i\ k\ l \ldots r$ eine Permutation von $1\ 2 \ldots n$, dann ist ersichtlich $f(x_i, x_k, \ldots x_r) = \pm f(x_1, \ldots x_n)$. Wir definieren: $(i\ k\ l \ldots r)$ ist eine gerade oder ungerade Permutation, je nachdem

$$f(x_i, x_k \ldots x_r) = + f(x_1, \ldots x_n) \text{ oder}$$
$$= - f(x_1, \ldots x_n) \text{ ist.}$$

Zum Beweise,

dass diese Definition die verlangte Eigenschaft hat, genügt es zu zeigen, dass eine Transposition, etwa

$i \,.\,.\, k \,.\,.\, l \,.\,.\, r \rightarrow i \,.\,.\, l \,.\,.\, k \,.\,.\, r$

eine Umkehrung des Vorzeichens von f bewirkt, dass also

$$(P)\quad f(x_i \,.\,.\, x_k \,.\,.\, x_l \,.\,.\, x_r) = - f(x_i \,.\,.\, x_l \,.\,.\, x_k \,.\,.\, x_r) \text{ ist.}$$

Denn da jede Permutation durch eine endliche Anzahl von Transpositionen (etwa m) zu erhalten ist, ergibt Formel (P) : $f(x_i,.\,.x_r) = (-1)^m f(x_1,.\,.x_n)$

$(x_1-x_2)(x_1-x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (x_1-x_n)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x_k-x_{k+1}) \ldots\ldots\ldots\ldots (x_k-x_n)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x_l-x_{l+1}) \ldots\ldots\ldots (x_l-x_n)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots$

$(x_{n-1}-x_n)$

Fig. ~~36~~ 300

Wird auf einem andern Wege dieselbe Permutation durch m' Transpositionen erhalten, so ist nach Formel(P): $(-1)^m = (-1)^{m'}$, also m und m' sind beide gerade oder ungerade.

Wir führen o.B.d.A. den Beweis von der Identität aus, da wir $x_i, x_k, .\,.\,.x_r$ gegebenenfalls durch neue Variable $y_1, y_2, \ldots y_n$ ersetzen können, wodurch $f(x_i, x_k \,.\,.\,.x_r)$ in $f(y_1, \ldots y_n)$ übergeht.

Fig. ~~36~~ 300 sei das Schema der Funktion $f(x_1,.x_k.x_l..x_r)$

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

Wir bezeichnen:

die Vorgänger von x_k (d.h. x_λ mit $\lambda < k$) mit x'

" Nachfolger " x_l mit x''

die x_i zwischen x_k und x_l mit x'''

Jetzt führen wir die Transposition $(x_k \rightleftarrows x_l)$ aus. In dem Gebiete ABGH geschieht nichts, weil hier nur Faktoren der Form (x' - Nachfolger von x') sind. Die Vertauschung von x_k und x_l hat also nur die Vertauschung solcher Faktoren zur Folge, wodurch das Produkt natürlich nicht geändert wird.

In dem Gebiete CDEF geschieht nichts, weil hier nur x'' vorkommen.

B ——— J ——— G

$$
\begin{array}{l}
(x_k - x_{k+1})\,(x_k - x_{k+2})\dots(x_k - x_l)\;(x_k - x_{l+1})\dots(x_k - x_n) \\
\qquad (x_{k+1} - x_{k+2})\;\dots\dots\dots\dots\dots(x_{k+1} - x_n) \\
- \\
\qquad\qquad (x_{l-1} - x_l)\;\dots\dots\dots\dots(x_{l-1} - x_n) \\
\qquad\qquad\qquad (x_l - x_{l+1})\dots\dots(x_l - x_n)
\end{array}
$$

C ——— F

Fig 301

Nun betrachten wir das Gebiet BCFG (Fig. 301). Im Gebiet CFGI ändert sich nichts, es werden nur die erste und letzte Zeile vertauscht. Wir behalten jetzt noch das Dreiecksgebiet BCI (Fig. 302) übrig.

B ——— J

$$
\begin{array}{r}
(x_k - x_{k+1})\;(x_k - x_{k+2})\;\dots\dots\dots\dots\;(x_k - x_l) \\
(x_{k+1} - x_{k+2})\;\dots\dots\dots\;(x_{k+1} - x_l) \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots \\
(x_{l-1} - x_l)
\end{array}
$$

C

Fig 302

Es kann nur in der Zeile ~~a b~~ $\mathcal{B}\mathcal{J}$ und der Spalte ~~c d~~ $\mathcal{J}\mathfrak{t}$ eine Änderung eingetreten sein, denn in dem übrigen Gebiete kommt x_k und x_l nicht vor. Die Zeile ~~a b~~ $\mathcal{B}\mathcal{J}$ heisst:

$$(x_k - x''')\,(x_k - x''')\;.\;.\;.\;.\;(x_k - x''')\,(x_k - x_l)$$

Die Spalte ~~cd~~ $\mathcal{J}\mathfrak{t}$ heisst:

$$(x_k - x_l)\,(x'''-l)\ldots(x_{l-1} - l),$$

Jeder Faktor der Zeile ~~a b~~ $\mathcal{B}\mathcal{J}$ geht also bei der Transposition $(k\,l)$ in einen Faktor von ~~b d~~ $\mathcal{J}\mathfrak{t}$ mit <u>entgegengesetztem Vorzeichen</u> über, ebenso jeder Faktor von ~~c d~~ $\mathcal{J}\mathfrak{t}$ in einen Faktor von ~~ab~~ $\mathcal{B}\mathcal{J}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen; da ~~a b~~ und ~~c d~~ einen und nur einen Faktor, nämlich $(x_k - x_l)$ gemein haben, wechseln im ganzen $2(k-l) - 1$ Faktoren von $f(x_1 \ldots x_n)$ ihr Vorzeichen. $2(k-l)-1$ ist ungerade. Also in der Tat

$$f(x_1\ldots x_k\ldots x_l\ldots x_n) = -f(x_1\ldots x_l\ldots x_k\ldots x_n).$$

§,4. n-reihige Determinanten. II.

Um $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k \dots \mathfrak{a}_r)$ aus $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \dots \dots \mathfrak{a}_n)$ zu berechnen, (vgl. S.309) führen wir das Symbol $\delta_{ik\dots r}$ für alle Permutationen von $i,k,\dots r$ ein, ähnlich wie in drei Dimensionen (s.S.62). $\delta_{ik\dots r}$ soll man folgende Werte annehmen:

$$\delta_{i\dots r} = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ +1 & \text{wenn } i,k,\dots,r \text{ eine \underline{gerade} Permutation der Zahlen } 1,2,\dots,n \text{ ist.} \\ -1 & \text{wenn } i,k,\dots,r \text{ eine \underline{ungerade} Permutation der } n \text{ Zahlen } 1,2,\dots,n \text{ ist.} \end{cases}$$

Damit ist $\delta_{i\dots r}$ für alle überhaupt möglichen Fälle definiert. Wir behaupten: Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n$ beliebige Vektoren und ist i,k,...,r irgend eine Permutation der Zahlen 1,2,...,n, dann ist

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \dots \mathfrak{a}_r) = \delta_{ik\dots r} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n)$$

Zum Beweis unterscheiden wir drei Fälle:

a) Zwei Indizes sind gleich.

Dann verschwindet die linke Seite nach S.304 Nr 2, die rechte Seite nach Definition von $\delta_{ik\dots r}$

b) i,k,...r ist eine gerade Permutation von 1,2,...,n.

Dann ist

$$\delta_{ik\dots r} = +1$$

nach Definition und

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_r) = +(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n)$$

nach Hilfssatz 3.

c) i,k,...,r ist eine ungerade Permutation von 1,2,...,n.

Dann ist

$$\delta_{ik\dots r} = -1$$

und

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \dots \mathfrak{a}_r) = -(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n)$$

Also gilt allgemein:

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k \dots \mathfrak{a}_r) = \delta_{ik\dots r} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n) \qquad \text{q.e.d.}$$

Insbesondere ist

$$(\kappa_{i_1}\kappa_{k} \ldots, \kappa_r) = \delta_{ik\ldots r}\underbrace{(\kappa_1,\kappa_2 \ldots \kappa_n)}_{1}$$

$$(\kappa_{i_1}\kappa_{k_1} \ldots \kappa_r) = \delta_{ik\ldots r} \quad \text{q.e.d. auf S. 309}$$

Wir haben bis jetzt gezeigt:

Wenn es überhaupt Determinanten n-ten Grades gibt, so haben sie die Form $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i\ldots r=1}^{n} c_1^i c_2^k \ldots c_n^r \delta_{ik\ldots r}$

Wir müssen noch zeigen: Dieser Ausdruck erfüllt wirklich die Forderungen 1) bis 4) von S.304.

1.) $(c_1, \ldots \lambda c_\varrho \ldots, c_n) = \lambda(c_1, \ldots, c_\varrho, \ldots c_n)$

Der Vektor $\underbrace{\lambda c_\varrho}_{\lambda c_\varrho^l}$ habe die Koordinaten

Es ist aber

$$\sum c_1^i c_2^k \ldots \lambda c_\varrho^l \ldots c_n^r \delta_{ik\ldots r} = \lambda \sum c_1^i c_2^k \ldots c_\varrho^l \ldots c_n^r \delta_{ik\ldots r}.$$

Da man in der Summe den gemeinsamen Faktor λ aller Glieder vor die Summe setzen darf.

Also ist Forderung 1) erfüllt.

2.) $(c_1, c_2 \ldots, c_\varrho, \ldots, c_\varrho, \ldots c_n) = 0$

Wir setzen $(c_1, \ldots c_\varrho, \ldots c_\varrho, \ldots c_n) \equiv x$

und behaupten

$$x = 0 .$$

In der Summe

$$x = \sum c_1^i \ldots c_\varrho^k \ldots c_\varrho^l \ldots c_n^r \delta_{i\ldots k \ldots l \ldots r}$$

vertauschen wir zunächst rein formal die Indizes k und l.

$$l \rightleftarrows k \quad .$$

Dann ist

$$x = \sum c_1^i \cdot c_\varrho^l \ldots c_\varrho^k \ldots c_n^r \delta_{ik\ldots r}$$

Die unteren Indizes sind nach der Grösse geordnet, in diesem Falle dürfen wir also die Faktoren mit gleichen unteren Indizes vertauschen.

$$X = \sum c_1^i \cdot c_\varrho^k \cdots c_\varrho^l \cdots c_n^r \, \delta_{i \ldots l \ldots k \ldots r}$$

Es ist aber

$$\delta_{i \ldots l \ldots k \ldots r} = -\delta_{i \ldots k \ldots l \ldots r}$$

denn durch eine Transposition geht eine gerade Permutation in eine ungerade über und umgekehrt.

$$\sum c_1^i \cdots c_\varrho^k \cdots c_\varrho^l \, \delta_{i \ldots l \ldots k \ldots r} = -\sum c_1^i \cdots c_\varrho^k \cdots c_\varrho^l \cdots c_n^r \, \delta_{i \ldots k \ldots l \ldots r}$$

$$x = -x$$

also $\qquad x = 0 \qquad$ q.e.d.

3.) $(c_1, \ldots, c_\varrho + d_\varrho, \ldots c_n) = (c_1, \ldots c_\varrho, \ldots, c_n) + (c_1, \ldots, d_\varrho, \ldots c_n)$

Beweis durch Ausmultiplizieren der Summen nach $(c_\varrho^k + d_\varrho^k)$

$$\sum c_1^i \cdots c_\varrho^k + d_\varrho^k \cdots c_n^r \, \delta_{i \ldots r} = \sum c_1^i \cdots c_\varrho^k \cdots c_n^r \, \delta_{i \ldots r} + \sum c_1^i \cdots d_\varrho^k \cdots c_n^r \, \delta_{i \ldots r}$$

4.) $(u_1, u_2, \ldots u_n) = 1$, wobei u_k der Einheitsvektor ist mit den Koordinaten $e_k^i = 0$ für $i \neq k$ und

$$e_k^i = 1 \quad \text{für} \quad i = k \; .$$

Von der Summe

$$(u_1, u_2, \ldots u_n) = \sum e_1^i e_2^1 \cdots e_n^r \, \delta_{i \ldots r}$$

bleibt also nur das eine Glied $e_1^1 \ldots e_n^n$ ~~xxx~~ $\delta_{1 \ldots n}$ übrig. Die übrigen sind gleich Null.

$$(u_1, u_2, \ldots u_n) = e_1^1 e_2^2 \cdots e_n^n \, \delta_{1 \ldots n}$$

Es ist $\delta_{1 \ldots n} = 1$ denn $1, 2, \ldots, n$ ist die identische Permutation, also eine gerade.

$$e_1^1 \dots e_n^n = +1 \text{ nach Definition der } e_k^i.$$

Also gilt wirklich

$$(n_1, n_2, \dots, n_n) = 1$$

Damit haben wir die auf S.305 behauptete Existenz n-reihiger Determinanten bewiesen.

Rechenregeln, Entwicklungssatz, Transpositionssatz, Multiplikationssatz.

Transpositionssatz:

(XIII) $$|c_k^i| = |c_i^k|$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Beweis:

$$|c_k^i| = \sum_{ik\dots r=1}^{n} c_1^i c_2^k \dots c_n^r \delta_{ik\dots r}$$

$$|c_i^k| = \sum_{ik\dots r=1}^{n} c_i^1 c_k^2 \dots c_r^n \delta_{ik\dots r}$$

Ordnet man im letzten Ausdruck die c_k^ϱ so, dass die unteren Indizes die Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ erhalten, so ist

$$|c_i^k| = \sum c_1^{\bar i} c_2^{\bar k} \dots c_n^{\bar r} \delta_{ik\dots r}$$

$\bar i, \bar k, \dots, \bar r$ ist die inverse Permutation von $i\ k \dots r$.
Es ist $\bar i\ \bar k \dots \bar r$ aus $1\ 2 \dots n$ durch dieselbe Anzahl von Transpositionen entstanden, wie $1, 2, \dots, n$ aus $i\ k \dots n$, also durch die gleiche Anzahl von Transpositionen, wie $i\ k\ l \dots r$ aus $1\ 2 \dots n$. Also ist $\delta_{ik\dots r} = \delta_{\bar i \bar k \dots \bar r}$

Wir können jetzt schreiben:

$$|c_i^k| = \sum c_1^{\bar i} c_2^{\bar k} \dots c_n^{\bar r} \delta_{\bar i \bar k \dots \bar r}$$

Hierbei geht die Summation zunächst über die ungestrichenen $i, k \dots r$. Wir können aber ebenso gut über $\bar{i}, \bar{k}, \dots \bar{r}$ summieren. Denn wenn $(i\ k \dots r)$ alle Permutationen von $(1 \dots n)$ durchläuft, so tut die inverse $(\bar{i}\ \bar{k} \dots \bar{r})$ dasselbe.

Ersetzen wir schliesslich formal $\bar{i} \dots \bar{r}$ durch $i \dots r$, so ergibt sich

$$|c_i^k| = \sum c_1^i c_2^k \dots c_n^r \delta_{ik\dots r}$$

also $$|c_i^k| = |c_k^i| \qquad \text{q.e.d.}$$

Mit Hilfe des Transpositionssatzes folgen aus allen für die Spalten einer n-reihigen Determinante bewiesenen Sätze, entsprechende für die Zeilen.

Zur Berechnung von Determinanten beachte man, dass jedes Produkt je einen Faktor aus jeder Zeile und Spalte haben muss.

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \cdots & \cdots & c_1^n \\ \cdot & c_2^2 & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ c_n^1 & \cdots & \cdots & c_n^n \end{vmatrix}$$

Das in der Figur bezeichnete Produkt $c_1^1\ c_2^2 \dots c_n^n$ nennt man das Haupt-oder Diagonalglied. Die Determinante hat im ganzen $n!$ Glieder, weil es $n!$ Permutationen der n Indizes gibt. Dem Diagonalglied gibt man positives Vorzeichen. Dann hat ein beliebiges Glied, das durch k Vertauschungen von Spalten in das Diagonalglied übergehen möge, das Vorzeichen $(-1)^k$. Zur bequemeren Berechnung dient der

Laplacesche Entwicklungssatz für n-reihige Determinanten.

Er lautet: Teilt man eine Determinante durch einen wagerechten oder senkrechten Strich in zwei Teile, so ist der Wert der ganzen Determinante gleich der Summe der mit passenden Vorzeichen versehenen Teildeterminanten des einen Teils, multipliziert mit den zugehörigen Unterdeterminanten.

Dabei versteht man unter einer Unterdeterminante von $|c_k^i|$

diejenige Determinante, die übrig bleibt, wenn man aus $|c_k^i|$ irgendwelche Zeilen und ebenso-viele Spalten streicht. Die Elemente selbst lassen sich als einreihige Unterdeterminanten auffassen. b_k^i und $b_i^{k'}$ heissen „zugehörige" Unterdeterminanten, wenn die eine durch Wegstreichen aller Zeilen und Spalten entsteht, in denen Elemente der anderen stehen.

Wir beweisen den Entwicklungssatz im vereinfachten Fall für die Entwicklung nach den Elementen einer Spalte. Er lautet dann: <u>Der Wert einer n-reihigen Determinante ist gleich der Summe aus den mit passenden Vorzeichen versehenen Produkten der Elemente einer Spalte mit den dazugehörigen Unterdeterminanten.</u>

Die Unterdeterminante von c_k^i ist hierbei die Determinante, die durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Die Unterdeterminante von c_k^i heisse C_i^k. Dann heisst der Entwicklungssatz

$$\mathfrak{D} = (-1)^k \sum_{i=1}^{n} c_k^i \, \mathfrak{C}_i^k (-1)^i$$

Beweis:

Wir vertauschen die Spalten der Determinante so, dass die Anordnung der Spalten k,1,2,..k-1,k+1...n wird. Dazu sind k-1 Transpositionen nötig. Der Wert der Determinante ist also mit $(-1)^{k-1}$ multipliziert worden. Es haben dabei folgende Übergänge stattgefunden:

$$\mathfrak{D} \longrightarrow \bar{\mathfrak{D}} = (-1)^{k-1} \mathfrak{D} = |\bar{c}_k^i|$$

$$\{c_k^i\} \rightarrow \{\bar{c}_1^i\}$$

$$\mathfrak{C}_i^k \rightarrow \bar{\mathfrak{C}}_i^1$$

Es genügt also, den Beweis für die Entwicklung nach der ersten Spalte zu führen, wobei man $\bar{D}$ und damit auch D erhält. Es ist also noch zu zeigen:

$$\sum_{i \ldots r = 1}^{n} c_1^i c_2^k \cdots c_n^r \, \delta_{i k \ldots r} = \sum_{i=1}^{n} c_1^i \, \mathfrak{C}_i^1 (-1)^{i-1}$$

Dies ist bewiesen, wenn wir zeigen:

$$\mathfrak{C}_i^1 (-1)^{i-1} = \sum_{k \ldots r = 1}^{n} c_2^k \cdots c_n^r \, \delta_{i k \ldots r} \qquad (\mathfrak{E})$$

Sei nun mit $\delta^{(i)*}_{k\ldots r}$ die Zahl $+1$ oder -1 oder 0 bezeichnet, jenachdem $k\ldots r$ eine gerade oder ungerade Permutation von $1,\ldots,i-1,i+1,\ldots n$ ist oder zwei der Indizes $i\ k\ \ldots r$ einander gleich sind. Dann wird

$$b_i^1 = \sum_{k\ldots r=1}^{n} c_2^k \cdots c_n^r \, \delta^{(i)*}_{k\ldots r}$$

($\ast$) ist also bewiesen, wenn wir zeigen

$$(-1)^{i-1}\delta^{(i)*}_{k\ldots r} = \delta_{ik\ldots r} \qquad (F)$$

(F) stimmt offenbar, wenn zwei der Indizes $i\ k\ \ldots r$ gleich sind, denn dann verschwinden beide Seiten. Andernsfalls möge $k\ldots r$ durch m Transpositionen aus $1\ldots\ i-1,i+1\ \ldots n$ hervorgehen, also $\delta^{(i)*}_{k\ldots r} = (-1)^m$ sein. Dann kann man $\delta_{ik\ldots r}$ durch $m+i-1$ Transpositionen aus $1,2,\ldots n$ erzeugen. Denn $i-1$ Transpositionen führen $1,2\ldots n$ in $i,1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$ über und diese ~~Transposition~~ Permutation wird durch m weitere Transpositionen in $i,k\ldots r$ übergeführt. Beide Seiten von (F) haben also den Wert $(-1)^{i+m-1}$. Damit ist (F),(E) und der Entwicklungssatz nach Elementen einer Spalte bewiesen. Aus dem Transpositionssatz folgt eine analoge Entwicklung nach Elementen einer Zeile.

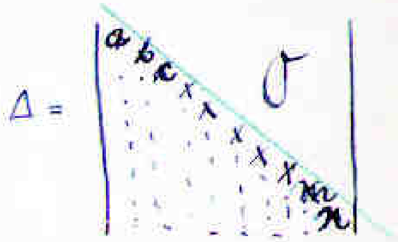
Aus dem Entwicklungssatz ergibt sich eine Regel zur praktischen Ausrechnung einer Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \\ c_i^1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Wenn man etwa nach der 1.Spalte entwickeln will, muss man dafür sorgen, dass alle Elemente dieser Spalte bis auf höchstens eins verschwinden. Das kann man aber immer erreichen, durch Addition geeigneter Vielfacher einer Zeile zur anderen. Damit hat man die Determinante n-ten Grades auf eine solche $(n-1)$ten Grades zurückgeführt, die dann entsprechend weiterbehandelt wird.

Speziell ergibt sich, wie man sofort sieht, der Satz:

Eine Determinante, bei der auf einer Seite der Diagonalen nur Nullen stehen, ist gleich dem Diagonalglied.



a b c ... m n sei die Hauptdiagonale. Wir entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten a.A, wobei A die Unterdeterminante von a .

B sei die Unterdeterminante von b in A
C " " " " " c in B
u.s.w.

So erhalten wir, indem wir die Unterdeterminanten immer wieder nach der ersten Zeile entwickeln

Δ = a.A = a.b.B = ... = ... = a.b.c ... mn . q.e.d.

Sind alle Glieder an der anderen Seite von a b c ... mn = 0, so wird der entsprechende Beweis für Spalten geführt.

Lineare Transformationen und Multiplikationssatz für n-reihige Determinanten.

Im dreidimensionalen Raum hatten wir lineare Vektortransformationen dargestellt durch eine Beziehung der Form

$$x^i = \sum_{k=1}^{3} a^i_k x^{k'} \quad (i = 1, 2, 3)$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}'_k x^{k'}$$

Wir definieren nun für n Dimensionen als lineare homogene Vektortransformation jede Abbildung b ⟶ c der Form

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

$$(A) \qquad \mathfrak{c} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k b^k$$

Dabei ist b an Stelle von $\overset{x'}{\xi'}$ getreten,

$\mathfrak{c}$ " " " ξ

und $\mathfrak{a}$ " " " $\mathfrak{a}'$

Durch (A) ist jedem Vektor b ein Vektor $\mathfrak{c}$ eindeutig zugeschrieben. Komponentenweise geschrieben, ~~bedeutet~~ lautet (A):

$$c^i = \sum_k a^i_k b^k \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Früher ging $\mathfrak{a}_k$ in $\mathfrak{a}'_k$ über. An Stelle von $\mathfrak{a}_k$ tritt jetzt $\mathfrak{e}_k$. Unsere Transformation hat die Eigenschaft, $\mathfrak{e}_l$ in $\mathfrak{a}_l$ überzuführen. Es gelte zunächst

$$\mathfrak{e}_l \to \tilde{\mathfrak{a}}_l$$

dann ist nach A

$$\tilde{\mathfrak{a}}_l = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k e_l^k$$

und da

$$e_l^k = 0 \qquad \text{für } l \neq k$$

$$e_l^l = 1$$

folgt

$$\tilde{\mathfrak{a}}_l = \mathfrak{a}_l e_l^l = \mathfrak{a}_l$$

Also:

$$\mathfrak{e}_l \to \mathfrak{a}_l \qquad \text{q.e.d.}$$

Sind die Bildvektoren $\mathfrak{a}_k$ der Grundvektoren linear unabhängig, so gehört nicht nur zu jedem b eindeutig ein $\mathfrak{c}$, sondern auch umgekehrt zu jedem $\mathfrak{c}$ eindeutig ein b. Die Transformationsformel $c^i = \sum_k a^i_k b^k$ können wir nämlich als ein System von n linearen Gleichungen mit den Unbekannten $b^1, b^2, \dots, b^n$ auffassen. Wir wissen (S.301-304), dass dieses System genau eine Lösung b hat, wenn die $\mathfrak{a}_k$ linear unabhängig sind. Sind die $\mathfrak{a}_k$ dagegen linear abhängig, so gibt es im allgemeinen zu vorgegebenem $\mathfrak{c}$ keine Lösung b; wenn es eine gibt, so gibt es auch unendlich viele (S.308 Eindeutige Umkehrbarkeit der Transformationsformel (A) ist also äquivalent mit linearer Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_k$.

$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n$ seien n Vektoren. Wie transformiert sich vermöge (A) die Determinante $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n)$?

Es gehe über

$$(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_n) \text{ in } (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_n)$$

$\mathfrak{b}_\varrho$ habe die Komponenten b_ϱ^k. Sein Bildvektor sei $\mathfrak{c}_\varrho$.

Dann ist $\mathfrak{c}_\varrho = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k b_\varrho^k$

also

$$(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_n) = \left(\sum b_1^k \mathfrak{a}_k, \sum b_2^k \mathfrak{a}_k, \dots, \sum b_n^k \mathfrak{a}_k\right)$$

und **distributiv** ausgerechnet:

$$(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_n) = \sum_{i,k,\dots,r=1}^{n} b_1^i b_2^k \cdots b_n^r (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_r)$$

Es ist aber:

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k, \dots, \mathfrak{a}_r) = \delta_{ik\dots r} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) \qquad \text{(S. 315)}$$

~~S.315~~

Also:

$$|c_k^i| = \sum_{i\dots r=1}^{n} b_1^i b_2^k \cdots b_n^r \delta_{ik\dots r} (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n)$$

Hierbei ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) = |a_k^i|$ die „Transformationsdeterminante" von (A), die von der Summation nicht abhängt, also als Faktor vor die Summe gesetzt werden kann.)

Weiterhin ist definitionsgemäss:

$$\sum b_1^i b_2^k \cdots b_n^r \delta_{ik\dots r} = |b_k^i|$$

also folgt:

$$|c_k^i| = |b_k^i| \cdot |a_k^i|$$

Drücken wir nun noch $|c_k^i|$ durch die a_k^i und b_k^i aus, wobei $c_k^i = \sum_{l=1}^{n} b_k^l a_l^i$ ist, so erhalten wir den Determinantenmultiplikationssatz:

$$\underline{\left|b^i_k\right|\cdot\left|a^i_k\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} b^l_k a^i_l\right|}$$

Den Multiplikationssatz können wir durch Anwendung des Transpositions~~xxxxxxxx~~satzes, also durch Vertauschung von Zeilen mit Spalten in vier verschiedenen Formen schreiben. Die drei anderen sind:

$$\left|b^i_k\right|\left|a^i_k\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} b^l_k a^i_l\right|$$

$$\left|b^i_k\right|\left|a^k_i\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} b^l_k a^l_i\right|$$

$$\left|b^k_i\right|\left|a^k_i\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} b^k_l a^l_i\right|$$

$$\left|b^k_i\right|\left|a^i_k\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} b^k_l a^i_l\right|$$

Wir haben auf S.306 gesehen, dass die Lösungen eines Gleichungssystems von der Determinante des Systems abhängen. Es interessiert uns deshalb, wann diese Determinante verschwindet und wann nicht. Zu diesem Zweck beweisen wir folgenden Satz:

<u>Eine Determinante von linear unabhängigen Vektoren kann nie verschwinden.</u>

<u>Beweis</u>: Es seien $\mathfrak{a}_k \; (k=1,2,3,\dots n)$ linear unabhängig. Dann gibt es n eindeutig bestimmte Vektoren, die vermöge (A) in $\overset{n}{\mathfrak{a}}_1, \overset{n}{\mathfrak{a}}_2, \dots \overset{n}{\mathfrak{a}}_n$ übergehen. Sie mögen A_k heissen und die Komponenten A^l_k haben. Dann ist

$$\mathfrak{n}_k = \sum \mathfrak{a}_l A^l_k$$

oder komponentenweise geschrieben:

$$e^i_k = \sum_{l=1}^{n} a^i_l A^l_k \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} 1,2,\dots n)$$

Durch Anwendung des Multiplikationssatzes erhalten wir

$$(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots \mathfrak{n}_n) = 1 = |A^i_k|\,|a^i_k|$$

Dabei ist $|A^i_k|$ eine endliche Zahl, also

$$|a^i_k| \neq 0 \qquad \text{q.e.d}$$

Zusammen mit Satz 2 erhalten wir also den Satz:

<u>Lineare Abhängigkeit von n Vektoren ist äquivalent mit dem Verschwinden ihrer Determinante.</u>

Jede Matrix (a^i_k) $(^i_k\} 1,2, \ldots n)$ bestimmt offenbar eindeutig eine Transformation der Form (A) durch die Formeln

$$c^i = \sum a^i_k b^k$$

Dann hat die Matrix (A^i_k), die wir soeben verwandten, folgende Bedeutung:

Die Matrix (A^i_k) stellt die inverse Transformation zur Transformation (a^i_k) dar; d.h. transformieren wir einen beliebigen Vektor $\mathfrak{b}$ mit Hilfe von (A^i_k) in $\mathfrak{c}$ und dann $\mathfrak{c}$ mit Hilfe von (a^i_k), so entsteht aus $\mathfrak{c}$ wieder $\mathfrak{b}$.

Beweis durch ausrechnen. Für den Bildvektor $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ gilt

$$c^l = \sum_{k=1}^{n} A^l_k b^k \qquad (l = 1,2, \ldots n)$$

Tranformieren wir nun vermöge (a^i_k), so ist der neue Bildvektor:

$$x^i = \sum_{l=1}^{n} a^i_l c^l = \sum_{l=1}^{n} a^i_l \sum_{k=1}^{n} A^l_k b^k \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

x^i muss gleich b^i sein, wenn obige Behauptung stimmt. Wir können schreiben

$$x^i = \sum_{l,k=1}^{n} (a^i_l A^l_k)\, b^k$$

nun ist aber $\sum_{l=1}^{n} a^i_l A^l_k = e^i_k$ (s.o.) und $e^i_k = 0$

für alle i und k ausser i = k.

also:

$$(i=1,2,\dots n) \qquad x^i = \sum_{k=1}^{n} e^i_k b^k = e^i_i b^i = b^i \qquad \text{q.e.d.}$$

Ausgeartete lineare Transformationen.

Es seien in (A) S. 324 die $\mathfrak{a}_k$ ($k = 1,2,\dots n$) linear abhängig. Dann haben nicht alle $\mathfrak{x}$ Originale; haben sie eins, so haben sie auch unendlich viele (s.o. und S.308). Wie macht sich das im dreidimensionalen Raum bemerkbar?

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind linear abhängig, heisst:

$$|a^i_k| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{o}$$

Nach dem Transpositionssatz ist auch

$$|a^k_i| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{o}$$

also hat das homogene System

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i a^i_k = \mathfrak{o} \qquad (k=1,\dots 3)$$

eine nichttriviale Lösung λ_i ($i=1,\dots 3$). Multiplizieren wir die k-te Gleichung mit $\mathfrak{b}^k$ und summieren über k, so ergibt sich $\sum_{i,k=1}^{3} \lambda_i a^i_k \mathfrak{b}^k = \mathfrak{o}$ also wegen (A):

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathfrak{c}^i = \mathfrak{o}$$

d.h. die Endpunkte der von O aus abgetragenen Vektoren $\mathfrak{x}$ liegen in der durch O gehenden Ebene $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = \mathfrak{o}$

Auf diese Ebene werden ~~xix~~ also vermöge (A) alle Punkte des Raumes abgebildet. ~~Sei~~ Ist g^k $(k=1,\dots 3)$ eine nichttriviale Lösung von

$$(i=1,\dots 3)\quad \sum_{k=1}^{3} a^i_k g^k = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_k g^k = 0$$

(wegen $|a^i_k| = 0$ existiert eine solche Lösung) und ist

$\mathfrak{r} = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_k b^k$, so ist auch (vgl. S. 309) bei beliebigem t :

$$\mathfrak{r} = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}_k (b^k + t g^k),$$

d.h. die Punkte der Geraden

$$x^i = b^i + t g^i \qquad (i=1,\dots 3)$$

bzw.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + t\mathfrak{g}$$

haben alle das gleiche Bild.

Die Abbildung A kann aufgefasst werden als Parallelprojektion des Raumes in Richtung $\mathfrak{g}$ auf die Ebene $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x^i = 0$.

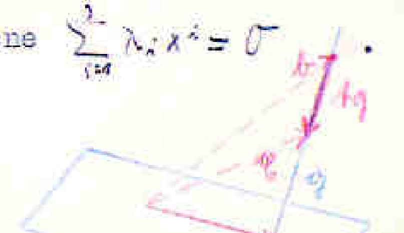


Fig 303

(Die Bildpunkte $\mathfrak{r}$ brauchen aber nicht ~~seine~~ jene Ebene ganz zu erfüllen. Sie können auf eine in dieser Ebene durch O laufende Gerade oder auf O allein beschränkt sein.)

§ 5. Geometrische Anwendungen.

1. Wann liegen 4 Punkte im Raum auf einer Ebene?

Die Punkte P, Q, R, S mögen bzw. die Koordinaten x^i, y^i, z^i, t^i haben. $(i = 1,2,3)$

Die Koordinaten dieser Punkte sollen ein und derselben Ebenengleichung genügen, d.h. es bestehen die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x^i + u_4 = 0$$

$$\sum u_i y^i + u_4 = 0$$

$$\sum u_i z^i + u_4 = 0$$

$$\sum u_i t^i + u_4 = 0$$

Behauptung: Die Determinante des Systems muss verschwinden, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 1 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 1 \\ t^1 & t^2 & t^3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis:

Wir subtrahieren die letzte Zeile von allen übrigen und erhalten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^1-t^1 & x^2-t^2 & x^3-t^3 & 0 \\ y^1-t^1 & y^2-t^2 & y^3-t^3 & 0 \\ z^1-t^1 & z^2-t^2 & z^3-t^3 & 0 \\ t^1 & t^2 & t^3 & 1 \end{vmatrix}$$

und nach den Elementen der letzten Spalte entwickelt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^1-t^1 & x^2-t^2 & x^3-t^3 \\ y^1-t^1 & y^2-t^2 & y^3-t^3 \\ z^1-t^1 & z^2-t^2 & z^3-t^3 \end{vmatrix}$$

Dies ist aber der Rauminhalt (SP, SQ, SR) des Quaders, der durch die Vektoren SP , SQ und SR aufgespannt wird. Dieser Rauminhalt muss verschwinden, wenn SP, SQ, und SR in einer Ebene liegen sollen. Es muss also tatsächlich

$\Delta = 0$ sein.

Offenbar ist diese Gleichung auch hinreichend.

Wir können jetzt die vierreihige Determinante als Rauminhalt auffassen und bekommen als Inhalt I eines Tetraeders mit den Eckpunkten $P(x^i)$, $Q(y^i)$, $R(z^i)$, $S(t^i)$

$$J = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 1 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 1 \\ z^1 & z^2 & z^3 & 1 \\ t^1 & t^2 & t^3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Wann gehen 4 Ebenen durch einen Punkt $P(x^i)$?

$$\sum u_i x^i + u_4 = 0$$
$$\sum v_i x^i + v_4 = 0$$
$$\sum w_i x^i + w_4 = 0$$
$$\sum t_i x^i + t_4 = 0$$

seien die Gleichungen der vier Ebenen. Wir fassen sie als ein homogenes Gleichungssystem für die Unbekannten $x^1, x^2, x^3, 1$ auf, das eine nichttriviale Lösung hat, da eine Unbekannte den Wert 1 hat. Nach Satz 2 ist es nötig, dass die Determinante des Systems verschwindet, dass also:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0$$ ist.

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, denn sie ist offenbar auch erfüllt, wenn zwei der Ebenen in eine zusammenfallen (zwei gleiche Zeilen in der Determinante, sie verschwindet also) und die dritte und vierte jener parallel sind, also keinen Punkt gemein haben.

Transformation von ganzzahligen Gitterpunkten.

Wir betrachten die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten und fragen nach solchen Transformationen $x^i = \sum a^i_k x^{k'}$ die jeden ganzzahligen Punkt P_g' in einen ganzzahligen Punkt P_g überführen, und bei denen umgekehrt alle ganzzahligen Punkte P_g aus ganzzahligen Punkten P_g' hervorgehen. Jedenfalls muss

1) $|a^i_k| \neq 0$

sein, d.h. ausgeartete Transformationen sind ausgeschlossen. Denn sonst lägen alle P_g', die Bilder wären, in einer Ebene, also wären nicht alle P_g Bilder.

2) Müssen alle a^i_k ganze Zahlen sein. Es sei z.B. a^1_3 nicht ganz. Dann betrachten wir den Bildpunkt des Punktes P_g' mit $x^{1'} = x^{2'} = 0;\ x^{3'} = 1$ Hierbei wird $x^1 = \sum a^1_k x^{k'} = a^1_3$, also nicht ganzzahlig. Die Bedingung 2) ist also jedenfalls notwendig. Hieraus folgt, dass auch $|a^i_k|$ ganzzahlig sein muss.

3) Behaupten wir: Notwendig und hinreichend ist 2) und $|a^i_k| = \pm 1$

Hinreichend: Aus 2) allein folgt:

$$P_g(x') \longrightarrow P_g(x)$$

Es fehlt noch die Umkehrung:

$$P_g(x') \longleftarrow P_g(x)$$

Es ist aber (vgl. S. 304(?))

$$x^{k'} = \frac{D_k}{D}$$

Hierbei ist

$$D_k = \text{ganz}$$
$$D = \pm 1 \qquad \text{also } x^{k'} \text{ ganz.}$$

Notwendig: Bei der inversen Tranformation ist

$$x^{i'} = \sum A^i_k x^k$$

Die A^i_k müssen aus demselben Grunde ganzzahlig sein, wie die a^i_k . Also auch die Determinante $|A^i_k|$. Es ist aber

$$|A^i_k|\,|a^i_k| = 1$$

Also muss

$$|A^i_k| = |a^i_k| = \pm 1$$

sein. q.e.d.

St. Cohn-Vossen - Analytische Geometrie I - 1929

§ 6. Kubische Gleichungen.

Satz 1. Jede kubische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

mit reellen a, b, c, besitzt eine reelle Wurzel.

Beweis: Für $\lambda \neq 0$ ist

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3\left(1 + \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^3}\right)$$

Also für hinreichend grosse $|\lambda|$ (etwa $|\lambda| > l > 0$)

$$\frac{1}{2} < \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^3} < 2$$

Also $\varphi(\lambda) < 0$ für $\lambda \leq -l$, $\varphi(\lambda) > 0$ für $\lambda \geq +l$.

$\varphi(\lambda)$ ist für $-l \leq \lambda \leq +l$ stetig, besitzt also in diesem Intervall eine Nullstelle. q.e.d.

Satz 2. $\varphi(\lambda)$ (definiert wie in Satz 1) lässt sich inder Form darstellen

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

dabei ist λ_1 reell und λ_2, λ_3 sind endweder beide reell ~~e~~ oder zueinander konjugiert komplex $(\lambda_2 = \alpha + i\beta, \lambda_3 = \alpha - i\beta)$

Beweis: λ_1 lässt sich nach Satz 1 reell so wählen, dass $\varphi(\lambda_1) = 0$. Also ist:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_1) &= \lambda^3 - \lambda_1^3 + a(\lambda^2 - \lambda_1^2) + b(\lambda - \lambda_1)\\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda^2 + \lambda\lambda_1 + \lambda_1^2 + a(\lambda + \lambda_1) + b)\\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda^2 + 2A\lambda + B)\end{aligned}$$

A,B sind reell. Die Wurzeln der Gleichung $\lambda^2 + 2A\lambda + B = 0$ sind $\lambda_2 = -A + \sqrt{-B + A^2}$, $\lambda_3 = -A - \sqrt{-B + A^2}$. λ_2, λ_3 sind reell oder konjugiert komplex. Es ist $\cancel{\lambda^2 + 2A\lambda +}$ $\lambda^2 + 2A\lambda + B = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ also $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$

§ 7 Transformation quadratischer Formen und Gebilde auf Normaltypen.

Jede quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k = Q(x,x)$ lässt sich durch eine Transformation $x^i = \sum_{k=1}^{n} c_k^i y^k$ $(i = 1,2....,n)$ mit $|c_k^i| \neq 0$ in die Gestalt $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (y^i)^2$ bringen, wo die ε_i die Werte $1, 0, -1$ haben können.

Beweis:

Es genügt, statt durch eine einzige Transformation mit nichtverschwindender Determinante, durch endlich viele Transformationen dieser Art hintereinander $Q(x,x)$ in die vorgeschriebene Gestalt zu bringen. Denn ist D die Transformationsdeterminante von $x \to y$, E die von $y \to z$, so ist nach dem Multiplikationssatz D.E die Determinante der Transformation $x \to z$, die aus $x \to y$ und $y \to z$ entsteht; die Determinante von $x \to z$ ist also von Null verschieden, wenn es die von $x \to y$ und von $y \to z$ sind. Durch Induktion folgt das entsprechende für die Determinante Δ einer Transformation, die aus endlich vielen hintereinander erzeugt ist; Δ ist von Null verschieden, wenn es die Determinanten aller erzeugenden Transformationen sind.

Wir beweisen den Satz nun durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $Q = a_{11}(x^1)^2$. Entweder $a_{11} = 0$, dann hat Q bereits Normalform mit $\varepsilon_1 = 0$, oder wir setzen $a_{11} = \varepsilon_1 |a_{11}|$ $(\varepsilon_1 = \pm 1)$ und $x^1 = \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} y^1$, also $Q = \varepsilon_1 (y^1)^2$.

Wir setzen den Satz für Formen von $n - 1$ Veränderlichen als richtig voraus, und betrachten $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x^i x^k$.

Wir unterscheiden drei Fälle:

α) alle a_{ik} sind Null. Dann ist nichts zu beweisen, denn Q hat schon die vorgeschriebene Gestalt mit $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 0$.

β) alle Koeffizienten a_{ii} der quadratischen Glieder sind Null, irgend ein $a_{ik} \neq 0$ $(i \neq k)$. Durch die Transformation „Umnummerierung der Veränderlichen" (Determinante ± 1) lässt sich dann erreichen $a_{12} \neq 0$. Die Transformation $x^1 = y^1 + y^2$, $x^i = y^i$ $(i \geq 2)$ mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdot & \cdot & 1 & \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

führt hierauf $Q(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x^i x^k$ in $\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, y^i y^k$ über, wo ein Koeffizient eines quadratischen Gliedes von Null verschieden ~~wird~~; man findet nämlich $b_{22} = a_{11} + 2\, a_{12} + a_{22}$, n.V. $a_{11} = a_{22} = 0$, also in der Tat $b_{22} = 2\, a_{12} \neq 0$.

Also bleibt nur der Fall zu erledigen

γ) ein $a_{ii} \neq 0$; durch evtl. Umnummerierung ist dann $a_{11} \neq 0$ zu erreichen. Es ist nun

$$Q(x,x) = a_{11}\,(x^1)^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} a_{1k}\, x^1 x^k + Q'(x,x),$$

wo Q' eine quadratische Form ist, die nicht von x^1, sondern nur von $x^2, \dots, x^n$ abhängt.

Nun ist für $\varepsilon_1 = \frac{a_{11}}{|a_{11}|}$ $(\varepsilon_1 = \pm 1)$ und für

$$y^1 = \sqrt{|a_{11}|}\, x^1 + \varepsilon_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{\sqrt{|a_{11}|}}\, x^k:$$

$$(y^1)^2 = |a_{11}|(x^1)^2 + 2\varepsilon_1 \sum_{k=2}^{n} a_{1k}\, x^1 x^k + \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{\sqrt{|a_{11}|}}\, x^k\right]^2,$$

also $Q(x,x) = \varepsilon_1 (y^1)^2 + R(x^2, \dots, x^n)$, wo R eine quadratische Form in $x^2, \dots, x^n$ ist.

Die Transformation

$$y^1 = \sqrt{a_{11}}\, x^1 + \varepsilon_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{\sqrt{a_{11}}}\, x^k ,$$

$$y^i = x^i \quad (i \geqq 2),$$

(Determinante $\begin{vmatrix} \sqrt{a_{11}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} \neq 0$)

führt also Q über in

$$\underline{\varepsilon_1 (y^1)^2 + R(y^2, \dots, y^n).}$$

R ist eine quadratische Form in nur $n \dot{-} 1$ Variablen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Transformation

$$y^i = \sum_{k=2}^{n} c^i_k z^k \quad (i = \underline{2}, \dots, n)$$

mit $\left| c^i_k \right| \neq 0$, die ~~die~~ $R(y^2, \dots, y^n)$ in $\sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (z^i)^2$ überführt.

Dann führt die Transformation

$$y^1 = z^1$$

$$y^i = \sum_{k=2}^{n} c^i_k z^k \quad (i = 2, \dots, n)$$

(Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \; 0 \; 0 \cdot 0 \\ 0 & \\ 0 & c^i_k \\ \cdot & \\ 0 & \end{vmatrix} \neq 0$)

$Q(x,x)$ über in die verlangte Form $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (z^i)^2$.

Nun betrachten wir die Schar quadratischer Gebilde $\mathfrak{A}(x,x) + 2\,L(x) + A = 0$. Nach dem Früheren lässt sie sich durch nichtausgeartete Transformation $x \to y$ überführen in

$$(\,J\,) \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (y^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i y^i + A = 0 \qquad ;$$

evtl. durch Umnummerierung können wir erreichen :

$\varepsilon_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$; $\varepsilon_i = 0$ für $i > r$.

Dann wird (J) zu

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \left[(y^i)^2 + 2\,\varepsilon_i b_i y^i\right] + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i y^i + A = 0$$

(für $r+1 > n$ bedeutet $\sum_{i=r+1}^{n}$ die Null)

und für $y^i + \varepsilon_i b_i = z^i$ $\quad(i = 1 \ldots n)$:

$$(J) \quad \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (z^i)^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i z^i + A' = 0 \quad .$$

Hieraus ergeben sich zwei Normaltypen für J :

a) $r+1 > n$ oder $b_i = 0$ für $r+1 \leq i \leq n$.

$$(J_1) \quad \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (z^i)^2 + B = 0$$

b) $r+1 \leq n$, ein $b_i \neq 0$ (etwa b_s) für $r+1 \leq i \leq n$.

Wir setzen
$$\begin{aligned} z^i &= y^i & 1 \leq i &\leq s-1 \\ \sum_{i=1}^{n} b_i z^i &= y^s & & \\ z^i &= y^i & s+1 \leq i &\leq n \end{aligned}$$

(Determinante $\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & b_s & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{vmatrix} = b_s \neq 0$)

und erhalten

$$(\,J_2\,) \quad \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (y^i)^2 + 2\,y^s + B = 0 \quad .$$