Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 66

Aufgabe 1

Zehn Schüler nahmen an einem Mathewettbewerb teil. Jede Aufgabe wurde von genau sieben Schülern gelöst. Neun der zehn Schüler lösten jeweils genau vier Aufgaben.

Wie viele Aufgaben hat der zehnte Schüler gelöst?

Aufgabe 2

Für eine bevorstehende große Seeschlacht hat Käpt'n Jakob Sperling 5100 frische Kanonenkugeln besorgt. Davon sind 5000 Stück für die „Dicke Bertha“ und 100 Stück für die praktische kleine Handkanone „Flotte Lotte“. Seine Jungs können es nun nicht lassen und spielen verbotenerweise mit einer zufällig ausgewählten Kugel Bowling auf dem Deck. Dabei wird die Kugel so lädiert, dass sie nicht mehr geradeaus fliegen wird. Die Crew versucht den „Unfall“ zu vertuschen und legt die beschädigte Kugel einfach wieder zu den anderen. Käpt'n Jakob Sperling merkt jedoch natürlich sofort, dass etwas faul ist, und befragt seine Mannschaft. Einer der Piraten behauptet, sie hätten mit einer großen Kugel für die „Dicke Bertha“ gespielt. Der Pirat ist trotz der Unterrichtsstunde im Lügen leider noch kein Profi, denn er lügt bei solchen Angelegenheiten nur in 95 Prozent aller Fälle.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft tatsächlich mit einer Kugel der „Dicken Bertha“ gespielt hat?

Aufgabe 3

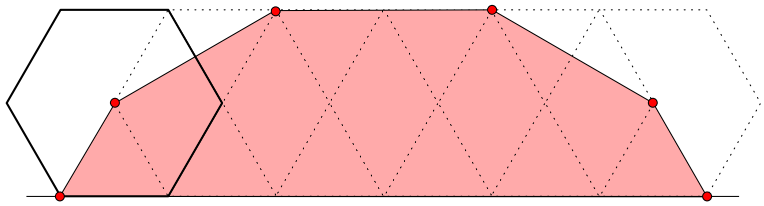
Das Polynom $P(x) = x^2 + x^3 + x^5 + \ldots + x^{97}$ enthält als Summanden alle x-Potenzen mit Primzahlexponenten, die kleiner als 100 sind. Jemand berechnet das Polynom

$$Q(x) = P(x)^4 = a_{387}x^{388} + a_{387}x^{387} + a_{386}x^{386} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Was ist dann der Wert der Summe $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{386} + a_{388}$ der Koeffizienten mit geradem Index?

Aufgabe 4

Ein regelmäßiges Sechseck „rollt“ entlang einer Geraden, indem es fortlaufend über die rechte der beiden auf der Geraden liegenden Ecken gekippt wird. Zu Beginn ist die Position der linken unteren Ecke des Sechsecks markiert. Nach jeder Kippung wird wieder die Position dieser Ecke markiert. Nach fünf solcher Kippungen berührt die betrachtete Ecke zum ersten Mal wieder die Gerade.



Zeige, dass das Flächenstück, das durch die markierten Punkte und die Gerade begrenzt ist, genau dreimal so groß ist wie die Fläche des Sechsecks.

Wie ist das Verhältnis der entsprechenden Flächen bei anderen regelmäßigen n-Ecken? Behandle zunächst die Fälle $n = 3$ und $n = 4$, stelle dann eine Vermutung auf und versuche, diese zu beweisen.

Einsendetermin ist der 10. Dezember 2007

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112