Aufgabenblatt 43

Aufgabe 1

Finde alle Paare (a, b) von dreistelligen natürlichen Zahlen a und b, für die die sechsstellige Zahl z, die man durch Hintereinanderschreiben von a und b erhält, durch das Produkt $a \cdot b$ teilbar ist.

Aufgabe 2

Kann man mehr oder weniger als die Hälfte aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{20} als Summe einer Quadratzahl, einer vierten Potenz einer natürlichen Zahl und einer fünften Potenz einer natürlichen Zahl schreiben?

Hinweis: Die Zahl 5 *besitzt zum Beispiel die Darstellung* $2^2 + 0^4 + 1^5$, *die Zahl* 7 *besitzt keine solche Darstellung.*

Aufgabe 3

Pablo und Salvador spielen folgendes Spiel:

Pablo zeichnet ein rotes Dreieck auf ein Blatt Papier. Anschließend zeichnet Salvador vier weiße, zu dem roten Dreieck kongruente Dreiecke auf Papier und schneidet sowohl diese als auch das rote Dreieck aus. Diese fünf kongruenten Dreiecke legt er irgendwie auf den Tisch (dabei darf er sie auch seitenverkehrt hinlegen). Anschließend muss Pablo versuchen, die weißen Dreiecke so auf dem Tisch zu verschieben (ohne sie zu drehen!), dass sie das rote Dreieck, welches nicht bewegt werden darf, vollständig abdecken.

Zeige, dass Pablo das Spiel gewinnen kann, ganz egal wie Salvador spielt!

Gewinnt Pablo auch noch, wenn Salvador die Form des roten Dreiecks auswählen darf?

Aufgabe 4

In dem alten buddhistischen Kloster Wan-Dan (nahe Hanoi) beschäftigen sich die Mönche seit alters her mit einem heiligen Brauch:

Sie haben 2000 Edelsteine zur Verfügung, die sich alle voneinander unterscheiden. Zu Beginn des Ritus wird an einem Morgen eine gerade Anzahl $2n$ von Steinen ausgewählt. Sodann werden, um zugleich die Vielfältigkeit und die Ausgewogenheit der Welt zu versinnbildlichen, die $2n$ Steine in andächtiger Ruhe dreimal täglich, am Morgen, am Mittag und am Abend, auf eine kupferne und eine irdene Schale aufgeteilt, und zwar so, dass in jede Schale n Steine kommen.

Hierbei wird strengstens darauf geachtet, dass jede mögliche Verteilung der Steine auf die beiden Schalen im Laufe des Rituals genau einmal vorkommt. Für die Zukunft des Klosters ist nun entscheidend, wann das Ende des Rituals erreicht wird: Geschieht es des Abends, so verheißt die Zukunft Gutes. Ansonsten aber droht schweres Unheil.

Für wie viele Zahlen $2n$ an gewählten Edelsteinen mit $1 \leq n \leq 1000$ können die Mönche beruhigt in die Zukunft blicken?

Einsendetermin ist der 17. Mai 2005

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112