Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

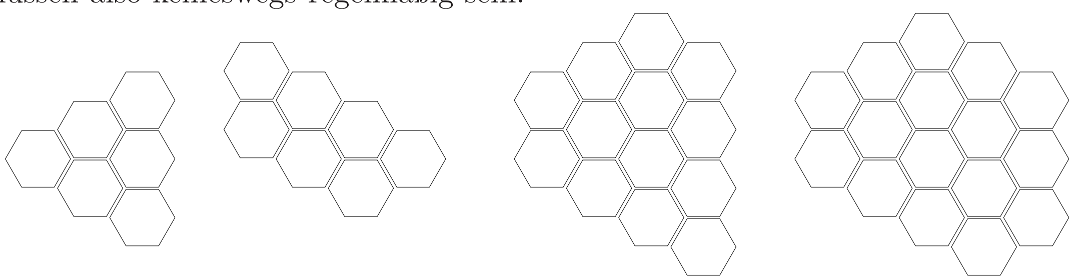
Aufgabenblatt 78

Aufgabe 1

Kora spielt mit ihren regelmäßig sechseckigen Holzplättchen, die sie gerne zu Figuren zusammenlegt. Sie wünscht sich von den Eltern mehr solche Plättchen, und zwar möchte sie insgesamt 78 haben. „Warum genau 78?“, fragt der Vater. „Weil 78 eine *vielseitige* Zahl ist: Man kann mit jeweils 78 Plättchen sowohl ein Dreieck als auch ein Viereck, Fünfeck und ein Sechseck legen!“ „Soso“, brummt der Vater, „ob Du damit mal Recht hast . . . “.

Hat sie Recht?

Um nicht viele Worte dafür zu verlieren, sind hier zur Verdeutlichung je ein Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck aus Sechseckplättchen abgebildet. Die Vielecke müssen also keineswegs regelmäßig sein.



Aufgabe 2

In einem Schloss gibt es viele Zimmer und jedes Zimmer hat einige Türen, die entweder zu anderen Zimmern oder nach draußen führen. Allerdings sind den Baumeistern des Schlosses einige Fehler unterlaufen, so dass man nicht unbedingt alle Zimmer durch Türen erreichen kann (dafür gäbe es dann ja noch Fenster, Kamine, Löcher in den Decken und Fußböden und was man sich sonst alles noch so ausdenken kann). Ein Prinz kommt an das Schloss und sieht, dass es nur eine Eingangstür hat, und an der liest er: „In jedem Zimmer, das eine ungerade Anzahl an Türen hat, ist eine Prinzessin!“

Beweise, dass der Prinz eine Prinzessin finden kann, indem er nur durch Türen geht.

Aufgabe 3

Peter addiert zu seiner Lieblingszahl, der 23, die größtmögliche natürliche Zahl, deren Quadrat nicht größer als 23 ist. Wegen $4^2 = 16$ und $5^2 = 25$ ist das also 4, und er erhält $23 + 4 = 27$. Nun macht er mit der 27 weiter, findet, dass wegen $5^2 = 25 \leq 27$, aber $6^2 = 36 > 27$ die kleinste natürliche Zahl, deren Quadrat nicht größer als 27 ist, die 5 ist, und addiert $27 + 5 = 32$. Dann führt er das Verfahren mit der 32 fort usw.

Zeige, dass Peter irgendwann zu einer Quadratzahl gelangt.

Wenn Peter mit 2009 statt 23 startet, kommt er dann auch irgendwann zu einer Quadratzahl? Wie ist das bei einer allgemeinen Startzahl n?

Aufgabe 4

Anton und Stefan haben Fußballaufkleber der Größe 4 cm mal 8 cm gesammelt und sie auf ein quadratisches Blatt der Seitenlänge 24 cm geklebt, ohne dass Lücken bleiben und ohne dass die Aufkleber sich überlappen. Einige der Aufkleber sind dabei hochkant, andere quer bedruckt und so auch aufgeklebt.

Nach einem Streit wollen sie das Blatt durch einen geraden Schnitt so in zwei (nicht unbedingt gleich große) Teile teilen, dass kein Aufkleber kaputt geht. Ist dies in jedem Fall möglich?

Einsendetermin ist der 11. Mai 2009

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen