Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 112

Aufgabe 1

Bei einem Turnier spielen n Fußballmannschaften so, dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielt. (Es gibt also kein Hin- und Rückspiel.) Angenommen, keine Mannschaft gewinnt alle ihre Spiele und es gibt kein Unentschieden. Zeige, dass es dann drei Mannschaften A, B, C gibt, für die gilt: A gewinnt gegen B, B gewinnt gegen C, und C gewinnt gegen A.

Aufgabe 2

Gegeben seien n beliebige Punkte auf einer Geraden. Ist es möglich, $n+1$ Kreise mit gleichem Mittelpunkt und Radien $k_i \cdot r$ mit positiv ganzzahligen k_i für $i = 1, \ldots, n+1$ und einem reellen r derart zu wählen, dass jeder Ring zwischen zwei Kreisen genau einen der gegebenen Punkte enthält?

Seien nun n beliebige Punkte in einer Ebene bzw. im Raum gegeben. Ist es möglich, $n + 1$ entsprechend gebildete Sphären zu finden?

Aufgabe 3

Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe jeweils zwei dieser Zahlen nicht-negativ ist. Zeige, dass dann

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$$

für alle Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ gilt, für die $x_i > 0$ ist und $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ gilt.

Aufgabe 4

Im Hof des Obstbauern stehen 99 Körbe mit Äpfeln und Birnen. Jeder Korb enthält sowohl Äpfel als auch Birnen, ihre Anzahl muss jedoch nicht übereinstimmen. Ist es möglich, 50 Körbe so zu wählen, dass diese mehr als 50 % aller Äpfel und mehr als 50 % aller Birnen enthalten? Kann die Methode darauf verallgemeinert werden, $n + 1$ aus $2n + 1$ Körben auszuwählen?

Einsendetermin ist der 13. April 2015

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de