Beispiellösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1

Jedesmal, wenn Oma Piepenbrink ihre 17 Enkel zu Besuch hat, verteilt sie an diese Taschengeld. Hierzu bereitet sie immer 17 Umschläge vor, und zwar so, dass in einem von ihnen 1 Mark, in einem anderen 2 Mark, ... und im letzten 17 Mark sind. Äußerlich sind die Umschläge jedoch nicht zu unterscheiden, so dass die Enkel zufällig einen Umschlag ziehen.
Nach vier solchen Besuchen stellen die Enkel fest, dass jeder von ihnen insgesamt eine ungerade Anzahl an Mark bekommen hat. Ist das möglich oder hat sich da einer der Enkel verzählt?

Lösung:

Einer der Enkel muss sich verzählt haben. Das kann man folgendermaßen einsehen:
Man zählt die Gesamtsumme S an Geld, die die Oma an den vier Tagen insgesamt verschenkt hat, auf zwei verschiedene Arten.
Wenn der Enkel i insgesamt a_i Mark bekommen hat (wobei $1 \leq i \leq 17$ ist), dann gilt einerseits sicherlich

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{17} = S.$$

Andererseits verschenkt die Oma an jedem der vier Tage insgesamt $1 + 2 + \ldots + 17 = \frac{1}{2} \cdot (17 \cdot 18) = 153$ Mark. An vier Tagen zusammen somit eine Gesamtsumme von

$$S = 4 \cdot 153 = 612 \text{ Mark.}$$

Damit gilt also

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{17} = 612.$$

Wären nun alle a_i ungerade, so wäre auch die Summe dieser 17 ungeraden Zahlen wieder ungerade, also ungleich 612. Das kann nicht sein.

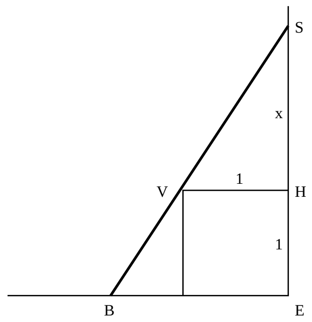
Bemerkung: In obiger Rechnung wurde die berühmte Gaußsche Summenformel $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ verwendet. Diese erhält man leicht, wenn man die Summe wie folgt zweimal addiert:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s & := & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
s & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2s & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \\
2s & = & n \cdot (n+1)\,, & & & & & & & &
\end{array}$$

also $s = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ wie behauptet.

Aufgabe 2

a) Eine Leiter mit Länge $\sqrt{8}$ Meter lehnt an der Wand, wobei sie einen 1 Meter tiefen und 1 Meter hohen Tisch gerade an der oberen Tischkante berührt. Der Tisch steht direkt an der Wand (siehe Skizze). Kann man aus diesen Angaben ermitteln, wie hoch über dem Boden die Leiter die Wand berührt?



b) Nun wird die Leiter ausgezogen und hat eine Länge von 6 Metern. Sie lehnt in der gleichen Weise wie oben an Tisch und Wand. Wie hoch über dem Boden berührt die Leiter die Wand jetzt?

Lösung:

Wir bezeichnen die Länge der Leiter $\overline{BS}$ mit l und den Abstand $\overline{HS}$ von der hinteren Kante H des Tisches bis zum Punkt S, an dem die Leiter an der Wand lehnt, mit x.
Das Dreieck VHS ist rechtwinklig, also gilt nach Satz des Pythagoras:

$$\left(\overline{VS}\right)^2 = \left(\overline{HS}\right)^2 + \left(\overline{VH}\right)^2 = x^2 + 1^2 \tag{1}$$

Die Tischplatte ist parallel zum Boden, es gilt also $\overline{VH} \parallel \overline{BE}$, deshalb können wir den *Strahlensatz* anwenden:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{ES}} = \frac{\overline{VS}}{\overline{HS}} \tag{2}$$

Setzen wir beide Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$\frac{\left(\overline{BS}\right)^2}{\left(\overline{ES}\right)^2} = \frac{\left(\overline{VS}\right)^2}{\left(\overline{HS}\right)^2} = \frac{x^2+1}{x^2} \tag{3}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\left(\overline{ES}\right)^2$ und erhalten

$$\left(\overline{BS}\right)^2 = \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \left(\overline{ES}\right)^2 \tag{4}$$

Jetzt setzen wir $\overline{BS} = l$ und $\overline{ES} = x + 1$ ein:

$$l^2 = \frac{x^2+1}{x^2} \cdot (x+1)^2 = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{x} \tag{5}$$

Kürzt man in beiden Brüchen ein x, so ergibt sich:

$$l^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

Jetzt kommt ein entscheidender Schritt: Wir ersetzen $x + \frac{1}{x}$ durch die neue Variable u. Dadurch erhalten wir folgende Gleichung:

$$l^2 = u\,(u+2) \tag{7}$$

bzw.

$$u^2 + 2 \cdot u - l^2 = 0\,. \tag{8}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in u mit den beiden Lösungen

$$u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+l^2}\,. \tag{9}$$

Wir sind aber eigentlich nicht an dem Ergebnis für u interessiert, sondern an x. Deshalb müssen wir die obige Ersetzung nun wieder rückgängig machen. Aus $u = x + \frac{1}{x}$ folgt durch Multiplikation mit x:

$$x^2 - u \cdot x + 1 = 0\,. \tag{10}$$

Das ist wieder eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}\,. \tag{11}$$

Damit eine reelle Lösung existiert, darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ sein, d. h. es muss $u^2 \geq 4$ gelten. *Vorsicht!!* Das ist nicht gleichbedeutend mit $u \geq 2$, sondern nur mit $|u| \geq 2$.
Aber außerdem soll x positiv sein, da die Leiter *oberhalb* des Tisches an der Wand lehnt. Das geht aber wegen (11) nur, wenn u positiv ist, da für $|u| \geq 2$ stets $\left|\frac{u}{2}\right| > \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}$ gilt. Damit kommt nur die positive Lösung für u in Gleichung (9) in Frage.
Weiterhin erhält man aus $u \geq 2$ und Gleichung (9) noch eine Bedingung an die Länge der Leiter:

$$\sqrt{1+l^2} \geq 3\,. \tag{12}$$

Da die Länge der Leiter größer als null ist, folgt daraus

$$l \geq \sqrt{8}\,. \tag{13}$$

Gleichheit ist gerade die Situation in Aufgabenteil a). Eine kürzere Leiter kann nicht so angelehnt werden, dass sie Boden, Tisch und Wand gleichzeitig berührt.
Für alle längeren Leitern erhält man durch Gleichung (11) zwei mögliche Werte für x. Beide sind möglich: Einmal lehnt die Leiter eher flach und einmal eher steil an der Wand. Die Höhe h über dem Boden erhält man durch $h = x + 1$.
Konkret ergibt sich für die beiden Aufgabenteile:
a)

$$u = -1 + \sqrt{1 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = 2, \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2^2 4 - 1} = 1$$

Die Leiter berührt die Wand 2 Meter über dem Boden.

b)

$$u = -1 + \sqrt{1+6^2} = -1 + \sqrt{37}, \quad x_{1,2} = \frac{-1+\sqrt{37}}{}2 \pm \sqrt{\frac{}{\left(-1+\sqrt{37}\right)^2}4 - 1}$$

$$x_1 \approx 4{,}88; \quad x_2 \approx 0{,}20$$

Die Leiter berührt die Wand entweder 5,88 Meter oder 1,20 Meter über dem Boden.

Aufgabe 3

Auf einem Tisch liegen 17 rote, 20 blaue und 24 schwarze Spielsteine. Außerdem ist noch ein genügend großer Vorrat an Spielsteinen aller Farben vorhanden, um folgendes Spiel zu spielen: In jedem Zug darf der Spieler zwei beliebige Steine verschiedener Farbe vom Tisch nehmen, muss dafür aber einen Stein der dritten Farbe neu auf den Tisch legen.
Das Spiel endet also, sobald nicht mehr zwei Steine verschiedener Farbe auf dem Tisch sind. Frauke erzählt nun ihrem Freund Peter, sie habe dieses Spiel gespielt, und dabei sei genau ein Stein auf dem Tisch übrig geblieben. Daraufhin konnte Peter ihr sofort sagen, welche Farbe dieser Stein hatte. Wie konnte er das wissen? Welche Farbe hat er ihr also genannt?

Lösung:

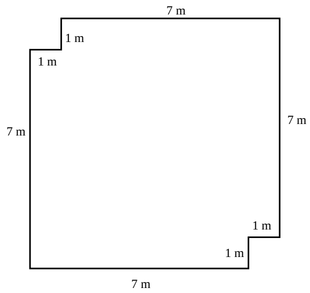
Die Idee zu dieser Lösung lieferte uns Manuel Hohmann aus Bergfeld.
Sei r, b bzw. s die Anzahl der Züge, bei denen ein roter, blauer bzw. schwarzer Stein hinzukommt. Dann sind am Schluss $17+r-b-s$ rote, $20+b-r-s$ blaue und $24+s-r-b$ schwarze Steine vorhanden. Damit ist die Summe übrig gebliebener blauer und schwarzer Steine $20+b-r-s+24+s-r-b = 44-2r$ eine gerade Zahl.
Wenn der letzte Stein schwarz oder blau wäre, so wäre die Summe der blauen und schwarzen Steine $1+0=1$ ungerade. Da dies aber nicht sein kann, muss der letzte Stein ein roter gewesen sein.

Dies war hier zwar nicht gefragt, aber man kann sich noch überlegen, dass ein Spiel tatsächlich so enden kann.
Eine mögliche Zugfolge ist:

BESTAND hinzufügen von	Rot 17	Blau 20	Schwarz 24
blau	16	21	23
blau	15	22	22
21 mal rot	36	1	1
schwarz	35	0	2
blau	34	1	1
17 weitere Mal abwechselnd schwarz und blau	0	1	1
rot	1	0	0

Aufgabe 4

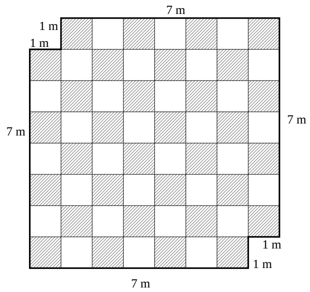
Herr Meier will auf seinem Grundstück vor seinem Haus neuen Rasen pflanzen. Die Rasenfläche, die bepflanzt werden soll, hat die Form eines Quadrates, dem an zwei gegenüberliegenden Seiten jeweils zwei kleinere Quadrate herausgeschnitten wurden (siehe Abbildung).



Im Baumarkt hat Herr Meier zu diesem Zweck 31 Grassoden zu je 2 m $\times$ 1 m gekauft und sich vom Verkäufer versichern lassen, dass er damit sein Rasenstück, ohne die Soden noch weiter zerschneiden zu müssen, auslegen kann. Herr Meier versucht an jenem Nachmittag stundenlang ergebnislos, die Rasensoden auf der Fläche zu verteilen.
Erst als seine Frau, die Mathematikerin ist, sich die Sache genauer ansieht, kommt es zu einer Klärung. Sie empfiehlt ihrem Gatten, sich im Baumarkt zu beschweren. Welche Begründung gibt sie ihm mit auf den Weg?

Lösung:

Wir können uns unseren Garten als ein Schachbrett vorstellen, dem zwei gegenüberliegende Ecken fehlen. Dazu teilen wir den Garten in 1m $\times$ 1m große Quadrate ein und färben (der Natur zuliebe nur in Gedanken) die Quadrate abwechselnd weiß und schwarz ein.



Um das linke untere kleine Quadrat vollständig zu bedecken, muss es eine Rasensode geben, deren eine Ecke mit der linken unteren Gartenecke übereinstimmt. Damit kommen auch zwei Kanten der Sode auf Gartengrenzen zu liegen. So mit jeder neu entstandenen Ecke fortfahrend, erhält man:
Will man den Garten vollständig auslegen, so muss jede der Soden genau zwei der kleinen nebeneinanderliegenden Quadrate bedecken, also genau ein weißes und genau ein schwarzes.
Könnte man den Garten vollständig mit den 31 Soden auslegen, so wären 31 schwarze und 31 weiße kleine Quadrate verdeckt.
Bei unserer Färbung besteht der Garten aber aus 32 kleinen Quadraten in Schwarz und 30 in Weiß, die Verteilung der Grassoden im Garten ist also ohne Zurechtschneiden nicht möglich.