

# Matboj

## 3. Treffen des Mathematischen Korrespondenzzirkels 23. November 2002

### 1. *Würfelprojektion*

Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 werde auf einer Ecke balanciert. Wie groß ist die Fläche, die man erhält, wenn man den Würfel in dieser Lage senkrecht nach unten projiziert?

### 2. *Telefonverbindungen oder Strippensalat*

Kann man 77 Telefone so miteinander verbinden, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist?

### 3. *Rechne mit Folgen!*

Es seien  $a_1, a_2$  zwei beliebige Startzahlen. Sie bestimmen rekursiv die Folge

$$a_3 := a_2 - a_1,$$

$$a_4 := a_3 - a_2,$$

$$a_5 := a_4 - a_3,$$

...

Berechne die Summe der ersten 2000 Glieder in dieser Folge!

### 4. *Quadratzahlen*

Starte mit einer natürlichen Zahl, verdopple sie und addiere 1.

Verdopple anschließend diese neue Zahl und addiere wieder 1. Setze dieses Verfahren fort. Wie viele Quadratzahlen kann eine solche Zahlenfolge enthalten?

### 5. *Stammbruchzerlegung*

Kann man die Zahl 1 als Summe von genau 2003 verschiedenen Stammbrüchen schreiben?

### 6. *Teilerfremd?*

Was ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen  $n^2 + 1$  und  $(n + 1)^2 + 1$ , wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist?

### 7. *Ganz gewaltig groß*

Finde eine Lösung der Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ , in der  $a, b, c$  ganzzahlig und größer als 50 sind!

### 8. *Funktionalgleichung*

Welche Funktionen  $f$  erfüllen die Gleichung

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

für alle reellen Zahlen  $x$ ?

9. *Farbwürfel*

Es stehen sechs Farben zur Verfügung. Jede Fläche eines Würfels wird (einfarbig) mit einer anderen Farbe eingefärbt. Wie viele verschiedene Würfel kann man herstellen?

10. *Königstreffen*

Welches ist die kleinste und welches ist die größte Anzahl an Königen, die man auf einem Schachbrett so unterbringen kann, dass sie alle Felder, sich aber nicht gegenseitig bedrohen?

11. *Eine Frage der Zeit*

Wenn man auf dem Ziffernblatt einer Uhr die 1 mit der 8 und die 11 mit der 3 verbindet, welchen Winkel schließen dann die beiden Strecken ein?

12. *Löse nach System!*

Man finde alle reellen Lösungen  $(x, y)$  des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= 1 \\x^3 - y^3 &= 1.\end{aligned}$$

13. *Rendezvous am Gänseliesel*

Pünktchen und Anton haben sich für zwischen elf und zwölf Uhr am Göttinger Gänseliesel verabredet. Jeder kommt irgendwann im Laufe dieser Stunde an; wenn der andere dann nicht innerhalb der nächsten Viertelstunde eintrifft, verlässt er (sie) den Ort.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Pünktchen und Anton tatsächlich treffen?

14. *Halbiert*

Bestimme alle Zahlenpaare  $(x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{Z}$  so, dass  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  gilt.

15. *Verwinkelt*

Sei  $ABCD$  ein Rechteck mit  $|\overline{BC}| = 3 \cdot |\overline{AB}|$ . Seien weiter  $P$  und  $Q$  Punkte auf der Seite  $\overline{BC}$  mit  $|\overline{BP}| = |\overline{PQ}| = |\overline{QC}| = |\overline{AB}|$ . Zeige, dass dann  $\angle CBD + \angle CPD = \angle CQD$  ist.

16. *Partyspaß*

Auf einer Party sind 100 Leute. Unter beliebigen vier von ihnen gibt es eine Person, die mit den drei anderen befreundet ist.

Zeige, dass bis auf höchstens drei Ausnahmen alle Partygäste mit allen anderen befreundet sind.

17. *Donaudampfschiffahrtskapitän*

Ein Schiff der Donaudampfschiffahrtsflotte fährt langsam über den Mittellandkanal. Peter will wissen, wie lang dieses im Norden selten gesehene Schiff ist. Dazu schreitet er (während das Schiff vorwärts dampft) am Ufer vom Ende des Schiffes bis zur Spitze, wofür er 120 Schritte benötigt. Dann geht er umgekehrt von vorn nach hinten. Dazu braucht er 30 Schritte. Wie lang ist das Schiff?

18. *Quadratspalterei*

Jede von neun Geraden zerlege ein Quadrat in zwei Vierecke, deren Flächen sich wie  $2 : 3$  verhalten. Zeige, dass mindestens drei dieser neun Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen!

19. *Die neueste Quizshow*

Eine Quizshow mit  $n$  Teilnehmern geht über mehrere Runden. Vor jeder einzelnen Runde werden unter den verbliebenen Teilnehmern neu Paare ausgelost, die dann gegeneinander antreten müssen. Bei jedem dieser Duelle wird ein Sieger ermittelt, es gibt kein Unentschieden. Sollte die Teilnehmeranzahl einmal ungerade sein, erhält ein Teilnehmer für diese Runde ein Freilos.

Nach jeder Runde scheiden alle Teilnehmer aus, die mindestens 3 Niederlagen erlitten haben. Es wird so lange gespielt, bis ein Sieger feststeht.

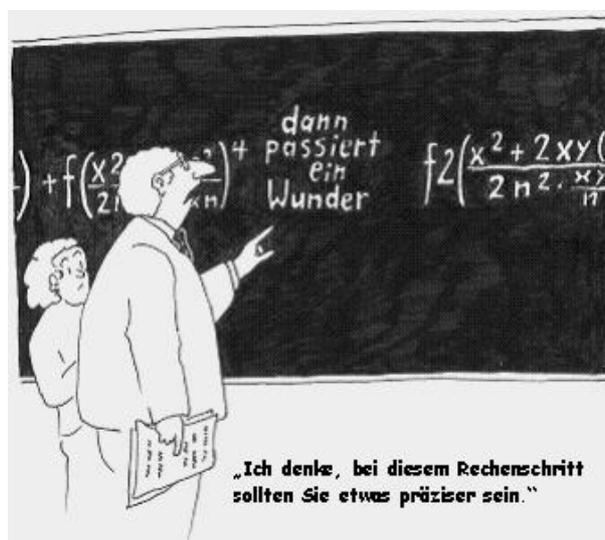
Welche Möglichkeiten gibt es für die Gesamtanzahl der Duelle in der Quizshow?

20. *Die Wilde 13*

Gegeben seien sechs nebeneinander stehende Felder. Anna schreibt in eines der Felder eine der Ziffern von 0 bis 9, danach füllt Bernd ein noch nicht belegtes Feld auf dieselbe Weise usw.

Bernd gewinnt, wenn die nach sechs Schritten aus den Ziffern der Felder gebildete Zahl durch 13 teilbar ist, ansonsten gewinnt Anna.

Wer hat eine Gewinnstrategie?



aus: <http://www.tu-bs.de/schulen/lg-bs>

