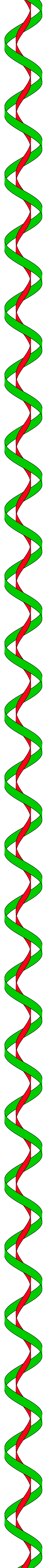


Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 100

Aufgabe 1

Wie viele Nullen hat die Zahl

$$(100!)^{100}$$

an ihrem Ende?

Lösung:

Die Zahl 100! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Die Anzahl der Nullen am Ende dieser großen Zahl ist gegeben durch die Anzahl der Faktoren $10 = 2 \cdot 5$, die in der Primfaktorzerlegung von 100! auftreten.
Von den 100 Zahlen $1, \ldots, 100$ liefern genau $(100/4 =)$ 20 einen oder mehrere Primfaktoren 5 (nämlich $5, 10, 15, \ldots, 100$). Genau $(100/25 =)$ vier davon liefern den Faktor 5 gleich doppelt (25, 50, 75, 100) und offensichtlich keine mehr als doppelt. Insgesamt ist 5 also 24-mal in der Primfaktorzerlegung vorhanden. Der Faktor 2 ist offenbar häufiger vorhanden, den Faktor 10 gibt es somit auch 24-mal, die überschüssigen Zweien spielen für unsere Frage keine Rolle.
Die Anzahl der Nullen am Ende von $(100!)^{100}$ ist das 100fache der Anzahl von Nullen bei 100!, also 2400.

Aufgabe 2

Zwei Papierschlangen hängen noch vom Karneval fein säuberlich geringelt in der Luft. Beide wickeln sie sich um dieselbe gedachte senkrechte Mittelachse, beide überwinden mit genau 10 gleichmäßigen Umdrehungen einen Höhenunterschied von einem Meter. (Vergleiche die Abbildung an der Seite.) Die eine hat den Radius 1 cm um die Mittelachse. Die andere ist (würde man die Schlangen gerade auf dem Boden auslegen) genau doppelt so lang wie die erste.
Welchen Radius hat sie?

Lösung:

Wir betrachten eine einzige Umdrehung um die gedachte Mittelachse, die also einen Höhenunterschied von 10 cm überwindet. Bügelt man die Luftschlange auf dem Bereich dieser einen Umdrehung nun flach, sodass sie sich nicht mehr wickelt, so beschreibt dieses Stück die Diagonale eines Rechtecks der Höhe 10 cm. Die Breite dieses Rechtecks ist gerade der Umfang des Kreises mit Radius 1 cm, also die hypothetische Länge des Luftschlangenstücks, wenn es keinen Höhenunterschied überwinden würde. Das Luftschlangenstück hat demnach in Zentimetern eine Länge von $\sqrt{(2\pi \cdot 1)^2 + 10^2}$. Gesucht ist nun derjenige Radius r in Zentimetern so, dass $2\sqrt{(2\pi \cdot 1)^2 + 10^2} = \sqrt{(2\pi \cdot r)^2 + 10^2}$

gilt. Quadrieren und anschließendes Umstellen liefern

$$r = \sqrt{4 + \frac{300}{(2\pi)^2}} \approx 3{,}41\,.$$

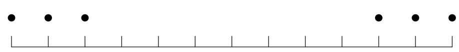
Diese Aufgabe erinnert an eine unserer ersten Aufgaben: Aufgabe 2 vom Aufgabenblatt 2 – eine Wendeltreppe am Göttinger Fernsehturm.

Aufgabe 3

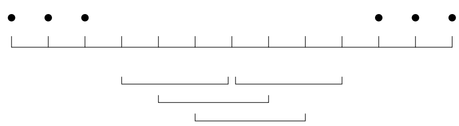
9 Kugeln rollen in jeweils ganzzahligem Abstand mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kugelbahn. Sie laufen über zwei Fugen, die den Abstand 3 voneinander haben. Man hört, während die Kugeln über die Fugen rollen, genau 16-mal ein Klacken (so, als würden 16 Kugeln mit der gleichen Geschwindigkeit mit jeweils Abstand 1 über eine einzelne Fuge rollen), das vielleicht ab und zu etwas lauter ist.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die räumliche Anordnung der 9 Kugeln?

Lösung:

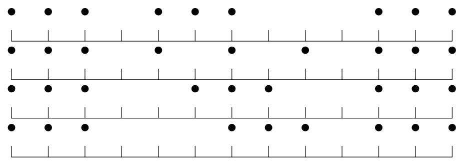
Eine Zeiteinheit sei der Abstand zwischen zwei Klacken. Das erste Klacken gebe es zum Zeitpunkt 1, es muss von der ersten Kugel bei der ersten Fuge stammen. Da diese Kugel erst zum Zeitpunkt 4 bei der zweiten Fuge ist, müssen die nächsten beiden Klacken von der zweiten und dritten Kugel kommen, die damit unmittelbar auf die erste folgen.
Das Klacken zum Zeipunkt 16 muss natürlich von der neunten Kugel auf der zweiten Fuge kommen; sie ist insbesondere 12 Zeiteinheiten hinter der ersten Kugel. Unmittelbar vor der letzten Kugel müssen ebenso wie am Anfang zwei Kugeln auf der Kugelbahn rollen, damit es auch zu den Zeitpunkten 15 und 14 ein Klacken gibt.
Schauen wir uns die bisher feststehende Anordnung an:



Auf die 7 freien Plätze müssen 3 Kugeln verteilt werden. Dabei gibt es genau dann zu jedem Zeitpunkt ein Klacken, wenn zu jeden Paar von Positionen, das den Abstand 3 hat, auf mindestens einer Stelle eine Kugel ist. 4 Paare sind noch nicht versorgt, sie sind hier eingezeichnet:



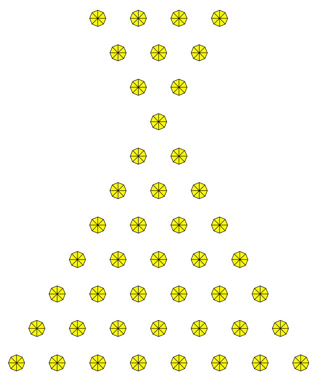
Da nur noch drei Kugeln zur Verfügung sind, muss eine auf der gemeinsamen Position der beiden äußeren Paare, also genau in der Mitte sein. Die beiden anderen Kugeln müssen die beiden anderen Paare „versorgen“; dazu haben sie jeweils zwei Möglichkeiten. Somit gibt es genau vier Möglichkeiten für die Verteilung der Kugeln.



Diese Aufgabe entstand angelehnt an die „Autobahn-Aufgabe“ Nummer 2 von Blatt 62.

Aufgabe 4

Ein Kloster in einem geheimnisvollen fernöstlichen Land pflegt die Kontemplation. Abends sitzen die Mönche zusammen im Kreis. Der Große Meister legt auf einem Brett zwei an der Spitze aneinandergefügte Dreiecke aus Perlen, die eine Sanduhr darstellen und damit das Verrinnen der Zeit symbolisieren. Die Dreiecke können dabei eine beliebige Größe haben, nur muss die Basislänge jeweils mindestens 2 sein.
Das Brett wird nun reihum gereicht, und der erste Mönch nimmt eine Perle vom Brett, der zweite zwei, der dritte drei usw. Zum Schluss nimmt der Große Meister n Perlen, wenn an dem Abend n Mönche anwesend sind. Wichtige Bedingung: Es dürfen immer nur (eventuell mehrere) ganze Reihen von Perlen genommen werden.
Der Große Meister ist gehalten, die Perlen so aufzulegen, dass die Bedingung eingehalten werden kann; das beste Zeichen für den kommenden Tag ist allerdings, wenn er am Ende das Brett komplett leerräumen kann. (Im Beispiel geht das für $n = 9$, indem die ersten 8 Mönche jeweils im unteren Bereich eine Zeile nehmen, der Große Meister nimmt dann den Rest.)



Zeige: Wenn sich $5k + 4$ Mönche mit $k \geq 1$ im Kreis befinden, dann kann der Große Meister voll Zuversicht in den nächsten Tag gehen.

Lösung:

Ein denkbares Szenario dafür, dass der Große Meister zuversichtlich in den nächsten Tag gehen kann, ist das folgende: Die ersten Mönche nehmen sich der Reihe nach je eine Zeile vom unteren Dreieck. Wenn das abgeräumt ist, nehmen sich die weiteren Mönche jeweils drei Zeilen vom oberen Dreieck.

Und zwar so, dass zwei der Zeilen von einem zum nächsten Mönch um je eine Perle länger werden und die dritte um eine Perle kürzer. Anders gesagt wird das obere Dreieck ohne die untere Spitze in drei gleich hohe Streifen eingeteilt, von denen zwei von unten und einer von oben abgearbeitet wird. In diesem Szenario hat das obere Dreieck also eine Größe von $3k+1$ Zeilen; die drei Bereiche gehen a) von der 2. bis zur $k+1$-ten Zeile, b) von der $k+2$-ten bis zur $2k+1$-ten Zeile und c) (rückwärts) von der $3k+1$-ten bis zur $2k+2$-ten Zeile. Der erste Mönch in dieser Gruppe nimmt die Zeilen 2, $k+2$ und $3k+1$, also $4k+5$ Perlen. Der letzte Mönch erhält $(k+1)+(2k+1)+(2k+2) = 5k+4$ Perlen. Wählt man für das untere Dreieck eine Größe von $4k+4$ Zeilen, so hat man damit offensichtlich eine Konstellation gefunden, die den Großen Meister in allen Belangen glücklich macht, wenn bei der Zeremonie $5k+4$ Mönche teilnehmen.

Bemerkung: Es gibt noch weitere Anzahlen an Mönchen, für die die Aussichten auf den nächsten Tag gut sind.

Mit dieser Aufgabe würdigten wir unsere lose Reihe mit Aufgaben aus dem fernöstlichen Kloster Wan-Dan auf den Aufgabenblättern 43 bis 51.