Mathematischer
Korrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 115 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

Um einen besseren Überblick über die Abfahrtszeiten der Straßenbahnen zu bekommen, wünscht sich Annabell eine Uhr als Belohnung für ihr gutes Zeugnis. Weil Annabells Noten leider doch nicht die besten waren, bekommt sie von ihren Eltern nur einen Teil ihres Traums, eine perfekt rotationssymmetrische Uhr mit Minuten- und Stundenzeiger. Das Ziffernblatt gibt es erst zum nächsten Zeugnis. Sie kann also nicht erkennen, wo auf ihrer Uhr oben ist. Am Anfang der Ferien besucht sie ihren Cousin Richard, der nichts für sein Zeugnis bekommen hat. Natürlich verpasst sie dabei ihre Straßenbahn. In einem ausgedehnten Gespräch kommt den beiden jedoch eine Idee, wie Annabell die aktuelle Zeit an ihrer Uhr ablesen kann, wenn sie nur häufig genug auf ihre Uhr schaut. Etwas später am Abend erinnert sich Richard an eine Uhr, die sein Vater von einem leicht verrückten Jugendfreund zur Hochzeit geschenkt bekommen hat. Der einzige Unterschied zu Annabells Uhr ist, dass sich (allein) der Stundenzeiger bei dieser Uhr entgegen dem Uhrzeigersinn bewegt; wieder lässt sich nicht entscheiden, wo an der Uhr oben ist.

Wie genau lässt sich die aktuelle Uhrzeit bestimmen, wenn beide Uhren zur Verfügung stehen? Und unter welchen Bedingungen und wie kann Annabell ohne Hilfe von Richards Uhr die Zeit bestimmen? Dabei darf sie sich keine Stelle auf oder an den Uhren markieren oder sich die Rotation der Uhr zwischen zwei Zeitmessungen merken.

Aufgabe 2

Der Maulwurf Tom lebt immer noch in New York. Nun ist er zum Geburtstag seines besten Freundes eingeladen. Um nicht dreckig dort anzukommen, gräbt er diesmal nicht, sondern nimmt sich ein Taxi, um von der Kreuzung $(0,0)$, an der er lebt, zur Kreuzung $(60,64)$, an der die Feier stattfindet, zu kommen. Zur besseren Unterscheidung sind die Straßenblöcke auf einem Stadtplan schwarz und weiß in einem Schachbrettmuster markiert, wobei der Block mit den Ecken $(0,0),(1,0),(1,1)$ und $(0,1)$ schwarz ist.

Leider hat Tom einen abergläubischen Taxifahrer erwischt, der sich weigert, jemals so zu fahren, dass sich zu seiner Linken ein schwarzer Block befindet. Er würde also niemals von $(0,1)$ zu $(0,0)$ fahren, wohl aber andersherum.

Trotzdem möchte Tom natürlich auf einem möglichst kurzen Weg zur Feier kommen. Wie viele mögliche Wege gibt es dazu?

Aufgabe 3

Der große Zahlen-Zauberer Zacharias begeistert seine Zuschauer mit folgendem Trick:

Er beginnt mit einer n-stelligen Zahl N und schreibt sie ohne ihre erste Ziffer auf eine große Tafel. Darunter schreibt er wieder die Zahl N, diesmal ohne ihre zweite Ziffer. Dies führt er so lange fort, bis auf der Tafel genau n jeweils $(n-1)$-stellige Zahlen stehen. Nun lässt er seinen Zauberstab über der Tafel kreisen und rechnet dabei die Summe der n Zahlen aus.

Ein Raunen geht durch das Publikum: Die Summe ist wieder genau die Zahl N.

Finde die kleinst- und die größtmögliche Zahl N, mit der dieser Trick funktioniert.

Aufgabe 4

Wir mischen einen Stapel mit 2^n Karten wie folgt:

Wir halbieren den Stapel und mischen die Karten aus den beiden Stapeln abwechselnd zusammen, wobei die unterste Karte unten und die oberste Karte oben bleibt. Zeige, dass die Karten nach n solchen Mischungen wieder in der gleichen Reihenfolge liegen wie zu Beginn.

Einsendetermin ist der 22. August 2016

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen
