Beispiellösungen zu Blatt 9

Aufgabe 1

Frank verwechselt an seiner Armbanduhr gelegentlich den großen mit dem kleinen Zeiger und liest dennoch eine sinnvolle Uhrzeit ab. Wie oft am Tag und wann ist dies möglich?

Lösung:

Um alle Zeitpunkte, an denen eine solche Verwechslung möglich ist, exakt zu bestimmen, muss man wohl oder übel ein wenig rechnen. Zunächst einmal bezeichne m die Position des Minutenzeigers, wobei $0 \leq m < 60$ sei, und genauso sei s die Position des Stundenzeigers mit $0 \leq s < 12$. (Es reicht offensichtlich, die erste Tageshälfte zu betrachten, da sich die Situation in der zweiten exakt wiederholt.) Welche Bedingung muss man an m und s stellen, damit sich eine sinnvolle Uhrzeit ergibt? (Zum Beispiel wäre $m = 10$ und $s = 0$ sicherlich unsinnig, weil Punkt zwölf Uhr auch der Minutenzeiger bei $m = 0$ stehen muss.)
Das Problem ist, dass allein der Stundenzeiger die genaue Uhrzeit bestimmt. Wenn er zum Beispiel genau auf einer vollen Stunde steht, muss $m = 0$ sein, wenn er genau zwischen zwei vollen Stunden steht, ist $m = 30$ usw. In Formeln muss man also zunächst den Bruchteil der angefangenen Stunde berechnen, den der Stundenzeiger anzeigt, und das Ergebnis dann mit 60 multiplizieren, was die aktuellen Minuten ergeben muss. Also:

$$m = 60 \cdot (s - \lfloor s \rfloor) \tag{1}$$

($\lfloor . \rfloor$ ist die sogenannte Gaußklammer. Bei positiven Zahlen tut sie nichts weiter, als alle Nachkommastellen zu streichen, wie z. Bsp. $\lfloor 2{,}31 \rfloor = 2$, $\lfloor 9{,}9 \rfloor = 9$ oder $\lfloor 6 \rfloor = 6$.)
Interpretiert man nun versehentlich die Zeigerbedeutung um, so entspricht die Stellung m der Minuten offenbar der Stellung $s' = \frac{m}{5}$ eines Stundenzeigers und außerdem die Stellung s des Stundenzeigers der Stellung $m' = 5 \cdot s$ eines Minutenzeigers. Damit auch diese Stellung sinnvoll ist, muss analog

$$m' = 60 \cdot (s' - \lfloor s' \rfloor)$$

gelten. Also

$$5 \cdot s = 60 \cdot \left(\frac{m}{5} - \left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor \right). \tag{2}$$

Setzt man hierin noch (1) ein, so erhält man die gesuchte Bedingung an die Stellung s des großen Zeigers:

$$s = 12 \cdot (12 \cdot (s - \lfloor s \rfloor) - \lfloor 12 \cdot (s - \lfloor s \rfloor) \rfloor) \tag{3}$$

Dies entspricht der Gleichung

$$\begin{aligned} s &= 144s - 144\lfloor s\rfloor - 12 \cdot \lfloor 12s - 12\lfloor s\rfloor\rfloor && (4)\\ &= 144s - 144\lfloor s\rfloor - 12 \cdot (\lfloor 12s\rfloor - 12\lfloor s\rfloor) && (5)\\ & \quad \text{(weil } 12\lfloor s\rfloor \text{ eine ganze Zahl ist)} && (6)\\ &= 144s - 12\,\lfloor 12s\rfloor && (7) \end{aligned}$$

und es gilt „nur“ noch, deren Lösungen unter der Einschränkung $0 \le s < 12$ zu finden. Eben wegen jener Einschränkung gibt es aber genau eine natürliche Zahl k mit $0 \le k < 144$ so, dass $\frac{k}{12} \le s < \frac{k+1}{12}$ ist. (Wenn man die gesamten zwölf Stunden in Fünf-Minuten-Intervalle unterteilt, so gibt k gerade die Nummer des Intervalls an, in welches die Uhrzeit fällt, wobei man bei 0 anfangen muss zu zählen.) Der Vorteil dieses k ist dann gerade, dass $\lfloor 12s\rfloor = k$ gilt. Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so folgt:

$$s = \frac{12}{143} \cdot k. \tag{8}$$

Diese Gleichung liefert nun für jedes $k \in \{0, 1, ..., 142\}$ tatsächlich einen Wert s, für den die Bedingung $\frac{k}{12} \le s < \frac{k+1}{12}$ gilt (für $k = 143$ ist das nicht der Fall, also ergibt sich hier keine Lösung). Man hat also in zwölf Stunden genau 143 Zeitpunkte, an denen man die beiden Zeiger „mit Sinn“ vertauschen könnte, an einem ganzen Tag geht das also 286-mal. („24 Uhr“ zählt schon zum nächsten Tag!) Für s sind das die gerundeten Dezimalzahlen 0; 0,083; 0,167; usw. und in der gewohnten Uhrzeitangabe entspricht dies etwa 00.00.00 Uhr, 00.05.02 Uhr, 00.10.04 Uhr usw.

Aufgabe 2

Man beweise, dass $4n^3+6n^2+4n+1$ für keine natürliche Zahl n eine Primzahl ist!

Lösung:

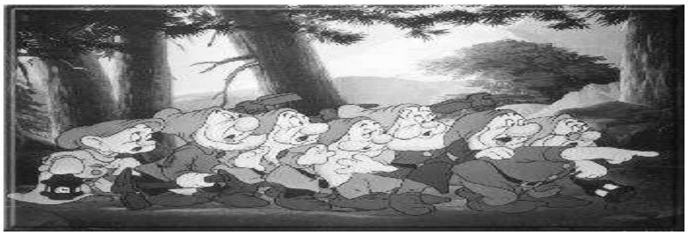
Am einfachsten kommt man zur Lösung, wenn man feststellt, dass der angegebene Term dem Produkt $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ ähnelt. Dann ergibt sich mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 &= (n+1)^4 - n^4\\ &= \left((n+1)^2 + n^2\right)\left((n+1)^2 - n^2\right)\\ &= \left((n+1)^2 + n^2\right)(2n+1)\ . \end{aligned}$$

Man hat also eine Zerlegung der Zahl in zwei Faktoren, wobei offensichtlich der zweite Faktor der kleinere ist. Für $n \ge 1$ ist dieser Faktor größer als eins, also hat man zwei echte Teiler der Zahl gefunden, die demnach nicht prim ist. Wenn null auch zu den natürlichen Zahlen gezählt werden soll (die Gelehrten streiten sich darüber), hat man ebenfalls keine Probleme: Für $n = 0$ ist der Term gleich eins, und das ist nach Definition keine Primzahl.

Aufgabe 3

Immer wenn die sieben Zwerge morgens auf Arbeit in den Wald gehen, laufen sie in einer Reihe hintereinander und singen dazu ihr fröhliches Lied. Die Zwerge, die alle verschieden groß sind, gehen dabei immer so, dass von drei aufeinanderfolgenden Zwergen der mittlere jeweils größer oder kleiner als die beiden anderen ist. Ihre Reihe ist also immer von der Form *hoch - tief - hoch - ...* oder *tief - hoch - tief - ...*
Wie viele Tage können die Zwerge so auf Arbeit gehen, ohne dass sich eine Reihenfolge wiederholt?
Wie viele Tage sind es, wenn sich auch noch Schneewittchen in die Schlange einreiht?
Hinweis: Schneewittchen ist natürlich größer als jeder Zwerg!



Lösung:

Zunächst die nackten Zahlen: Die sieben Zwerge können ohne Wiederholung der Reihenfolge 544 Tage zur Arbeit gehen, mit Schneewittchen sind es 2770 Tage.
Nun der Lösungsweg: Die Hinzunahme von Schneewittchen ist – mathematisch betrachtet – nichts anderes, als hätte man acht verschieden große Zwerge statt sieben. Für sieben Zwerge kann man die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten mit etwas Geduld noch per Hand auszählen, indem man einige Fallunterscheidungen macht und z. B. ausnutzt, dass der kleinste Zwerg logischerweise ja an einer „Tief"-Position stehen muss und der zweitkleinste eine „Hoch"-Position allenfalls an einem Ende der Schlange einnehmen kann. Das bedeutet aber schon einige Arbeit, und mit acht Personen ist das ohne massive Zuhilfenahme von Notizen auf Papier wohl nicht mehr möglich. Einfacher ist es da, sich Schritt für Schritt an die Lösung(en) heranzutasten, indem man sich die Zahlen *rekursiv* herleitet, angefangen mit ganz wenigen Zwergen.
Dazu seien folgende Bezeichnungen eingeführt: H_n stehe für die Anzahl an Möglichkeiten, eine Zwergenreihe aus n Zwergen so zu bilden, dass vorne eine „Hoch"-Position ist (das heiße eine H-Reihe), T_n entsprechend für die Anzahl mit einer „Tief"-Position vorne (T-Reihe). Eine kurze Überlegung zeigt, dass immer $H_n = T_n$ gelten muss, denn indem man den größten Zwerg durch den kleinsten ersetzt, den zweitgrößten durch den zweitkleinsten usw., kann man jeder H-Reihe genau eine T-Reihe zuordnen und umgekehrt.
Mit nur einem Zwerg kann man lediglich genau eine Reihenfolge bilden, die sowohl eine H- als auch eine T-Reihe ist ($H_1 = T_1 = 1$). Bei zwei Zwergen hat

man für eine H-Reihe auch keine Wahlmöglichkeit: der größere der beiden muss nach vorne. Also: $H_2 = T_2 = 1$. Ab drei Zwergen wird es etwas interessanter: Für eine H-Reihe muss der kleinste Zwerg in die Mitte – aber die anderen beiden können wählen, wer vorne und wer hinten geht. Das macht $H_3 = 2$.

Ab vier Zwergen soll nun anders vorgegangen werden: Wir betrachten speziell den größten Zwerg. In einer H-Reihe kann er an erster oder dritter Stelle gehen (oder, wenn es mehr Zwerge sind, an fünfter, siebter, ... Stelle). Bei der Aufteilung der anderen Zwerge auf zwei Gruppen, die vor bzw. hinter dem größten Zwerg gehen, muss man sich zuerst überlegen, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt. (Die genaue Reihenfolge der anderen Zwerge soll noch nicht beachtet werden.) Das kann man bei den relativ kleinen Zahlen, um die es hier geht, zur Not auch noch von Hand machen. Besser ist es aber auch hier mit einer Systematik. (Einige von euch werden sicherlich schon mit Binomialkoeffizienten gearbeitet haben, sie können die nachfolgenden Erklärungen ggf. überspringen.) Für die Gruppe von $n-1$ übrigbleibenden Zwergen muss also ermittelt werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Zwerge als „Vorweggehende" auszuzeichnen. (Dass die anderen dann hinten gehen, ergibt sich natürlich von selbst.) Für die erste „Auszeichnung" hat man sicher $n-1$ Möglichkeiten, für die zweite $n-2$ usw. Das macht $(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)$ Varianten. Da aber die Reihenfolge der „Auszeichnungen" hier ohne Bedeutung ist, muss man noch herausdividieren, wie viele Möglichkeiten es für eine bestimmte Gruppe gibt, ausgezeichnet worden zu sein (bzgl. der Reihenfolge). In einer Gruppe von k Leuten gibt es (gleiches Verfahren) k Möglichkeiten für das Mitglied, das als erstes ausgezeichnet wurde, $k-1$ für das zweite usw. Das heißt also, dass immer $k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1$ Auszeichnungsreihenfolgen genau zur gleichen Gruppenbildung führen. Insgesamt gibt es also $\frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$ Möglichkeiten, eine Teilmenge von k Zwergen aus $n-1$ Zwergen zu bilden. (Der eben genannte Bruch ist ein sogenannter *Binomialkoeffizient*, aber mehr Erklärungen dazu würden an dieser Stelle zu weit führen.)

Damit die gesamte Zwergenreihe eine H-Reihe wird, müssen die k Zwerge, die vor dem größten Zwerg gehen, natürlich selbst eine H-Reihe bilden (wofür es bekanntlich H_k Varianten gibt). Der größte Zwerg muss an einer ungeraden Position gehen und die $n-1-k$ Zwerge, die hinter dem größten gehen, müssen eine T-Reihe bilden (T_{n-1-k} Möglichkeiten). Das heißt also, dass man jetzt, wenn man die H_k und T_k für $k \leq n$ kennt, H_{n+1} (und damit auch T_{n+1}) berechnen kann. Und genau das machen wir nun. (Wenn der größte Zwerg ganz vorne oder hinten geht, braucht man sich um die Aufteilung der anderen Zwerge nach vorne und nach hinten natürlich keine Gedanken zu machen, da gibt es nur eine Möglichkeit.)

Bekannt ist: $H_1 = T_1 = 1\,, \quad H_2 = T_2 = 1\,, \quad H_3 = T_3 = 2\,.$ Also ist

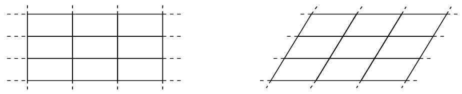
$$
\begin{aligned}
H_4 &= T_3 + \tfrac{3\cdot 2}{2\cdot 1} H_2 T_1 = 2 + 3\cdot 1\cdot 1 = 5 \\
H_5 &= T_4 + \tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} H_2 T_2 + H_4 = 5 + 6\cdot 1\cdot 1 + 5 = 16 \\
H_6 &= T_5 + \tfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} H_2 T_3 + \tfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} H_4 T_1 = 16 + 10\cdot 1\cdot 2 + 5\cdot 5\cdot 1 = 61 \\
H_7 &= T_6 + \tfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} H_2 T_4 + \tfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} H_4 T_2 + H_6
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= 61 + 15 \cdot 1 \cdot 5 + 15 \cdot 5 \cdot 1 + 61 = 272 \\ H_8 &= T_7 + \tfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1} H_2 T_5 + \tfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} H_4 T_3 + \tfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} H_6 T_1 \\ &= 272 + 21 \cdot 1 \cdot 16 + 35 \cdot 5 \cdot 2 + 7 \cdot 61 \cdot 1 = 1385 \end{aligned}$$

Damit gibt es für die sieben Zwerge $H_7 + T_7 = 2 \cdot H_7 = 544$ und für die Zwerge mit Schneewittchen $2 \cdot H_8 = 2770$ verschiedene Möglichkeiten, auf Arbeit zu gehen.

Aufgabe 4

Bekanntlich kann man eine als unendlich groß angenommene Fläche vollständig und überschneidungsfrei mit kongruenten Rechtecken und auch mit kongruenten Parallelogrammen pflastern (siehe Abbildung!).



Man beweise, dass dies auch mit kongruenten Vierecken beliebiger Form möglich ist!

Lösung:

Mit ein wenig Probieren findet man schnell die richtige Idee, wie man die Ebene auch mit allgemeinen Vierecken pflastern kann. Sie ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

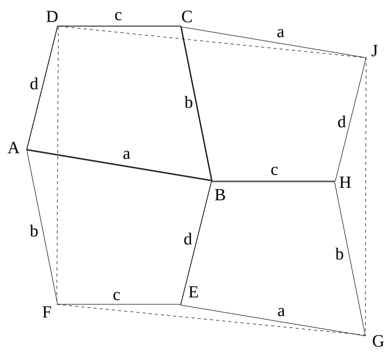


Abbildung 1: Die Pflasterung

Hierbei wird nichts weiter getan, als dass irgendein schon vorhandenes Viereck an irgendeiner der Mittelpunkte der vier Seiten um 180° gedreht wird. So entsteht zum Beispiel das Viereck $BAFE$ aus dem Viereck $ABCD$ durch eine 180°-Drehung um den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.
Aber warum funktioniert dieses Verfahren und füllt die Ebene lückenlos und ohne Überschneidungen?
Wenn man bei der Erklärung ein wenig auf Exaktheit verzichtet, so kann

man anschaulich argumentieren:
Hierzu betrachte man das eben schon erwähnte Beispiel der 180°-Drehung um den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Dabei wird B auf A und A auf B abgebildet – die Seite $\overline{AB}$ also insgesamt auf sich selbst. Es wird demnach entlang der Seiten nie irgendwelche Überstände geben.
Und warum schließt sich die Figur exakt, wenn man einmal die vier Vierecke (siehe Abbildung) „im Kreis“ gespiegelt hat?
Die Antwort hierauf ist ganz einfach: In jedem Viereck addieren sich die Innenwinkel zu 360°, also zu einem Vollwinkel, und wie man sich an der Abbildung leicht überzeugt, treffen bei dem beschriebenen Verfahren stets genau die vier verschiedenen Innenwinkel an einem Punkt aufeinander (im Bild ist dies der Punkt B). Übrigens gelten diese Überlegungen genauso für nicht konvexe Vierecke („eingedellte Drachen“); ein entsprechendes Bildchen könnte wie in Abbildung 2 aussehen. Wenn man mehr auf mathematische

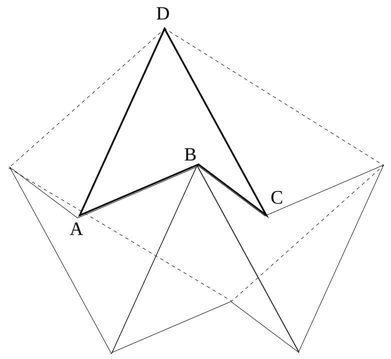


Abbildung 2: Die Pflasterung mit „Drachen“

Exaktheit bedacht ist, kann man den Sachverhalt auch formal beweisen. Das Verfahren hierzu sei aber nur kurz angedeutet:
Man betrachte noch einmal die erste Abbildung. Man erkennt leicht, dass die Dreiecke AFD und HGJ kongruent sind, da sie zwei Seiten (b und d) und den eingeschlossenen Winkel gleich haben. Deswegen gilt dann auch, dass die Strecken $\overline{FD}$ und $\overline{GJ}$ gleich lang sind. Genauso kann man auch zeigen, dass die Strecken $\overline{FG}$ und $\overline{DJ}$ gleich lang sein müssen, so dass letztendlich das Viereck $FGJD$ ein Parallelogramm ist.
Nun argumentiert man folgendermaßen: Wir wissen schon, dass man mit Parallelogrammen die Ebene lückenlos pflastern kann, also auch mit zum Parallelogramm $FGJD$ kongruenten Parallelogrammen. In dieser Pflasterung kann man dann auch problemlos bei jedem Parallelogramm das Dreieck GJH „herausschneiden“ und als das kongruente Dreieck FDA wieder anfügen. Genauso verfährt man mit den Dreiecken, die zu FGE bzw. DJC kongruent sind.
Auf diese Weise erhält man eine Pflasterung mit den gegebenen Vierecken.