Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1

Statistiken besagen, dass unter 1000 Menschen 35 zu hohen Blutdruck haben. Außerdem trinken 80% der Menschen mit hohem Blutdruck und 60% der Menschen ohne hohen Blutdruck regelmäßig Alkohol. Wieviel Prozent der regelmäßigen Trinker haben zu hohen Blutdruck?

Die **Lösung** stammt u. a. von Manuel Hohmann und Robert Kühne:
Von 1000 Menschen haben 35 zu hohen Blutdruck, 965 nicht.
80 Prozent derjenigen mit hohem Blutdruck trinken, das sind 28 Personen.
60 Prozent derjenigen ohne hohen Blutdruck trinken ebenfalls, das sind 579 Personen.
Zusammen trinken also 607 Personen regelmäßig.
Da von diesen 28 zu hohen Blutdruck haben, entspricht das

$$\frac{28}{607} \cdot 100 \approx 4{,}61\,\%.$$

Die gesuchte Zahl ist also 4,61 Prozent.

Aufgabe 2

In den natürlichen Zahlen (d. h. 1, 2, 3, 4,...) kann man mit Rest dividieren, z. B. 14 : 5 = 2 Rest 4, man sagt „14 lässt bei Division durch 5 den Rest 4“. Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, ... und durch 10 den Rest 9 lässt?

Behauptung: Die gesuchte Zahl ist 2519.

Beweis: Das kleinste gemeinsame Vielfache von n ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist die kleinste positive ganze Zahl, die durch jede der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ohne Rest teilbar ist. Wir schreiben für diese Zahl $\mathrm{kgV}(x_1, \ldots, x_n)$.

Da $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$ gerade ohne Rest durch 2, 3, 4, 5, $\ldots$, 9, 10 teilbar ist, lässt 2519 bei Division durch k, wie gefordert, den Rest $k - 1$ für jede der Zahlen $k = 2, 3, \ldots, 9, 10$.
Und dies ist auch die kleinste derartige Zahl, denn: Sei n eine positive ganze Zahl, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 6, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8 und durch 10 den Rest 9 lässt.
Dann ist $n+1$ durch $2, 3, 4, 5, \ldots, 9, 10$ jeweils ohne Rest teilbar (d.h. mit Rest 0), muss also größer/gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen sein. Also ist 2519 tatsächlich die kleinste derartige Zahl.

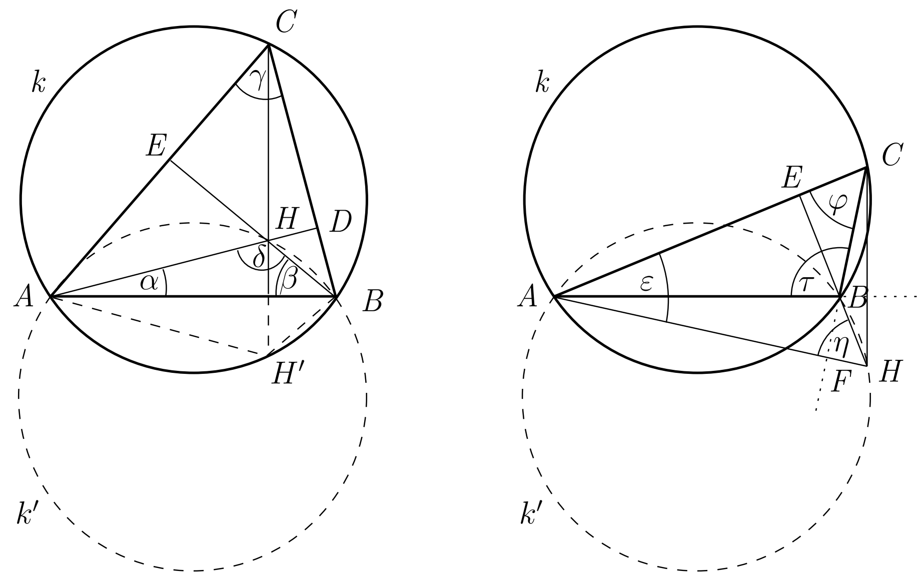
Aufgabe 3

Gegeben seien ein Kreis k und zwei verschiedene Punkte A und B auf k. Man bestimme den geometrischen Ort aller Höhenschnittpunkte von Dreiecken ABC, deren dritter Eckpunkt C auf dem Kreis k variiert!

Hinweis: Unter „geometrischem Ort“ ist Folgendes zu verstehen: Man wähle sich einige Male auf k einen Punkt C und konstruiere den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC. Macht man dies für immer mehr Punkte C, so bekommt man auch immer mehr Punkte H. Alle diese Punkte H bilden eine geometrische Figur, die man auch „geometrischen Ort“ nennt.

Lösung: Behauptung: Der geometrische Ort der Höhenschnittpunkte ist der Kreis k', der aus k durch Spiegelung an der Geraden (AB) entsteht.

Beweis: Im linken Bild sei C ein beliebiger Punkt auf k so, dass das Dreieck ABC nicht spitzwinklig ist, und H der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks.



Mit den Winkelbezeichnungen in der Skizze gilt dann:

$$\text{Im Dreieck } ABD: \quad \alpha + \angle CBA + 90° = 180° \quad \Rightarrow \alpha = 90° - \angle CBA$$
$$\text{Im Dreieck } ABE: \quad \beta + \angle BAC + 90° = 180° \quad \Rightarrow \beta = 90° - \angle BAC$$

Daraus folgt, dass im Dreieck ABH gilt:

$$\delta + \alpha + \beta = 180°$$

$$\Rightarrow \delta = 180° - (90° - \angle CBA) - (90° - \angle BAC) = \angle CBA + \angle BAC$$

Wegen $\angle CBA + \angle BAC = 180° - \gamma$ folgt also schließlich:

$$\delta = 180° - \gamma$$

Nach der Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck[1] gilt dann, dass H', der an (AB) gespiegelte Punkt H, auf dem Kreis k liegen muss (siehe Bild). Anders ausgedrückt heißt das, dass H auf dem Kreis k' liegt, der aus k durch Spiegelung an (AB) hervorgeht.

Sei nun das Dreieck ABC stumpfwinklig mit stumpfem Winkel bei B (für den Fall, dass der stumpfe Winkel bei A liegt, funktioniert die Argumentation genau entsprechend) – siehe dazu die rechte Skizze. Hier gilt:

$$\begin{aligned} \text{Im Dreieck } AFC: &\quad \varphi + \varepsilon + 90^\circ = 180^\circ &&\Rightarrow \varphi = 90^\circ - \varepsilon \\ \text{Im Dreieck } AHE: &\quad \varepsilon + \eta + 90^\circ = 180^\circ &&\Rightarrow \eta = 90^\circ - \varepsilon = \varphi. \end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt folglich H auf einem Kreis, der durch A und B verläuft und den gleichen Radius wie der Umkreis des Dreiecks ABC hat. Aus den Lagebeziehungen folgt, dass dies nicht k selbst sein kann, also liegt H wiederum auf k'.

Für den dritten und letzten Fall, dass nämlich das Dreieck bei C einen stumpfen Winkel hat, kann man wieder die linke Skizze verwenden: Man denke sich C am Ort von H' liegend und dazu das Dreieck ABC mit seinen Höhen an (AB) gespiegelt. Das Bild von C ist dann offenbar der Höhenschnittpunkt, und dieser liegt erneut auf k'.

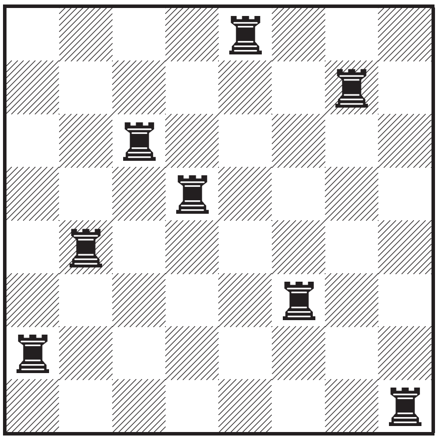
Man erkennt somit insgesamt, dass der Höhenschnittpunkt in jedem Fall auf die gleiche Art bestimmt werden kann, nämlich durch die Verschiebung von C um eine feste Strecke senkrecht zu (AB). Da C alle Punkte auf k einnehmen kann, wird von den Höhenschnittpunkten auch jeder Punkt von k' erreicht. (Wenn man es genau nimmt, müssten wir zwei Punkte auslassen: diejenigen, die entstehen, wenn man A bzw. B verschiebt, weil das Dreieck dann entartet wäre. Das wollen wir dieses Mal aber der Schönheit der Lösung wegen zulassen.)

Aufgabe 4

Man kann auf einem Schachbrett acht Türme so aufstellen, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen, zum Beispiel wie in folgendem Bild:
Man versuche zu beweisen, dass man nicht mehr als acht Türme so auf einem Schachbrett platzieren kann, dass sie sich nicht gegenseitig bedrohen!
Außerdem finde man (mit Begründung!) für jede der Schachfiguren Dame, Läufer, König und Springer jeweils die maximale Anzahl N, für die man N derartige Figuren auf einem Schachbrett platzieren kann, ohne dass sie sich gegenseitig bedrohen.

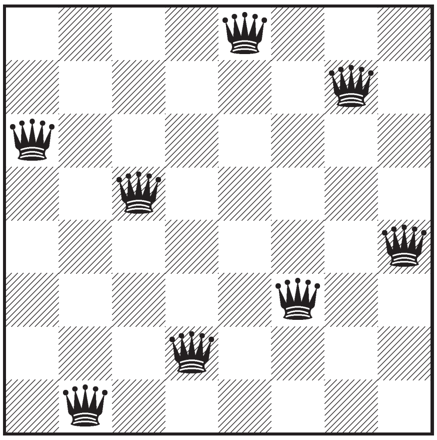
Hinweis: Ein Turm bedroht alle Felder derselben Zeile und derselben Spalte, eine Dame alle Felder derselben Zeile, Spalte und Diagonalen. Ein Läufer bedroht alle Felder derselben Diagonalen. Ein König bedroht alle (maximal acht) direkt benachbarten Felder. Der Springer schließlich bedroht alle von ihm aus

[1]Ist in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel 180°, so handelt es sich um ein Sehnenviereck (also ein Viereck, dessen vier Ecken alle auf einem Kreis liegen).

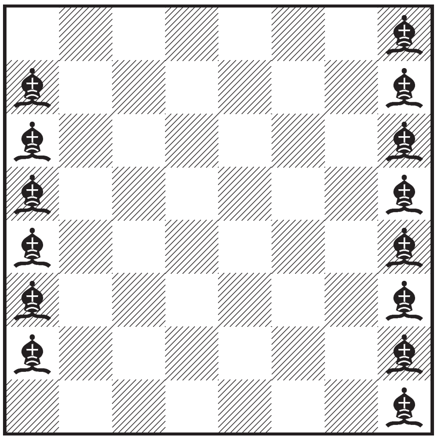


im Rösselsprung erreichbaren Felder („Zwei vor/zurück, eins zur Seite“ oder „Eins vor/zurück, zwei zur Seite“).

Lösung: Es lassen sich maximal jeweils acht Damen, acht Türme (wie gesagt), 14 Läufer, 16 Könige und 32 Springer so aufstellen, dass sie sich nicht gegenseitig bedrohen.
Dass sie sich so aufstellen lassen, sieht man an den unten folgenden Darstellungen sowie an der in der Aufgabenstellung.
Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe gehört allerdings auch noch zu zeigen, dass dies jeweils die *maximal* mögliche Zahl ist. Bei den *Türmen* und *Damen* ist dies recht einfach: Jede dieser Figuren bedroht eine komplette Spalte, in jeder Spalte darf daher maximal eine Figur stehen, und es gibt genau acht Spalten, also kann man maximal acht dieser Figuren unterbringen.



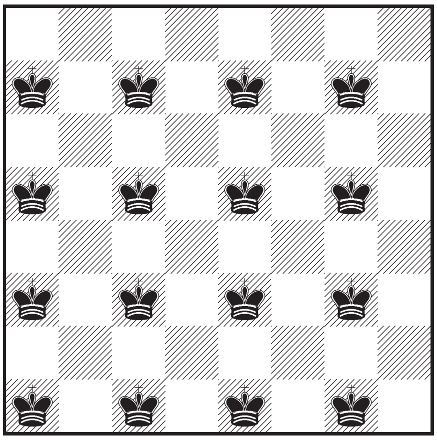
8 Damen ohne Bedrohung



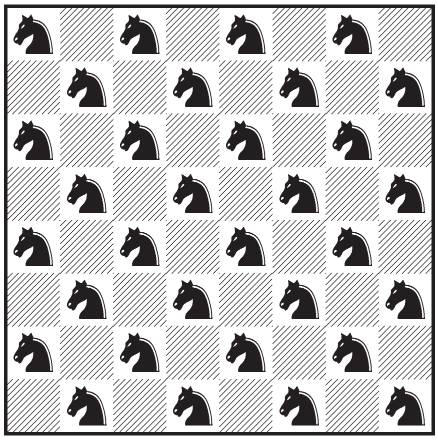
14 Läufer ohne Bedrohung

Bei den *Läufern* muss man die Diagonalen einer Richtung betrachten, zum Beispiel die Diagonalen von links unten nach rechts oben. Davon gibt es genau 15 (die beiden, die aus nur einem Feld bestehen, müssen mitgezählt werden). Jeder Läufer bedroht in jeder Richtung genau eine Diagonale komplett. Das heißt schon einmal, dass man nicht mehr als 15 Läufer unterbringen kann. Nun ist es aber so, dass ein Läufer, der auf einer der äußeren (nur ein Feld langen) Diagonalen steht, über die lange Diagonale in der anderen Richtung auch die andere äußere Diagonale vollständig bedroht. Daher kann man maximal 14 Läufer so auf dem Brett unterbringen, dass sie sich nicht gegenseitig bedrohen.

Um sich die Situation bei den Königen klar zu machen, denke man sich das Brett in 16 Teilbretter der Größe 2×2 unterteilt. Auf jedem dieser Teilbretter kann maximal ein König stehen, da er dann alle restlichen drei Felder bedroht, also können insgesamt höchstens 16 Könige auf dem Schachbrett stehen.



16 Könige ohne Bedrohung



32 Springer ohne Bedrohung

Am trickreichsten ist der Nachweis bei den Springern, obwohl es recht einfach ist festzustellen, dass sich die 32 gezeigten Springer nicht bedrohen, da sie alle nur Felder der anderen Farbe bedrohen. Man denke sich das Schachbrett in acht Teilbretter der Größe 4×2 unterteilt und betrachte die mit A, B, C und D bezeichneten Paare von Feldern.

A	**C**	**B**	**D**
B	**D**	**A**	**C**

Sie sind jeweils auf „Rösselsprung-Abstand“, und daher kann jeweils nur ein Springer auf einem Paar von Feldern stehen, insgesamt also nicht mehr als 32.