Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 52

Aufgabe 1

Vor kurzem gelang Andrew Wiles der Beweis des großen Fermatschen Satzes. Dieser besagt, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z hat, wenn $n \geq 3$ ist. Über mehrere Jahrhunderte hinweg hatten sich die Mathematiker an diesem Problem erfolglos versucht.

Zeige den „sehr kleinen“ Fermatschen Satz: Die Gleichung

$$n^x + n^y = n^z$$

hat keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z, wenn $n \geq 3$ ist.

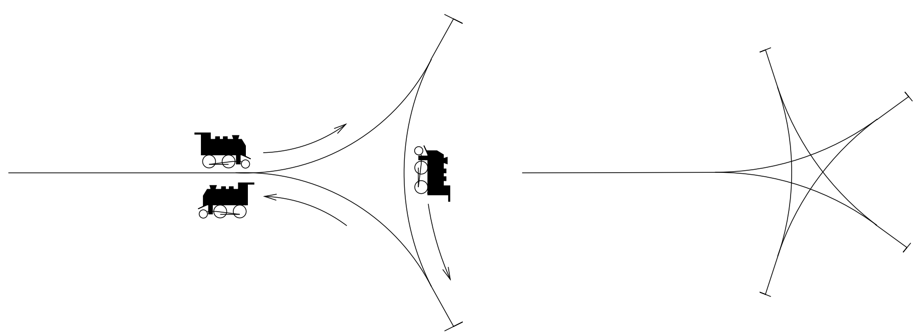
Aufgabe 2

An der Wand im Wohnzimmer von Oma Kruse hängt eine Uhr. Die Wand ist genau $\frac{\sqrt{3}}{2}$-mal so hoch wie breit. Zum Frühstück schaut Oma Kruse auf die Uhr und stellt fest, dass der kleine Zeiger der Uhr genau in die linke obere Ecke der Wand zeigt. Drei Stunden später, zum Mittagessen, zeigt der kleine Zeiger in die rechte obere Ecke. Zum Kaffee schließlich, noch einmal zwei Stunden später, zeigt der kleine Zeiger in die rechte untere Ecke.

Wann hat Oma Kruse gefrühstückt?

Aufgabe 3

Früher mussten bei der Eisenbahn die Dampflokomotiven oft gewendet werden. Dazu benutzte man auch so genannte Gleisdreiecke oder Gleisdreisterne, vgl. Abbildung. Zum Wenden muss man offensichtlich jede Weiche genau einmal stellen. In Mals in Südtirol gibt es sogar einen Gleisfünfstern, der braucht weniger Platz, aber man muss mehr Weichen stellen.



Interessant wird es, wenn man einen Wagen wenden will (auch das kommt vor), denn auf die kurzen Gleisabschnitte hinter den Weichen an den Sternspitzen passt nur ein Wagen *oder* eine Lok. Wie oft muss man beim Gleisdrei- bzw. -fünfstern eine Weiche stellen, um einen Wagen mit Hilfe einer Lok zu wenden? Bringt es Erleichterung, wenn man eine zweite Lok in das „Gleislabyrinth“ schickt? Und schließlich: Wie lauten die Anzahlen allgemein für einen $(2n+1)$-Stern?

Bemerkung: Jede Weiche soll zu Beginn so gestellt sein, wie sie beim ersten Befahren gebraucht wird.

Aufgabe 4

Zwei verschiedene Geraden in der Ebene können sich entweder in keinem oder in einem Punkt schneiden, je nachdem, ob sie parallel sind oder nicht.

Wie viele verschiedene mögliche Schnittpunktanzahlen gibt es für zehn verschiedene Geraden in der Ebene, wenn keine drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen sollen?

Einsendetermin ist der 22. Mai 2006

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112