Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1

Gibt es eine Quadratzahl, deren Quersumme 6 ist?

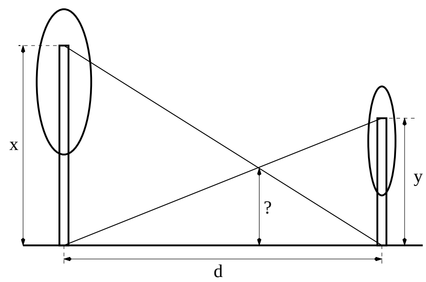
Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern!

Lösung: Es gibt keine Quadratzahl, deren Quersumme 6 ist.

Dazu erinnern wir uns an die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Wir nehmen an, wir hätten eine Quadratzahl $n = m^2$ mit Quersumme 6.
Da die Quersumme 6 durch 3 teilbar ist, ist unsere Zahl n durch 3 teilbar.
Weil 3 eine Primzahl ist, muss schon m durch 3 teilbar sein, also kann man mit einer natürlichen Zahl k schreiben: $m = 3k$.
Damit ist $n = m^2 = (3k)^2 = 9k^2$ durch 9 teilbar. Dann muss aber auch die Quersumme von n durch 9 teilbar sein. 6 ist nicht durch 9 teilbar, also gibt es keine Quadratzahl mit Quersumme 6.

Aufgabe 2

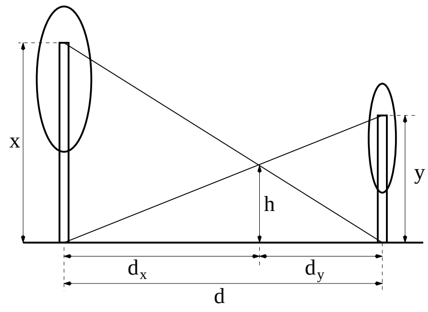
Beim Göttinger Altstadtfest sollen, wie in der Abbildung angedeutet, zwei Schmuckbänder zwischen zwei Bäumen aufgehängt werden, und zwar jeweils von der Spitze des einen Baums zum unteren Stammende des anderen Baums. Die Organisatoren des Festes sind nun ein wenig besorgt, denn es soll unter den Bändern wenigstens noch so viel Platz bleiben, dass ein Mensch darunter durchgehen kann. Zwar sind die Höhen der Bäume erst kürzlich bestimmt worden, nämlich $x = 6\,\mathrm{m}$ und $y = 4\,\mathrm{m}$, aber der Abstand d der Bäume ist völlig unbekannt.



Muss man hierzu dem Vermessungsamt einen Auftrag erteilen oder kann man die Organisatoren vorher schon beruhigen?

Lösung: Die Veranstalter brauchen sich keine Sorgen zu machen! Egal, wie weit die Bäume voneinander entfernt stehen: dort, wo sich die Bänder kreuzen, sind sie 2,40 Meter über der Erde.

Zum *Beweis* benötigt man kaum mehr als die *Strahlensätze* (nämlich für die Gleichungen (1) und (2)). Die Skizze rechts definiert die Bezeichnungen für die Lösung:



Nun gilt:

$$\frac{x}{d} = \frac{h}{d_y}\,, \tag{1}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{h}{d_x} \quad \text{sowie} \tag{2}$$

$$d_x + d_y = d\,. \tag{3}$$

(3) in (1) eingesetzt ergibt

$$\frac{x}{d} = \frac{h}{d - d_x}\,, \tag{4}$$

und (2) ist äquivalent zu

$$d_x = \frac{h \cdot d}{y}\,.$$

Setzt man dies in (4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{x}{d} &= \frac{h}{d - \frac{h \cdot d}{y}} = \frac{h \cdot y}{d \cdot y - d \cdot h} \\ \Longleftrightarrow\quad x &= \frac{h \cdot y}{y - h}\,. \end{aligned}$$

Hochmultiplizieren des Nenners

$$\begin{aligned} & xy - xh = hy \\ \Longleftrightarrow\quad & xy = h(x+y) \end{aligned}$$

und Auflösen nach h ergibt

$$h = \frac{x \cdot y}{x + y}\,.$$

Setzt man schließlich die gegebenen Werte ein, bekommt man wie behauptet:

$$h = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4}\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Selbst wenn man davon ausgeht, dass die Schmuckbänder in Wirklichkeit noch ein wenig durchhängen, ist das völlig ausreichend dafür, dass noch ein Mensch darunter durchgehen kann.

Aufgabe 3

Bei dem Zahlenschloss an Peters Fahrrad muss man durch Drehen dreier Rädchen, auf denen jeweils die Ziffern 1, 2 und 3 stehen, einen dreiziffrigen Zahlencode einstellen, um das Schloss zu öffnen.
Angenommen, das Schloss ist defekt und öffnet sich schon, wenn beliebige zwei der drei Ziffern richtig eingestellt sind, wie viele Versuche braucht ein potentieller Dieb dann höchstens (wenn er schlau ist!), um das Schloss zu öffnen?

Lösung: Ein (wirklich schlauer!) potentieller Dieb kommt mit nur fünf Versuchen aus.
Der Grund dafür, dass man überhaupt mit weniger als neun Versuchen auskommen kann, ist folgender: Peters ursprünglicher Zahlencode sei (A, B, C), wobei A, B, C jeweils eine der Ziffern 1, 2 oder 3 sind. Stellt der Dieb nun einen Versuchscode (a, b, c) ein und das Schloss öffnet sich, ist er glücklich. Wenn es sich aber nicht öffnet, so kommen auf einen Schlag sieben (!!!) mögliche Codes nicht mehr für (A, B, C) in Frage, nämlich die Codes (a, b, x), (a, x, c) und (x, b, c), wobei x wieder eine beliebige der drei Ziffern 1, 2 oder 3 ist. Wäre nämlich einer dieser Codes gleich (A, B, C), so hätte der Code (a, b, c) mit Peters Zahlencode (A, B, C) wenigstens zwei Ziffern gemeinsam, das defekte Schloss hätte sich also öffnen müssen.
Wie viele Möglichkeiten hat Peter überhaupt für seinen Code (A, B, C)?
Für jede der drei Stellen kommen genau drei verschiedene Werte in Frage, also gibt es genau $3^3 = 27$ Möglichkeiten.
Davon kann der Dieb mit nur einem Versuch genau sieben ausschließen!
Insbesondere kann er das Schloss mit drei Versuchen höchstens zufällig, aber <u>nicht sicher</u> (und das war ja gefragt!) knacken, da er bis dahin höchstens $3 \cdot 7 = 21$ Codes als Peters Zahlencode ausschließen kann. Ist einer der übrigen $27 - 21 = 6$ Codes der richtige, so hat sich das Schloss nach den drei Versuchen noch nicht geöffnet.
Aber vier Versuche könnten doch theoretisch reichen, oder?
Schließlich sind $4 \cdot 7 = 28$ Codes mehr, als es überhaupt gibt, also muss Peters Code dabeigewesen sein, oder?
Nein, leider nicht. Zwar kann der Dieb mit jedem der vier Versuche sieben Codes ausschließen, aber diese müssen nicht alle verschieden sein (und sind es auch nicht). Würde der Dieb zum Beispiel dummerweise viermal denselben Code versuchen, würde er trotzdem nur sieben und nicht $4 \cdot 7 = 28$ Codes ausschließen. Folgendermaßen sieht man, dass es bei vier Versuchen mindestens zwei solche Überschneidungen gibt, also wenigstens $27 - 28 + 2 = 1$ möglicher Peter-Code unausgeschlossen bleibt:
Für die erste Stelle a eines Codes (a, b, c) hat man <u>drei</u> Möglichkeiten. Unter <u>vier</u> verschiedenen Codes C_1, C_2, C_3 und C_4 muss es also zwei geben, die die gleiche erste Stelle haben. Sei also zum Beispiel $C_1 = (a, b, c)$ und $C_2 = (a, d, e)$. Dann sind unter den jeweils sieben Codes, die C_1 und C_2 ausschließen, auch die beiden (a, d, c) und (a, b, e), die von <u>beiden</u> ausgeschlossen werden – man hat also mindestens zwei Überschneidungen unter den durch

vier Versuche ausgeschlossenen Codes, und es werden insgesamt nicht mehr als $4 \cdot 7 - 2 = 26$ Peter-Codes ausgeschlossen. Mit vier Versuchen ist man also auch nicht auf der sicheren Seite, denn es könnte immer noch einer der nicht ausgeschlossenen Codes der richtige sein; dann bliebe das Schloss nach diesen vier Versuchen geschlossen!
Dass es schließlich mit fünf Versuchen sicher klappt, zeigt man zum Beispiel mit folgender Tabelle:

Nr.	Code	Für den richtigen Code dadurch ausgeschlossen:
1	(1, 1, 2)	(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 2), (2, 1, 2), (3, 1, 2)
2	(2, 2, 1)	(2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 1, 1), (2, 3, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)
3	(3, 3, 2)	(3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 2, 2), (2, 3, 2)
4	(1, 3, 3)	(1, 3, 1), (1, 3, 3), (1, 2, 3), (2, 3, 3)
5	(3, 1, 3)	(3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 2, 3), (2, 1, 3)

Spätestens nach diesen fünf Versuchen ist das Schloss offen, denn in der letzten Spalte der Tabelle kommen alle 27 Möglichkeiten vor.

Wie man auf die Tabellenlösung kommt? Eine Möglichkeit besteht darin, sich jeden Code als Punkt in einem $3 \times 3 \times 3$-Würfel vorzustellen. Dann schließt jeder Code gerade die Punkte im Würfel aus, die auf einer gemeinsamen achsenparallelen Geraden mit diesem Code liegen.

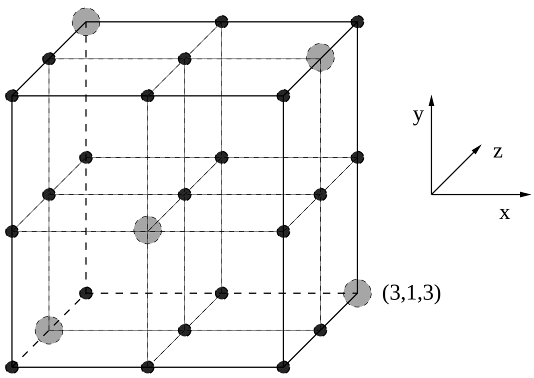


Abbildung 1: Die fünf Versuche

In obigem Bildchen sind die fünf Codes der Tabelle durch große Punkte markiert. Man erkennt, dass jeder andere Punkt auf einer gemeinsamen achsenparallelen Geraden mit irgendeinem der fünf markierten Punkte liegt. Um solche fünf Punkte zu finden, muss man aber trotzdem noch ein wenig probieren. (Insbesondere wird man, wie zuvor bewiesen, mit vier Punkten nicht auskommen!)

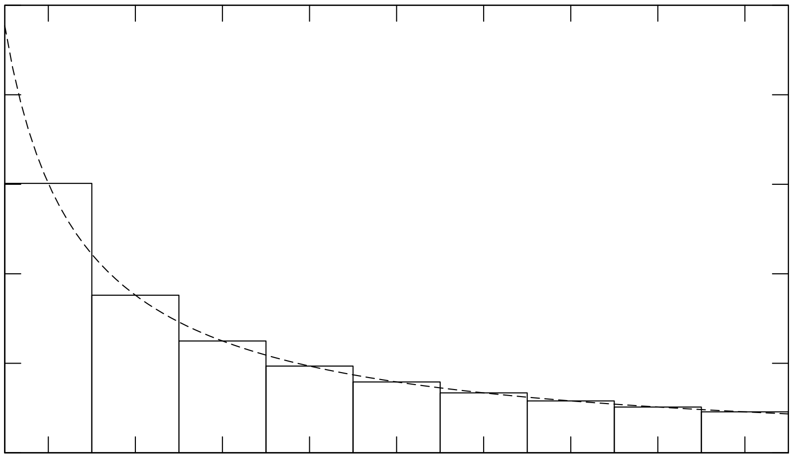
Aufgabe 4

Man nehme den Prospekt eines beliebigen Supermarktes, Möbelhauses oder Computerladens. Jedes Produkt hat dort seinen Preis – und um diese Preise soll es in dieser Aufgabe zunächst einmal gehen.
Schaut man sich diese Zahlen nämlich genauer an, so stellt man in der Regel fest: Die meisten Preise haben als letzte Ziffer eine 9, einige wenige vielleicht eine 0 oder 5, aber andere Ziffern kommen so gut wie gar nicht vor.
Doch in dieser Aufgabe soll nicht die letzte, sondern die **erste** Ziffer der Zahlen eine Rolle spielen. Uns interessiert folgende Frage:

> Kommen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 gleich oft als erste Ziffer vor oder nicht?

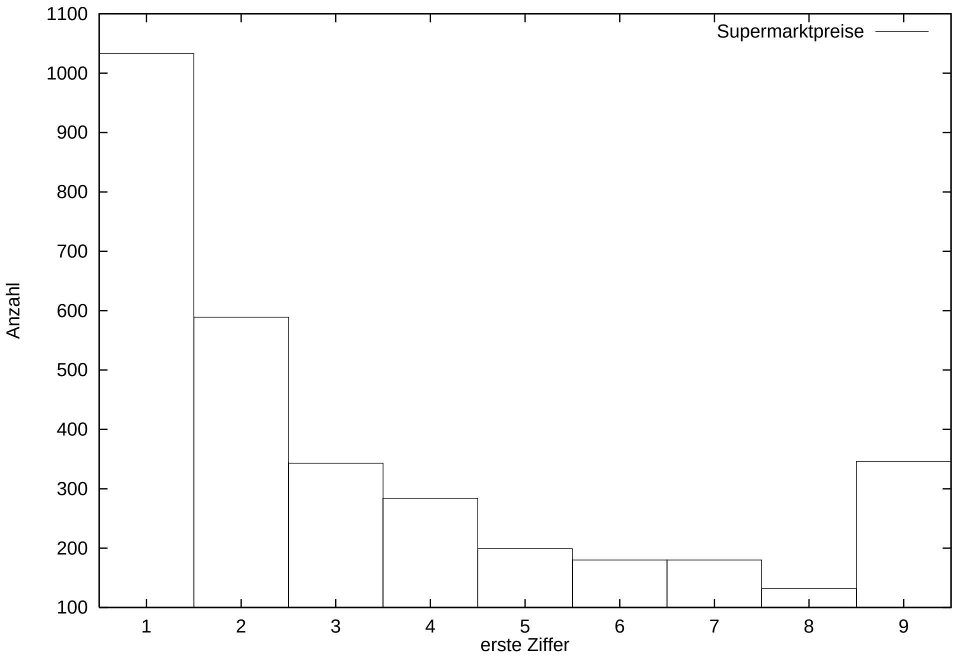
Lösung: Zunächst einmal eine kleine Geschichte: Am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts gab es noch keine Taschenrechner oder Computer, mit denen Wissenschaftler ihre Berechnungen durchführen konnten. Stattdessen bediente man sich sogenannter *Logarithmentafeln*; vielleicht habt ihr so etwas schon mal in älteren Formelsammlungen gesehen. Mit diesen konnte man dann auch kompliziertere Berechnungen vereinfachen. Man muss sich das als Buch vorstellen, in dem in einer großen Tabelle für sehr viele Zahlen zwischen 1 und 10 (also z. B. in 1/10000-Schritten) der Logarithmus dieser Zahlen angegeben war, also die Zahl, die man heute beim Taschenrechner durch einfaches Drücken der *log*-Taste erhält. Wenn ihr das mal ausprobiert, werdet ihr feststellen, dass diese Tabelle ausreicht, um den Logarithmus von allen Zahlen mit einer bestimmten Genauigkeit zu ermitteln (Vergleicht einfach mal die Werte von $\log 1{,}2$, $\log 12$ und $\log 120$!).
Ein amerikanischer Physiker namens Frank Benford, der sein Logarithmentafelbuch sehr oft benutzt haben muss, stellte 1938 fest, dass die vorderen Seiten viel mehr abgegriffen waren als die hinteren. In seinen Berechnungen mussten also sehr viel häufiger Zahlen vorgekommen sein, die mit einer 1 oder 2 angefangen haben, als solche, die mit einer 8 oder 9 beginnen. Diese Feststellung wurde später nach ihm „Benfords Gesetz“ oder auch „First-Digit-Gesetz“ genannt, obwohl sie auch schon 1881 von Simon Newcomb gefunden wurde:

> Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit 1 beginnt, ist viel größer (ca. 30 Prozent) als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit 9 beginnt (ca. 5 Prozent). Genauer gesagt ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit der Ziffer n beginnt, $log(\frac{n+1}{n})$ (siehe Schaubild **??**).



Kann man dieses „Gesetz“ irgendwie begründen?
Die wichtigste Feststellung ist, dass die meisten Vorgänge weniger in absoluten Zahlen als vielmehr in Größenordnungen einzuordnen sind. Es gibt viel mehr Pfützen als Tümpel, mehr Tümpel als Seen und mehr Seen als Meere. Wenn man also die Flächen der Gewässer betrachtet, so gibt es mehr zwischen einem und zwei Quadratmetern als zwischen zwei und drei Quadratmetern, ebenso zwischen 100 000 Quadratmetern und 200 000 Quadratmetern mehr als zwischen 200 000 und 300 000.
Doch man kann noch genauer analysieren: Die Anzahl der Gewässer mit Größe zum Beispiel zwischen einem und zwei Quadratmetern ist gleich der Anzahl der Gewässer mit Größen zwischen zwei und vier Quadratmetern und der Anzahl mit Größen zwischen vier und acht Quadratmetern. Dies ist die Voraussetzung dafür, dass die Verteilung der Anfangsziffern so aussieht wie im Schaubild angegeben. Denn dann ist der Balken bei der Eins gerade so groß wie die von Zwei und Drei zusammen und so groß wie die von Vier, Fünf, Sechs und Sieben zusammen. Man nennt diese Eigenschaft „Skaleninvarianz“.
Solche Verteilungen findet man insbesondere bei exponentiellen Wachstumsvorgängen, was nichts anderes bedeutet, als dass sich eine bestimmte Größe in einem gewissen Zeitintervall (zum Beispiel ein Jahr) jeweils vervielfacht (also zum Beispiel verdoppelt, verdreifacht, halbiert). So etwas findet man in der Umgebung sehr häufig, auf der einen Seite bei Populationen von Bakterien, auf der anderen Seite bei Sparguthaben oder Aktienindizes. Das Erstaunliche ist, dass dieses Gesetz auch bei Größen gilt, für die diese Art von Wachstum nicht so offensichtlich auftritt, zum Beispiel bei Dateigrößen auf einer Festplatte oder beliebig ausgewählten Zahlen in einer Zeitung. Es scheint sich also um eine Verteilung der Verteilungen zu handeln!
Und wer die Dateigrößen auf seiner Festplatte untersucht hat, wird festgestellt haben, dass diese bei genügend großer Anzahl gut dem Gesetz gehorchen, die Abweichung beträgt meist nur ein paar Prozent. Aber man stellt auch meistens bei der einen oder anderen Zahl einen „Ausreißer“ fest. Und

solche Ausreißer deuten darauf hin, dass auf dieser Festplatte nicht nur irgendwelche Daten liegen, sondern eine größere Anzahl einer ganz bestimmten Sorte, zum Beispiel Abspeicherungen eines Programms.
Damit hat das Verfahren auch eine praktische Bedeutung: In den USA untersucht man Steuererklärungen großer Unternehmen, indem man die Häufigkeit der Anfangsziffern zählt. (maschinell, sind ja keine Lochkarten, die Genauigkeit ist also recht hoch). Genügen sie Benfords Gesetz, scheint alles in Ordnung. Hat aber jemand die Bilanzen gefälscht, so weicht die Verteilung ab, da die meisten Menschen dazu tendieren, eher Zahlen, die mit 5 oder 6 beginnen, auszuwählen und damit Benfords Gesetz zu verletzen.
Auch bei den von euch untersuchten Supermarktpreisen kann man diese Gesetzmäßigkeit feststellen:



Der Verlauf der Kurve entspricht für die Anfangsziffern 1 bis 8 Benfords Gesetz. Andererseits sieht man deutlich, dass viel mehr Preise, als man nach diesem Gesetz erwarten würde, mit einer 9 beginnen, vermutlich aus psychologischen Gründen.
Viel mehr zu diesem Thema findet man im Internet, zum Beispiel unter

- *http://www.zmija.de/ziffernanalyse.htm* und
- *www.math.uni-augsburg.de/stochastik/drton/Firstdigit/*