Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Aufgabenblatt 67

Aufgabe 1

Finde alle natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+9}{n-9}$ eine natürliche Zahl ergibt.

Sei allgemeiner k eine natürliche Zahl – bestimme analog die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+k}{n-k}$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2

Zeige, dass die „Jahreswechselzahl“

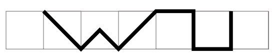
$$111\ldots11222\ldots225,$$

die mit 2007 Einsen und 2008 Zweien und einer Fünf geschrieben wird, eine Quadratzahl ist.

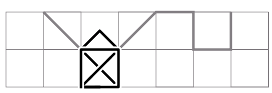
Aufgabe 3

Die Crew um Käpt'n Sperling kreuzt im Nordmeer herum. Einige Schiffe werden gesichtet, doch der Chef bläst nie zum Angriff, was die Crew wundert. Darauf angesprochen, erklärt Sperling: „Seht ihr das hell erleuchtete Haus da hinten auf der Insel? Das ist das Haus vom Nikolaus. Und die meisten Schiffe hier liefern ihm Nachschub für die Weihnachtsgeschenke, bei denen er dem Weihnachtsmann hilft. Ehrensache, dass wir die nicht plündern! Die Schiffe erkennt man übrigens an einem speziellen Flaggentyp: Auf ihr ist ein Streckenzug, dessen einzelne Strecken in der gegebenen Reihenfolge Längen haben, wie sie auch auftreten können, wenn man das bekannte ‚Haus vom Nikolaus‘ zeichnet.“

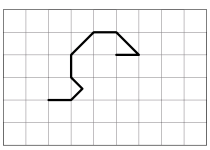
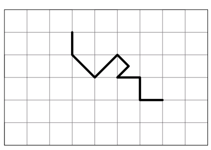
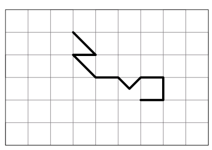
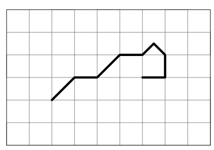
Ein Beispiel für einen Streckenzug, der auf einer echten Flagge abgebildet sein könnte, ist der Folgende:

,

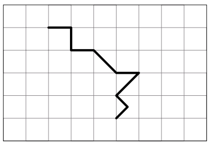
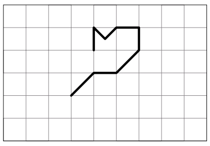
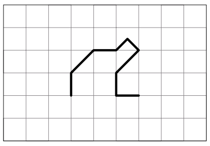
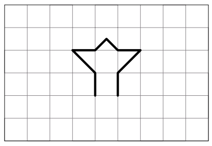
denn durch Umformen des Streckenzuges erhält man:



Welche der folgenden Flaggen sind echt, welche sind Fälschungen?

1:  2:  3:  4: 

Fortsetzung siehe Rückseite!

5:  6:  7:  8: 

Aufgabe 4

Die Funktion f habe die Eigenschaft $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle reellen Zahlen x, y. Zeige, dass f eine konstante Funktion ist.

Einsendetermin ist der 21. Januar 2008

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen

Internet : http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail : zirkel@math.uni-goettingen.de
Telefon : (0551) 379 51 02 oder (0551) 300 112