Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Auf einer Insel sind vier Seeräuber mit einem Schatz aus Goldmünzen gestrandet. Sie beschließen, diesen unter sich aufzuteilen, stellen aber fest, dass dies so nicht geht, weil die Anzahl der Münzen nicht durch 4 teilbar ist. In der Nacht steht nun heimlich einer der Räuber auf, steckt eine Münze ein und kann sich danach genau ein Viertel des Restschatzes nehmen. Damit verschwindet er von der Insel. Kurz darauf erwacht auch der zweite Räuber, ohne den ersten bemerkt zu haben. Auch er muss erst eine Münze entfernen und einstecken, kann danach aber genau ein Viertel des Restschatzes an sich nehmen und heimlich verschwinden. Ebenso passiert es mit Räuber drei und vier, jeder muss erst eine Münze entfernen, bevor er vom Restschatz sein Viertel nehmen kann. Jeder der Räuber glaubt also, etwas mehr als ein Viertel des Schatzes bekommen und seinen schlafenden Kumpanen den Rest zurückgelassen zu haben. Am nächsten Morgen besteht der Schatz noch aus 78 Goldmünzen. Wieviele Münzen waren es ursprünglich?

Zusatzaufgabe: Wären es fünf Räuber gewesen, die auch jeweils eine Münze, dann aber immer ein Fünftel des Schatzes genommen hätten, was wäre dann die kleinste mögliche Anzahl von Münzen im ursprünglichen Schatz?

Aufgabe 2

Am Göttinger Fernsehturm soll eine Wendeltreppe installiert werden, auf der man außen am Turm hinauflaufen kann. Der Turm ist bekanntlich 100 m hoch, und die Treppe soll einen konstanten Anstieg haben und den Turm, der einen Durchmesser von 10 Metern hat, genau 20-mal umkreisen. Wenn ein Läufer auf der fertiggestellten Treppe in einem Meter Abstand von der Turmwand nach oben geht, welchen Weg legt er dann dabei zurück?

Aufgabe 3

Es gibt natürliche Zahlen, die gleich der Summe der dritten Potenzen ihrer Ziffern sind. So ist zum Beispiel 153 eine solche Zahl, weil $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27$ ist.

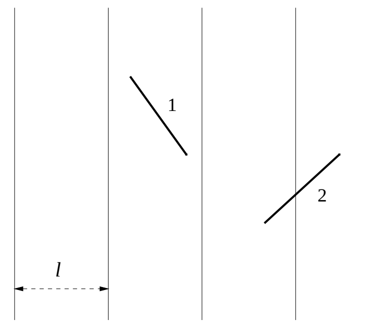
a) Zeige, dass es außer der Zahl 1 keine natürliche Zahl gibt, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern ist.

b) Finde alle natürliche Zahlen, die gleich der Summe der dritten Potenzen ihrer Ziffern sind!

Hinweis: Man kann zunächst versuchen zu zeigen, dass solche Zahlen nur wenige Stellen haben können. Danach kann man zum Beispiel systematisch probieren. Auch der Einsatz eines Computers kann hilfreich sein.

Aufgabe 4 — Experimentieraufgabe

Benötigt werden nur ein Blatt Papier, ein Bleistift und ein Streichholz bzw. eine Nadel oder ein ähnlich geformter Gegenstand. Zur Vorbereitung messe man die Länge l des Streichholzes und male auf das ganze Blatt Papier ein Gitter der Breite l, wie es im Bildchen zu sehen ist.



Man werfe das Streichholz nun zufällig einige hundert Mal auf das Gitter, und notiere sich dabei, ob das Streichholz eine Linie getroffen hat (Bsp.: Position 2) oder die Linien verfehlt hat (Bsp.: Position 1). „Zufällig“ soll hierbei bedeuten, dass man das Streichholz aus einer gewissen (nicht zu großen) Höhe fallen lässt, ohne dabei irgendeine Ausrichtung oder Position zu bevorzugen.

Hat man nun insgesamt N-mal geworfen und dabei T-mal eine Linie getroffen, so berechne man die relative Trefferhäufigkeit

$$p = \frac{T}{N}$$

Nach genügend vielen Würfen (es sollten durchaus einige hundert sein) sollte diese sich nicht mehr groß ändern. Dann berechne man einmal den Ausdruck

$$\alpha = \frac{2}{p}$$

und stelle eine Vermutung an, welcher (bekannte) Wert sich hinter diesem α verbergen könnte! Wie könnte man diese Vermutung beweisen, oder womit könnte das Ergebnis zusammenhängen?

Einsendetermin ist der 8. Mai 2000

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen