Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 49

Aufgabe 1

Bei Familie Lösche wird Ästhetik groß geschrieben: Man versucht, die vier Kerzen am Adventskranz möglichst gleichmäßig niederzubrennen; am schönsten ist es, wenn sie am Heiligen Abend alle gleich weit heruntergebrannt sind. Wie üblich wird am ersten Advent genau eine Kerze angezündet, am zweiten Advent werden genau zwei, am dritten Advent genau drei und am vierten Advent werden alle vier Kerzen angezündet und jede angezündete Kerze brennt für genau eine Stunde, bevor der Sohn der Familie sie auspusten darf. Können die Lösches es schaffen, dass die Kerzen zu Weihnachten alle gleich weit abgebrannt sind?

Wie sähe es aus, wenn es n Adventssonntage und dementsprechend n Kerzen gäbe?

Aufgabe 2

Die Firma „Niko & Laus“ GmbH hat eine tolle Geschäftsidee: Sie will rechteckige Adventskalender mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern) herstellen, bei denen das n-te Türchen ebenfalls rechteckig mit ganzzahligen Seitenlängen ist und genau den Flächeninhalt $n\ \mathrm{cm}^2$ hat. Dabei sollen die Türchenseiten parallel zu den Seiten des Kalenders liegen.

Passt ein solcher Kalender auf ein Rechteck, dessen Seiten beide kürzer als 24 cm sind? Wenn ja, was ist die kleinstmögliche Fläche eines solchen Kalenders?

Hinweis: Die Türchen des Kalenders dürfen auch direkt aneinander oder auch direkt an den Rand des Kalenders stoßen.

Aufgabe 3

Auch der Weihnachtsmann denkt (öko-)logisch! Er will für Peter einen Fußball mit Durchmesser 30 cm und sechs Tennisbälle mit Durchmesser von je 8 cm in einer quaderförmigen Schachtel verpacken. Welches ist die Schachtel mit der kleinsten Oberfläche, für die dies möglich ist?

Aufgabe 4

Denke dir eine natürliche Zahl n, wie zum Beispiel $n = 12$. Nun mache eine Liste der Teiler von n, in unserem Fall also $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Anschließend bestimme für jeden dieser Teiler die Anzahl seiner Teiler und schreibe diese Anzahlen in eine zweite Liste.

In unserem Beispiel hat 1 genau einen Teiler, 2 hat zwei Teiler, ebenso 3; 4 hat drei Teiler, 6 hat vier Teiler und 12 hat sechs Teiler. Unsere zweite Liste ist daher $1, 2, 2, 3, 4, 6$. Zu guter Letzt addiere die Kuben dieser Zahlen, im Beispiel ergibt das $1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = 324$.

Zeige, dass das Ergebnis stets eine Quadratzahl ist!

Einsendetermin ist der 16. Januar 2006

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112