Mathematischer
Korrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 45 – Ferienblatt

Aufgabe 1

Der Stamm des Kastanienbaumes in unserem Garten hat einen Durchmesser von vier Metern. Er gabelt sich in drei Äste auf, von denen jeder den halben Durchmesser des Stammes hat, und auch jeder dieser drei Äste gabelt sich wieder in drei kleinere Äste mit halb so großem Durchmesser wie der vorherige Ast auf. Dies gilt ebenso für jeden Ast, dessen Durchmesser mindestens drei Millimeter beträgt; kleinere Zweige gabeln sich nicht weiter auf. An jedem Ast bzw. Zweig (auch an Ästen, die sich noch weiter verzweigen) hängen genau drei Blätter und genau drei Kastanien.

Wie viele Kastanien hängen an dem Baum?

Aufgabe 2

Zeige, wie man ein gleichseitiges Dreieck in drei gleichschenklige Trapeze zerschneiden kann.

Kann man auch ein Quadrat in eine endliche Anzahl von gleichschenkligen Trapezen zerschneiden, wobei keines der Trapeze ein Rechteck ist?

Hinweis: Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn es bezüglich der Geraden, die durch die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten des Trapezes verläuft, spiegelsymmetrisch ist.

Weil dies ein Ferienblatt ist, legen wir noch etwas drauf und schreiben einen kleinen Wettbewerb aus: Wer uns die Zerlegung mit der kleinsten Anzahl an Trapezen schickt, bekommt einen symbolischen Preis.

Und wer Gefallen an dem Zerlegen gefunden hat, sei ermutigt herauszufinden, welche Arten von Dreiecken man in solche Trapeze zerlegen kann!

Aufgabe 3

Olaf ist immer noch mit seiner Zahlenfolge

$$1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4, \ldots$$

beschäftigt. Zur Erinnerung: Beginnend mit den Ziffern 1 und 2 multipliziert Olaf immer zwei benachbarte Ziffern und schreibt das Ergebnis der Rechnung hinten ans Ende der Reihe.

Enttäuscht, dass seine Folge keine der Ziffern $0, 5, 7$ und 9 enthält, fragt er sich nun, ob die Folge der Ziffern wenigstens irgendwann periodisch wird. Kannst du ihm diese Frage beantworten?

Hinweis: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Zahlen heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, für die $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 4

Das uns bereits bekannte, ansonsten aber unscheinbare und abgelegene Kloster Wan-Dan birgt viele weitere Geheimnisse. So besteht die Klosterbibliothek aus einem sehr langen Regal, auf dem die alten Schriften vor sehr langer Zeit in 999 Bänden durchnummeriert von links nach rechts in einer Reihe angeordnet standen. Seitdem durfte zu keinem Zeitpunkt mehr als eines der kostbaren Bücher aus dem Regal zur Ausleihe entnommen werden. Außerdem musste, den heiligen Regeln des Konfusius folgend, ein entnommenes Buch stets so an eine neue Stelle des Regals einsortiert werden, dass zwischen dem alten und neuen Standort eine gerade Anzahl anderer Bücher steht. Ein Nichtbeachten dieses Rituals resultiert – wie immer – in großem Unheil für das Kloster.

Eines morgens schreitet der Bibliothekar nun bei seinem Rundgang das Regal der 999 Bücher von rechts nach links ab und liest dabei still die Nummern der Bücher: „Band 1“, „Band 2“, „Band 3“, ..., bis er am Ende des Regals bei „Band 999“ ankommt.

Nach kurzem Nachdenken erschrickt er zutiefst und schlägt Alarm. Warum?

Einsendetermin ist der 15. August 2005

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112