Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 2

Aufgabe 1

Auf einer Insel sind vier Seeräuber mit einem Schatz aus Goldmünzen gestrandet. Sie beschließen, diesen unter sich aufzuteilen, stellen aber fest, dass dies so nicht geht, weil die Anzahl der Münzen nicht durch 4 teilbar ist. In der Nacht steht nun heimlich einer der Räuber auf, steckt eine Münze ein und kann sich danach genau ein Viertel des Restschatzes nehmen. Damit verschwindet er von der Insel. Kurz darauf erwacht auch der zweite Räuber, ohne den ersten bemerkt zu haben. Auch er muss erst eine Münze entfernen und einstecken, kann danach aber genau ein Viertel des Restschatzes an sich nehmen und heimlich verschwinden. Ebenso passiert es mit Räuber drei und vier, jeder muss erst eine Münze entfernen, bevor er vom Restschatz sein Viertel nehmen kann. Jeder der Räuber glaubt also, etwas mehr als ein Viertel des Schatzes bekommen und seinen schlafenden Kumpanen den Rest zurückgelassen zu haben. Am nächsten Morgen besteht der Schatz noch aus 78 Goldmünzen. Wieviele Münzen waren es ursprünglich?

Zusatzaufgabe: Wären es fünf Räuber gewesen, die auch jeweils eine Münze, dann aber immer ein Fünftel des Schatzes genommen hätten, was wäre dann die kleinste mögliche Anzahl von Münzen im ursprünglichen Schatz?

Lösung:

Die eigentliche Aufgabe war durch Rückwärtsrechnen lösbar: Der letzte Räuber lässt 78 Münzen übrig. Diese entsprechen drei Vierteln der Anzahl an Münzen, die er glatt teilen konnte (das waren also $\frac{4}{3} \cdot 78 = 104$), und um überhaupt glatt teilen zu können, hatte er eine Münze entfernen müssen, also fand er $104 + 1 = 105$ Münzen vor. Entsprechend fanden der dritte Räuber $\left(\frac{4}{3} \cdot 105\right) + 1 = 141$, der zweite $\left(\frac{4}{3} \cdot 141\right) + 1 = 189$ und der erste Räuber $\left(\frac{4}{3} \cdot 189\right) + 1 = 253$ Münzen vor. Es waren also ursprünglich 253 Münzen in dem Schatz.

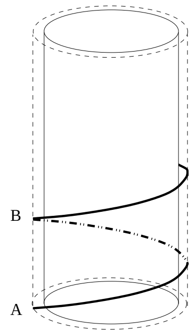
In der Zusatzaufgabe war nun gefordert, eine Anzahl Münzen zu finden, die fünf Räuber unter sich auf die gleiche Weise aufteilen würden, das heißt, dass jeder der fünf erst einmal eine Münze entfernen muss, bevor er den (Rest-) Schatz glatt aufteilen kann. Weil die Anzahl an Münzen damit noch nicht eindeutig bestimmt ist (denn man kann beliebig oft noch eine Anzahl Münzen dazutun, die bei der Räuber-Teilung jedesmal ohne Rest aufgeteilt werden kann, [zum Beispiel 5^5; man kann sich sogar überlegen, dass dafür genau die Vielfachen von 5^5 geeignet sind]), war zusätzlich gefordert, die Anzahl zu finden, die den kleinsten Rest übrig lässt (was natürlich gleichbedeutend damit ist, die kleinstmögliche Anfangsanzahl zu finden). Der naheliegendste Lösungsansatz ist, auch hier rückwärts zu rechnen. (Später kommt noch eine elegantere Variante.) Es bleibe also eine Anzahl r an Münzen übrig. Dann hat der

letzte Räuber $\frac{5}{4}r + 1 = \frac{5r+4}{4}$ Münzen gefunden, der vierte $\frac{5}{4}\left(\frac{5r+4}{4}\right) + 1 = \frac{5^2r+5\cdot4+4^2}{4^2}$, der dritte $\frac{5^3r+5^2\cdot4+5\cdot4^2+4^3}{4^3}$, der zweite $\frac{5^4r+5^3\cdot4+5^2\cdot4^2+5\cdot4^3+4^4}{4^4}$ und der erste $\frac{5^5r+5^4\cdot4+5^3\cdot4^2+5^2\cdot4^3+5\cdot4^4+4^5}{4^5} = \frac{5^5r+4\cdot2101}{4^5}$. Jetzt muss man also das r so bestimmen, dass $5^5r + 4 \cdot 2101$ durch 4^5 teilbar ist.
Weil 5^5 nicht durch 4 teilbar ist, muss $r = 4s$ mit einem ungeraden s sein. Nun könnte man für s der Reihe nach 1, 2, 3, 4 usw. einsetzen und feststellen, dass (erst!) $s = 255$ eine Lösung ist. Es geht aber etwas einfacher, wenn man sich die letzte Teilaufgabe umformt:
$4^5 = 1024$ teilt $5^5r+4\cdot2101 = 3125\cdot4s+4\cdot2101 = (12\cdot1024+4\cdot53)s+8\cdot1024+4\cdot53$
$\iff$ 4^5 teilt $4 \cdot 53s + 4 \cdot 53$
$\iff$ 4^4 teilt $53s + 53$
$\iff$ 4^4 teilt $s + 1$.
Daher ist das kleinste (positive) s, das eine Lösung ist: $s = 4^4 - 1 = 255$. Es folgt $r = 4 \cdot 255 = 1020$, das ist also die kleinste mögliche Anzahl an übrigbleibenden Münzen im Schatz. Am Anfang waren dann übrigens $\frac{3125\cdot1020+4\cdot2101}{1024} = 3121$ Münzen vorhanden.

Nun noch die elegante Methode: Es kann einem auffallen, dass bei der ersten Aufgabe gilt: $253 = 4^4 - 3$ sowie $78 = 3^4 - 3$. Also könnte man auf die Idee kommen, dass man bei fünf Räubern ähnliche Zahlen, namentlich $5^5 - 4 = 3121$ und $4^5 - 4 = 1020$ herausbekommt. Daher rechne man jetzt nicht mit r, sondern mit $\tilde{r} := r + 4$. (Es sollen also am Schluss $\tilde{r} - 4$ Münzen übrigbleiben.) Dann hat der fünfte Räuber $\frac{5}{4}(\tilde{r}-4)+1 = \frac{5}{4}\tilde{r}-1$ Münzen vorgefunden. Entsprechend der vierte $\frac{5^2}{4^2}\tilde{r} - 4$, der dritte $\frac{5^3}{4^3}\tilde{r} - 4$, der zweite $\frac{5^4}{4^4}\tilde{r} - 4$ und der erste $\frac{5^5}{4^5}\tilde{r} - 4$. Hier sieht man sofort, dass die kleinste Lösung $\tilde{r} = 4^5 = 1024$ ist. Die kleinste Restmünzenanzahl ist also wie vermutet $1024 - 4 = 1020$.

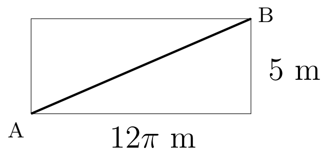
Aufgabe 2

Am Göttinger Fernsehturm soll eine Wendeltreppe installiert werden, auf der man außen am Turm hinauflaufen kann. Der Turm ist bekanntlich 100 m hoch, und die Treppe soll einen konstanten Anstieg haben und den Turm, der einen Durchmesser von 10 Metern hat, genau 20-mal umkreisen. Wenn ein Läufer auf der fertiggestellten Treppe in einem Meter Abstand von der Turmwand nach oben geht, welchen Weg legt er dann dabei zurück?



Lösung:

Da die Treppe den Fernsehturm auf seiner vollen Höhe von 100 m genau zwanzig Mal umrundet, umrundet sie ihn auf $\frac{100\text{ m}}{20} = 5$ m genau einmal. Da der Durchmesser des Turmes 10 m beträgt und der Läufer in einem Meter Abstand die Treppe hochlaufen soll, liegt sein Weg auf einem Zylinder mit dem Durchmesser $(1 + 10 + 1)$ m. Nun stelle man sich vor, daß man ein fünf Meter hohes Teilstück dieses Zylinders aufschneiden und abrollen kann. Man erhält so ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 12\pi$ m und $b = 5$ m. Zeichnet man noch den Weg des Läufers auf der Treppe ein, so erhält man ihn als Diagonale in dem Rechteck.



Nach dem Satz des Pythagoras ($c^2 = a^2 + b^2$) berechnet man die Strecke c des Läufers auf diesem 5 m hohen Teilstück. Die Gesamtstrecke s des Läufers beträgt dann $s = 20c$.

$$c^2 = 5^2 + (12\pi)^2$$

bzw.

$$\begin{aligned} s &= 20c = 20\sqrt{25 + (12\pi)^2} \\ \Rightarrow s &\approx 760{,}58. \end{aligned}$$

Der Läufer legt auf seinem Weg nach oben also 760,58 m zurück.

Die zurückgelegte Wegstrecke ist also abhängig von der Höhe des Turms. Einige Einsender hatten das fälschlicherweise nicht berücksichtigt und so getan, als wäre die Strecke genau so lang, wenn der Läufer 20-mal unten um den Turm läuft. Die Länge dieser Strecke beträgt ca. 753 Meter, und das Ergebnis würde sich nicht ändern, wenn die Treppe 20-mal um einen Turm der (gedachten) Höhe von 1000 Meter führt. Das hieße aber, dass man auf der Treppe schneller nach oben käme als auf direktem Wege senkrecht an der Wand hoch, was nicht sein kann.

Aufgabe 3

Es gibt natürliche Zahlen, die gleich der Summe der dritten Potenzen ihrer Ziffern sind. So ist zum Beispiel 153 eine solche Zahl, weil $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27$ ist.

a) Zeige, dass es außer der Zahl 1 keine natürliche Zahl gibt, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern ist.

b) Finde alle natürliche Zahlen, die gleich der Summe der dritten Potenzen ihrer Ziffern sind!

Hinweis: Man kann zunächst versuchen zu zeigen, dass solche Zahlen nur wenige Stellen haben können. Danach kann man zum Beispiel systematisch probieren. Auch der Einsatz eines Computers kann hilfreich sein.

Lösung:

a) Wenn man anfängt zu probieren, stellt man bald Folgendes fest: Für die meisten Zahlen ist die Summe der Quadrate der Ziffern kleiner als die Zahl selber. Zum Beispiel ist $1^2+3^2 = 10 < 13$, $3^2+9^2+6^2 = 126 < 396$. Nur für „wenige" Zahlen ist es anders, ein Beispiel ist $3^2 + 8^2 = 73 > 38$. Die Idee besteht nun darin zu beweisen, dass ab einer bestimmten natürlichen Zahl n alle Zahlen, die größer sind, die erste Eigenschaft haben. Dann wäre klar, dass keine Zahl größer als n gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern

ist. Die Zahlen kleiner als n probiert man einzeln durch, z. B. mit einem Computer. Auch ohne Computer ist dies mit vertretbarem Zeitaufwand möglich, wenn man dabei noch Hilfsüberlegungen anstellt, mit denen man jeweils einige Fälle gleichzeitig bearbeiten kann.
Für vierstellige natürliche Zahlen x gilt: $x \geq 1000$. Außerdem ist jede Ziffer von x eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots 9$. Die Summe s der Quadrate der Ziffern ist also höchstens $4 \cdot 9^2 = 324$ und damit immer kleiner als 1000.
Allgemein gilt so für eine Zahl x mit m Stellen: $10^{m-1} \leq x$, für die Summe s der Quadrate der Ziffern gilt $s \leq m \cdot 9^2$. Und für $m \geq 4$ gilt[1]:

$$m \cdot 9^2 < 10^{m-1}$$

und damit $s < x$. Also kann bei keiner vier- oder mehrstelligen Zahl die Summe der Quadrate der Ziffern gleich der Zahl selber sein. Die Zahlen kleiner 1000 probiert man einzeln durch. Wenn man noch bedenkt, dass $3 \cdot 9^2 = 243$ ist, braucht man also nur die Zahlen bis 243 zu testen (Warum?). Dabei stellt man fest, dass nur bei der Zahl 1 die Forderung erfüllt ist.

b) Hier geht man völlig analog vor. Für $m \geq 5$ gilt:

$$m \cdot 9^3 < 10^{m-1}$$

Fünf- und mehrstellige Zahlen können somit nicht gleich der Summe der Kuben ihrer Ziffern sein. Beachtet man noch $4 \cdot 9^3 = 2916$, so reicht es, alle Zahlen kleiner 2916 durchzutesten. Man stellt fest, dass die Bedingung genau für die fünf Zahlen

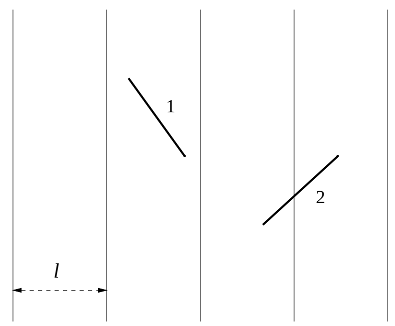
$$1, 153, 370, 371 \text{ und } 407$$

erfüllt ist, z. B. ist $3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370$.

Aufgabe 4

Benötigt werden nur ein Blatt Papier, ein Bleistift und ein Streichholz bzw. eine Nadel oder ein ähnlich geformter Gegenstand. Zur Vorbereitung messe man die Länge l des Streichholzes und male auf das ganze Blatt Papier ein Gitter der Breite l, wie es im Bildchen zu sehen ist.

Man werfe das Streichholz nun zufällig einige hundert Mal auf das Gitter, und notiere sich dabei, ob das Streichholz eine Linie getroffen hat (Bsp.: Position 2) oder die Linien verfehlt hat (Bsp.: Position 1). „Zufällig“ soll hierbei bedeuten, dass man das Streichholz aus einer gewissen (nicht zu großen) Höhe fallen lässt, ohne dabei irgendeine Ausrichtung oder Position zu bevorzugen.



[1] Für Interessierte der Beweis durch Induktion: Induktionsanfang für $m = 4$: $4 \cdot 9^2 = 324 < 1000 = 10^{4-1}$; Induktionsschritt: $(m+1) \cdot 9^2 < 10^{m-1} + 9^2$ (Ind.-Voraussetzung) $< 10^{m-1+1}$ (da $9^2 = 81 < 10^{m-1}$ für $m \geq 3$)

Hat man nun insgesamt N-mal geworfen und dabei T-mal eine Linie getroffen, so berechne man die relative Trefferhäufigkeit

$$p = \frac{T}{N}$$

Nach genügend vielen Würfen (es sollten durchaus einige hundert sein) sollte diese sich nicht mehr groß ändern. Dann berechne man einmal den Ausdruck

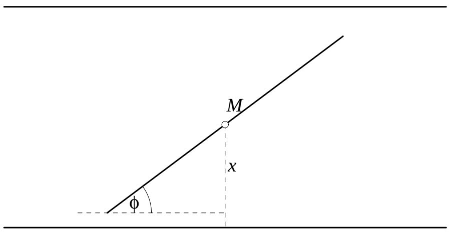
$$\alpha = \frac{2}{p}$$

und stelle eine Vermutung an, welcher (bekannte) Wert sich hinter diesem α verbergen könnte! Wie könnte man diese Vermutung beweisen, oder womit könnte das Ergebnis zusammenhängen?

Vornweg: Die Aufgabe (bzw. das Ergebnis) ist als *Buffons Nadelproblem* bekannt und wird gelegentlich im Rahmen von Kursen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Oberstufe am Gymnasium oder auch an der Uni gestellt. Das Ergebnis ist recht verblüffend und wird meist mit Hilfe der Integralrechnung bewiesen (wie es auch einige der älteren Einsender taten). Es gibt jedoch auch einen Beweis, der ohne solche „komplizierten“ Hilfsmittel auskommt und auch für jüngere Schüler verständlich sein sollte. Im Folgenden werden beide vorgestellt:

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Linie trifft, ist $p = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}63662$. Damit ist dann $\alpha = \frac{2}{p} = \pi \approx 3{,}14159265$.

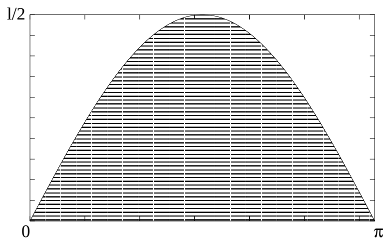
Beweis 1: Die möglichen Positionen der Nadel kann man durch zwei Parameter beschreiben: den Abstand x des Mittelpunktes M der Nadel zu den Gitterlinien (und zwar den minimalen) und den Winkel ϕ, um den die Nadel dazu aus der Parallellage im Gitter gedreht ist.



Hierbei kann x alle Werte zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ und ϕ alle Werte zwischen 0 und π (also zwischen 0° und 180°) annehmen. Welches sind nun die Parameter, bei denen die Nadel eine Linie trifft? Obigem Bild folgend trifft die Nadel genau dann eine Linie, wenn

$$x \leq \sin\phi \cdot \frac{l}{2} \tag{1}$$

ist. Man kann sich diese Bedingung auch in einem Koordinatensystem veranschaulichen.



Die schraffierte Fläche unter der Sinuskurve kennzeichnet dabei genau die Punkte, die (1) erfüllen. Geht man nun davon aus, dass wirklich jeder dieser Punkte gleich wahrscheinlich ist (dass also jeder mögliche Winkel und jeder mögliche Abstand unabhängig voneinander gleich wahrscheinlich sind), so ist die gesuchte Trefferwahrscheinlichkeit gerade der Anteil der schraffierten Fläche an der Gesamtfläche. Hier kommt nun die Integration ins Spiel...

$$p = \frac{\text{Fläche}_{\textit{schraffiert}}}{\text{Fläche}_{\textit{gesamt}}} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin\phi \; d\phi}{\frac{l}{2} \cdot \pi} = \frac{-\cos\phi|_0^\pi}{\pi} = \frac{2}{\pi} \tag{2}$$

Und nun der Beweis, der ohne Integration auskommt:
Beweis 2: Hierbei werfe man zunächst eine Nadel beliebiger Länge L auf das Gitter der Breite l. Dabei kann die Nadel das Gitter nun durchaus auch mehrfach treffen. Sei X die Anzahl der Schnittpunkte bei einem Wurf. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_0 trifft die Nadel keine Linie (in Formeln: $P(X=0)=p_0$), mit einer anderen Wahrscheinlichkeit p_1 trifft die Nadel genau eine Linie (in Formeln: $P(X=1)=p_1$) usw. Wieviele Schnittpunkte erwartet man nun durchschnittlich pro Wurf? Dies gibt gerade der sogenannte *Erwartungswert*

$$E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + ... = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ... \left(= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot k \right) \tag{3}$$

wieder.[2]

Für unsere Nadel, die ja genau so lang ist, wie das Gitter breit ist, gilt $0 = p_2 = p_3 = ...$, da ja nie mehr als ein Schnittpunkt auftreten kann. Hier ist also der Erwartungswert $E(X) = p_1$ gerade die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Um diese berechnen zu können, müssen wir einen kleinen „Umweg“ machen. Dabei ist es nötig, beliebig gebogene Drähte (die man sich als aus vielen kleinen Nadeln zusammengesetzt vorstellen kann) auf das Gitter zu werfen. Die Schritte auf dem Weg dahin sind in folgenden Punkten zusammengefasst:

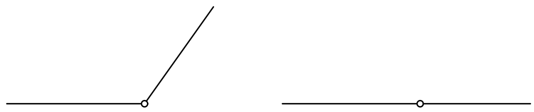
- Der Erwartungswert $E(X)$ ist abhängig von der Länge L der Nadel, also eine Funktion von L. Man kann dies als $E(X) = E(L)$ schreiben. Ebenso sollte klar sein, dass $E(L)$ eine monoton steigende Funktion ist, also je länger die Nadel, umso höher der Erwartungswert für die Trefferzahl.

- Man betrachte nun zwei Nadeln der Längen L_1 und L_2, die man getrennt auf das Gitter wirft, und X_1 und X_2 seien wie bisher die Anzahlen der Schnittpunkte eines Wurfes. Will man nun die Summe der Treffer bei beiden Nadeln betrachten, so ist es sicher nicht schwer, die Formel

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

[2] Man überlege sich dies am Beispiel des Würfelwurfs X. Hierbei gibt es die sechs möglichen Ergebnisse $X = 1$ bis $X = 6$ und für jedes mögliche k ist $P(X = k) = \frac{1}{6}$. Der Erwartungswert hierfür ist also gerade $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + ... + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5$. Im Mittel erwartet man also das Ergebnis 3,5.

zu glauben. Die Zahl, die man im Mittel als Trefferanzahl pro Wurf mit beiden Nadeln erwartet, ist sicher gerade die Summe der einzelnen Erwartungswerte. Etwas mehr Überlegung muss man investieren, um Folgendes einzusehen: Die letzte Formel gilt auch noch, wenn man die beiden Nadeln nicht getrennt wirft, sondern an ihren Enden starr verbindet, ganz egal wie – ob im Winkel oder gestreckt.



Eine mögliche Argumentation hierfür wäre: Beim Werfen und anschließenden Auswerten beachte man die jeweils andere Nadel einfach nicht, man betrachte sie als „Anhängsel". Damit sollte es zunächst egal sein, ob man die Nadeln einzeln nacheinander oder zusammengeklebt zweimal wirft und dabei jeweils nur eine der Nadeln beachtet. Im letzten Schritt muss man sich klarmachen, dass der Erwartungswert sich dann auch nicht mehr ändert, wenn man die Trefferzahlen der beiden Nadeln sofort bei nur einem Wurf auswertet. (Diesen Sachverhalt – Linearität des Erwartungswertes – kann man ganz allgemein beweisen. Hier sollte diese Argumentation aber genügen.)

- Aus der letzten Überlegung folgt nun für die Abhängigkeit von den Längen:

$$E(L_1 + L_2) = E(L_1) + E(L_2). \tag{4}$$

Wenn dies für zwei Nadelstücke gilt, so sicher auch für jede beliebige Anzahl n:

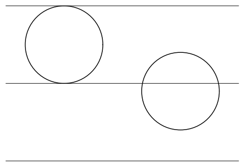
$$E(L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n) = E(L_1) + E(L_2) + ... + E(L_n)$$

Noch einmal: Letztere Formel gilt für n Nadeln der entsprechenden Längen, die irgendwie zu einem Streckenzug verbunden wurden. Die einzigen Funktionen E, die sowohl monoton sind als auch die Gleichung (4) erfüllen, sind die sogenannten *linearen Funktionen*[3]

$$E(L) = c \cdot L \tag{5}$$

mit einer Konstanten c. Der Trick besteht nun darin, dass man mit beliebig vielen kurzen Nadeln einen Kreis mit Durchmesser l beliebig genau annähern kann. Für diesen muss also auch die Formel (5) gelten. Hier kennt man aber sowohl $L = \pi \cdot l$, als auch $E = 2$, denn egal wie man einen Kreis mit Durchmesser l auch auf das Gitter wirft, er trifft die Linien stets genau zweimal.

[3]Beweis: Setzt man $f(1) =: c$, so gilt $f(2) = f(1) + f(1) = 2c$, $f(3) = 3c$ und allgemein $f(k) = k \cdot c$. Für Brüche folgt dann: $n \cdot f(\frac{m}{n}) = f(m) = m \cdot c$, also $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} \cdot c$. Damit gilt $f(x) = c \cdot x$ für alle positiven rationalen Zahlen. Für die negativen folgt es wegen $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ (weil $f(0) + f(0) = f(0)$). Aus der Monotonie folgt dann, dass f keine „Sprünge" machen darf, also $f(x) = c \cdot x$ für alle reellen Zahlen.



Der Erwartungswert ist also genau 2. Setzt man dies in Formel (5) ein, so folgt:

$$2 = c \cdot l \cdot \pi$$

bzw.

$$c = \frac{2}{l\pi}$$

Die allgemeine Formel ist also

$$E(L) = \frac{2}{l\pi} \cdot L$$

Für unser Ausgangsproblem mit nur einer Nadel der Länge l erhält man damit

$$p = E(l) = \frac{2}{\pi} \tag{6}$$

Nachwort: Einige von euch haben erkannt, dass der berechnete Wert α ungefähr π war. Bei vielen gab es aber recht große Abweichungen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da es sich ja immer nur um Wahrscheinlichkeiten handelt. Man muss schon sehr häufig werfen, damit sich die Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit gut annähert. Nimmt man alle eure Würfe zusammen – 4179 Stück – so gab es 2724 Treffer. Damit erhält man den Wert

$$\alpha \approx 3{,}068.$$

Auch dieser erinnert noch nicht unbedingt an π. Es gibt aber zum Beispiel Computerprogramme, die das Werfen simulieren. Mit diesen erhält man ganz gute Werte für π.