Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 101

Aufgabe 1

Professor Lipidum macht einen Versuch mit seinen Studenten. Er hat ein Glas mit 100 ml Wasser vor sich. Drei Studenten haben Gläser gleicher Größe mit Milch vor sich, einmal mit 1 %, einmal mit 2 % und einmal mit 3 % Fett.
Der Professor kippt 25 ml Wasser in das Milchglas des ersten Studenten, dieser rührt gut um. Dann kippt der erste Student aus seinem Glas 25 ml in das Glas des zweiten Studenten, der wiederum umrührt. Der zweite Student kippt ebenso 25 ml in das dritte Glas, und dieser Student kippt dann 25 ml in das Glas des Professors, so dass am Ende alle wieder 100 ml haben.
Der Professor stellt plötzlich fest, dass er vergessen hatte, vorher zu klären, welcher Student welches Glas vor sich hatte. Dafür misst er nun den Fettgehalt in seinem Glas nach dem Mischen: Genau 0,656 %.
Welches Glas stand vor welchem Studenten, und welchen Fettanteil haben sie jetzt in ihren Gläsern?

Lösung:

Es bezeichne a die Fettmenge (in Gramm) im Glas des ersten Studenten, b die Menge beim zweiten Studenten und c die Menge beim dritten Studenten. Die Zahlenwerte sind bei einer Füllung mit 100 ml gleich den Anteilen in Prozent – wobei wir einfach mal davon ausgehen, dass das spezifische Gewicht der Milch unabhängig von der Fettmenge und gleich dem des Wassers ist.
Nachdem der Professor Wasser in Glas 1 geschüttet hat, befinden sich also a Gramm Fett in 125 ml. In Glas 2 kommen davon $a/5$, es befinden sich dann $b + \frac{a}{5}$ Gramm Fett im Glas. Davon wird wiederum ein Fünftel in das dritte Glas gegeben, so dass dieses $c + \frac{b}{5} + \frac{a}{25}$ hat. Der Professor erhält schließlich

$$\frac{c}{5} + \frac{b}{25} + \frac{a}{125} = \frac{25c + 5b + a}{125} \quad \text{Gramm Fett.}$$

Er misst, dass dies

$$0{,}656 = \frac{82}{125} \quad \text{Gramm}$$

sind. Daher sind a, b und c so zu bestimmen, dass

$$25c + 5b + a = 82$$

ist.
Weil $5b+a \leq 5 \cdot 3 + 3 = 18$ ist, muss $25c \geq 82 - 18 = 64$ sein. Daher ist $c = 3$ und $5b + a = 7$. Es kann b nicht 2 sein, also verbleibt als einzige Lösung:

$$a = 2\,, \quad b = 1\,, \quad c = 3\,.$$

Im ersten Glas verbleiben $\frac{4}{5}a = \frac{8}{5} = 1{,}6$ Gramm Fett, im zweiten Glas $\frac{4}{5} \cdot \left(b + \frac{a}{5}\right) = \frac{28}{25} = 1{,}12$ Gramm und im dritten Glas (Abkürzung!) das Vierfache dessen, was der Professor am Ende hat, also $2{,}624 = \frac{328}{125}$ Gramm.

Aufgabe 2

Finde alle natürlichen Zahlen, die mit genau 4 Einsen und 4 Siebenen (und keinen weiteren Ziffern) geschrieben werden und die durch 101 teilbar sind.

Lösung:

Es gibt genau 18 Zahlen, die aus genau vier Einsen und vier Siebenen bestehen und durch 101 teilbar sind, nämlich die beiden Zahlen, bei denen die vier Einsen und die vier Siebenen genau abwechselnd vorkommen, und alle 16 Zahlen, bei denen unter der ersten und der fünften Ziffer und auch unter der jeweils i-ten und $(i+4)$-ten Ziffer (für $i = 2, 3, 4$) je genau eine Eins und eine Sieben vorkommt.

Sei x eine solche achtstellige Zahl, die mit genau vier Einsen und vier Siebenen geschrieben werden kann und die durch 101 teilbar ist. Seien $a_7, a_6, \ldots, a_1, a_0$ die Ziffern (von vorne nach hinten) von x, also

$$x = [a_7 a_6 \ldots a_1 a_0] = a_7 10^7 + a_6 10^6 + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0 .$$

Da x durch 101 teilbar ist, gilt $x \equiv 0 \bmod 101$ und somit

$$\begin{aligned} 0 \equiv x &\equiv (10a_7 + a_6)100^3 + (10a_5 + a_4)100^2 \\ &\quad + (10a_3 + a_2)100 + (10a_1 + a_0) \\ &\equiv (10a_7 + a_6)(-1)^3 + (10a_5 + a_4)(-1)^2 \\ &\quad + (10a_3 + a_2)(-1)^1 + (10a_1 + a_0)(-1)^0 \mod 101 . \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt das

$$10(a_7 + a_3) + (a_6 + a_2) \equiv 10(a_5 + a_1) + (a_4 + a_0) \mod 101 .$$

Da die a_i nur die Werte 1 und 7 annehmen, liegt jede der Summen zwischen 22 und 154 (jeweils inklusive der Grenzen) und beide Summen sind gerade. Daher gilt

$$10(a_7 + a_3) + (a_6 + a_2) = 10(a_5 + a_1) + (a_4 + a_0) .$$

Ist $a_7 = a_3 = 7$, so muss auch $a_5 = a_1 = 7$ gelten, sonst wäre die rechte Seite zu klein. Alle übrigen Ziffern müssen dann Einsen sein: $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 1$. Dies ergibt die Zahl 71717171.
Ist $a_7 = a_3 = 1$, so ergibt sich analog $a_5 = a_1 = 1$, $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 7$ und damit die Zahl 17171717.
Es bleiben die Möglichkeiten ($a_7 = 7$ und $a_3 = 1$) oder umgekehrt ($a_7 = 1$ und $a_3 = 7$). In beiden Fällen ist $a_7 + a_3 = 8$. Damit in der obigen Gleichung die rechte Seite die richtige Größenordnung hat, muss auch $a_5 + a_1 = 8$ gelten.

Und damit die Gleichung insgesamt stimmt, muss auch $a_6 + a_2 = a_4 + a_0 = 8$ sein. Somit erhalten wir für all diese Paare

$$a_{i+4} + a_i = 8 \qquad \text{bzw.} \qquad a_i = 8 - a_{i+4}$$

für $i = 0, 1, 2, 3$. Betrachten wir alle so beschriebenen Zahlen, so erhalten wir genau 16 Zahlen; unten sind alle aufgelistet.

Es bleibt zu zeigen, dass alle genannten Zahlen auch wirklich durch 101 teilbar sind. Es gilt

$$\begin{aligned} 71\,717\,171 &= 101 \cdot (7 \cdot 100\,010 + 1 \cdot 10\,001)\,, \\ 17\,171\,717 &= 101 \cdot (1 \cdot 100\,010 + 7 \cdot 10\,001) \end{aligned}$$

für die erstgenannten beiden Zahlen mit $a_7 = a_3$ und

$$\begin{aligned} [a_7a_6 \ldots a_1a_0] &= [a_7a_6a_5a_4] \cdot 10\,000 + (8888 - [a_7a_6a_5a_4]) \\ &= [a_7a_6a_5a_4] \cdot 9999 + 8888 \\ &= 101 \cdot ([a_7a_6a_5a_4] \cdot 99 + 88) \end{aligned}$$

für die 16 Zahlen mit $a_7 \neq a_3$.

Die gesuchten Zahlen sind also genau 71717171, 17171717 und

$$\begin{array}{llllll} 7777\,1111 & \text{und} & 1111\,7777\,, & 7771\,1117 & \text{und} & 1117\,7771\,, \\ 7717\,1171 & \text{und} & 1171\,7717\,, & 7711\,1177 & \text{und} & 1177\,7711\,, \\ 7177\,1711 & \text{und} & 1711\,7177\,, & 7171\,1717 & \text{und} & 1717\,7171\,, \\ 7117\,1771 & \text{und} & 1771\,7117\,, & 7111\,1777 & \text{und} & 1777\,7111\,. \end{array}$$

Dabei haben wir die Zahlen jeweils so in Paare x und y geschrieben, dass $x + y = 88\,888\,888 = 101 \cdot 88 \cdot 10\,001$ gilt.

Variante:
Sei eine Zahl x gegeben, die mit genau vier Einsen und vier Siebenen geschrieben wird. (Als Beispiel betrachten wir die Zahl 1771 7117, an der wir alle Umformungsschritte vorführen.)
Als Erstes ziehen wir von x die Zahl $1111\,1111 = 101 \cdot 110011$ ab. Damit ist das Ergebnis genau dann durch 101 teilbar, wenn x durch 101 teilbar ist, und es ist eine höchstens achtstellige Zahl, die mit genau vier Sechsen und sonst nur Nullen geschrieben wird ($1771\,7117 \to 660\,6006$). Diese Zahl teilen wir durch 6 (ergibt $660\,6006 \to 110\,1001$). Da 6 teilerfremd zu 101 ist, ändert sich auch dabei nichts an der Teilbarkeit durch 101. Das Ergebnis x_1 ist eine Zahl aus genau vier Einsen und sonst nur Nullen.
Jetzt schreiben wir x_1 als $x_1 = a \cdot 10000 + b$ mit höchstens vierstelligen Zahlen a und b. Es ist $x_1 = a \cdot (9999 + 1) + b = (a + b) + 101 \cdot 99 \cdot a$. Somit ist $x_2 = a + b$ genau dann durch 101 teilbar, wenn auch x_1 durch 101 teilbar ist (im Beispiel ergibt sich $110\,1001 \to 110 + 1001 = 1111$).
Die Zahl x_2 ist als Summe von zwei Zahlen entstanden, die nur Nullen und Einsen als Ziffern hatten. Bei der Addition entstanden daher keine Überträge,

und deswegen ist die Quersumme von x_2 gleich der Summe der Quersummen von a und b, also auch gleich der Quersumme von x_1 und damit gleich 4. Außerdem gilt insgesamt, dass x genau dann durch 101 teilbar ist, wenn x_2 dies auch ist.
Jede der gesuchten achtstelligen Zahlen führt also mit diesem Verfahren zu einer vierstelligen, durch 101 teilbaren Zahl mit Quersumme 4. Wir bestimmen daher zunächst die Menge dieser Zahlen und rechnen dann zurück, aus welchen achtstelligen Zahlen diese Zahlen entstehen.
Die vierstelligen durch 101 teilbaren Zahlen haben alle die Form $[cdcd]$. Ihre Quersumme ist $2c + 2d$. Damit gibt es genau drei Zahlen, die Ergebnis der Umformungen sein können: 202, 1111 und 2020.
Bei 202 und 2020 können die Zweien nur dadurch entstanden sein, dass zwei Einsen addiert wurden. Die Zahlen im Schritt davor müssen also 101 0101 bzw. 1010 1010 gewesen sein, was zu den Zahlen 1717 1717 und 7171 7171 führt (um x aus x_2 zurückzugewinnen, müssen wir aus jeder 1 eine 7 und aus jeder 0 eine 1 machen).
Bei 1111 kann jede der Ziffern 1 aus dem Ziffernblock a oder b stammen. Das ergibt $2^4 = 16$ Möglichkeiten und damit die restlichen schon in der ersten Lösung genannten Zahlen. Nach den obigen Überlegungen ist klar, dass mit $x_2 = 1111$ auch jedes rückwärts konstruierte x durch 101 teilbar ist und damit tatsächlich eine Lösung ist.

Bemerkung: Bei diesem Lösungsweg ist leicht zu erkennen, dass man auch zwei beliebige andere Ziffern vorgeben und dennoch den gleichen Lösungsweg nutzen kann, um die entsprechenden durch 101 teilbaren Zahlen zu finden. Die Lösungen haben in allen Fällen die gleiche Form.

Aufgabe 3

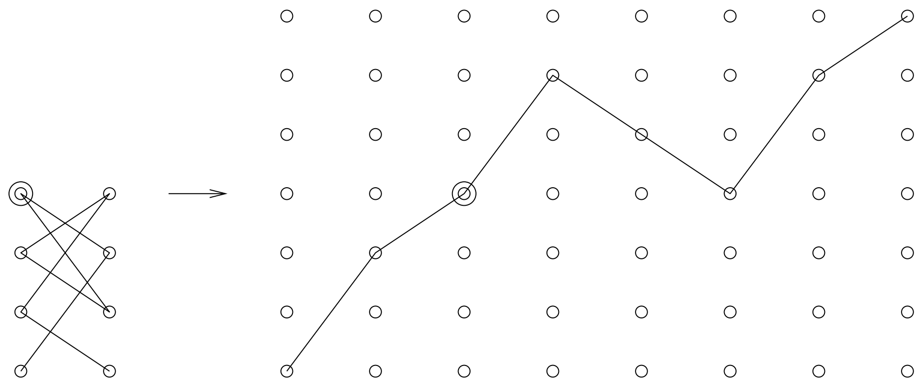
Wir üben mal, Schuhe zu binden ... Unser Schuh hat ganz klassisch zwei Reihen mit je vier Löchern, parallel und mit gleichem Abstand angeordnet. Der Schnürsenkel geht natürlich immer zwischen der rechten und der linken Seite hin und her, darf aber auch Löcher „überspringen".
Welche Möglichkeiten gibt es, die Schuhe so zu binden, dass die benötigte Länge an Schnürsenkel minimal wird? Welcher Teil des Schnürsenkels beim Sich-Kreuzen über welchem verläuft, soll dabei ohne Bedeutung sein.

Lösung:

Bemerkung vorab: In jedem Fall soll natürlich jedes der acht Löcher genau einmal benutzt werden. Es ist nur, abgesehen von den Startlöchern, völlig freigegeben, in welcher Reihenfolge die Löcher durchlaufen werden.

Den Verlauf eines Schnürsenkels durch die Löcher fassen wir als Weg (oder Streckenzug) durch die acht Löcher auf. Wir schauen ganz normal aufrecht stehend in Richtung unserer Füße und starten an dem linken Loch nahe am Bein, durchlaufen die sechs weiter entfernten Löcher in geeigneter Weise und enden an dem rechten Loch nahe am Bein.

Zur Bestimmung eines Schnürsenkelweges mit minimaler Länge betrachten wir auf dem Papier statt zweier vertikaler Reihen mit je vier Löchern acht vertikale Reihen mit je sieben Löchern. In dieses Raster bilden wir einen Weg des Schnürsenkels folgendermaßen ab: In der Papierebene starten wir beim Loch links unten. Jede Strecke des Schnürsenkels wird mit gleicher Länge in das Raster übertragen. Wenn aber beim Schuh eine Strecke nach links gezogen werden soll, spiegeln wir diese an der Vertikalen, gehen also im großen Raster in jedem der sieben Schritte eine Spalte weiter nach rechts. Und sobald die vierte Zeile das erste Mal erreicht ist (also beim Schuh die am weitesten vom Bein entfernte Lochzeile), drehen wir für alle folgenden Strecken die vertikale Richtung um. Das bedeutet, dass der Weg im großen Raster in jedem Fall in der oberen rechten Ecke endet.
Ein Beispiel, in dem zusätzlich das erste Erreichen der vierten Zeile markiert ist:

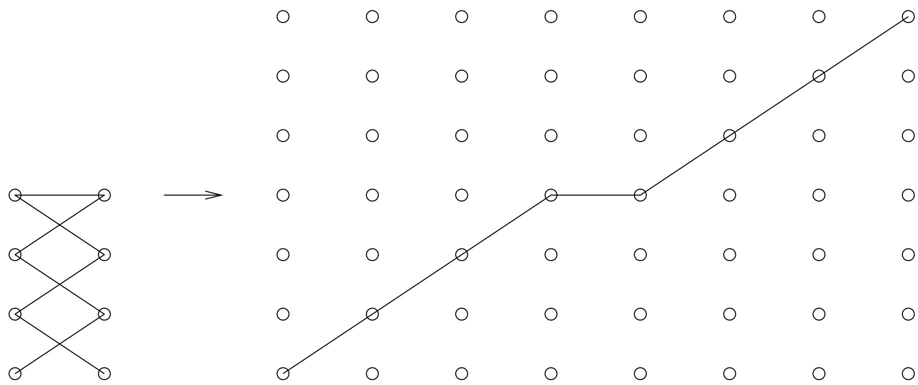


Jeder so abgebildete Weg ist Lösung der allgemeineren Aufgabe

> *„Zeichne einen Streckenzug im großen Raster, der links unten beginnt, mit jeder Strecke eine Spalte weiter nach rechts geht und der oben rechts endet.“*

Zudem haben der Schnürsenkelweg und sein Bild die gleiche Länge. Nun gehen wir so vor: Wir zeigen, wie lang ein kürzestmöglicher Weg bezüglich der zweiten Aufgabe ist. Außerdem zeigen wir, dass es einen Schnürsenkelweg gibt, der auf einen solchen kürzestmöglichen Weg abgebildet wird. Da die Weglänge erhalten bleibt, folgt, dass alle kürzestmöglichen Schnürsenkelwege mit dem angegebenen Verfahren auf einen kürzestmöglichen Weg in der allgemeineren Aufgabe abgebildet werden müssen.
Die kürzesten Wege im großen Gitter sind nahezu offensichtlich: Sie bestehen aus sechs Strecken, die bei einem Schritt nach rechts genau eine Zeile nach oben gehen, und einer Strecke, die nur nach rechts geht.
Das wollen wir auch gerne beweisen: Wir nehmen an, dass wir einen kürzestmöglichen Weg haben. Außerdem nehmen wir zunächst an, dass dieser Weg eine Strecke enthält, die nach unten geht. Weil der Weg in der rechten oberen Ecke endet, muss auf eine der nach unten gehenden Strecken noch eine nach oben gehende Strecke folgen, wobei zusätzlich zwischen diesen Strecken

entweder keine andere Strecke ist oder nur Strecken sind, die nur nach rechts gehen. Den gemeinsamen Punkt der beiden schrägen Strecken bzw. die geraden Strecken zwischen ihnen verschieben wir nun so lange nach oben, bis eine der beiden vormals schrägen Strecken nur nach rechts geht. Dabei sind offensichtlich beide Strecken echt kürzer geworden, der Gesamtweg also auch. Es folgt, dass ein kürzestmöglicher Weg keine nach unten führende Strecke haben kann.
Weil mit sieben Strecken nur sechs Zeilen nach oben gegangen werden soll, muss es in einem kürzestmöglichen Weg eine Strecke geben, die nur nach rechts geht. Man kann nun die Strecken so umsortieren, dass die erste Strecke nach rechts geht. Der Weg vom zweiten Loch bis zur rechten oberen Ecke geht dann sechs Spalten weiter nach rechts und sechs Zeilen nach oben. Die kürzeste Verbindung zwischen diesen beiden Punkten ist die Strecke zwischen ihnen. Diese Strecke berührt erfreulicherweise in jeder Spalte dazwischen einen Rasterpunkt. Weil wir gezeigt haben, dass ein kürzester Weg eine nach rechts gehende Strecke haben muss, ist damit klar, dass die anderen Strecken in einem kürzesten Weg alle genau eine Zeile nach oben gehen. Wo in diesem Weg die nach rechts gehende Strecke eingereiht ist, ist egal.
Nun gibt es genau eine Möglichkeit, einen Schuh so zu binden, dass das Bild dieses Weges einen kürzestmöglichen Weg im großen Gitter gibt, nämlich:



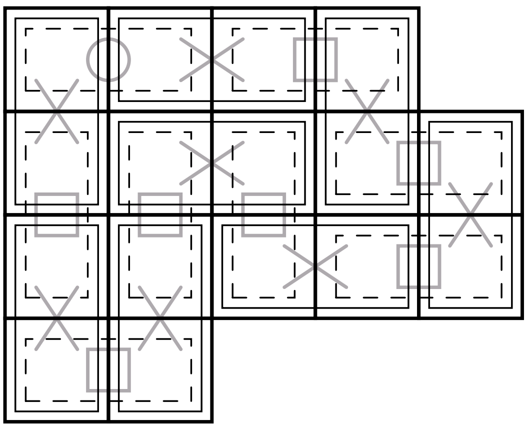
Es gibt keine weitere Möglichkeit, weil von den beiden Löchern zur Schuhspitze hin je nur eine mögliche Strecke ausgeht, die genau eine Zeile nach oben oder unten geht.

Aufgabe 4

Eine aus einigen Kästchen auf Kästchenpapier gezeichnete zusammenhängende Figur wird so mit (dünnen) 2×1-Plättchen belegt, dass jedes Feld von genau zwei Plättchen bedeckt wird. (Plättchen dürfen also überlappen, aber nicht über den Rand der Figur hinausragen.)
Beweise, dass man die Figur dann auch so mit Plättchen belegen kann, dass jedes Feld genau einmal abgedeckt wird.

Lösung:

Wir nehmen irgendeine Figur, die wie beschrieben so mit 2×1-Plättchen belegt ist, dass jedes Feld von genau 2 Plättchen bedeckt wird. Das Kästchenpapier färben wir zudem in Schachbrett-Art schwarz und weiß ein.
Wir starten bei irgendeinem weißen Feld und markieren eines der beiden Plättchen, die dieses Feld bedecken, mit einem Kreuz. Das andere wird mit einem Kreis markiert. Nun gehen wir zu dem zweiten (schwarzen) von dem mit einem Kreuz markierten Plättchen bedeckten Feld. Liegt auch das mit einem Kreis markierte Plättchen auf diesem Feld, können wir es entfernen, und alle bisher betrachteten Felder sind nun von genau einem Plättchen bedeckt. Liegt ein anderes Plättchen auf diesem Feld, markieren wir es mit einem Quadrat und gehen zu dessen zweitem Feld, das nun wieder weiß sein muss. Das zweite Plättchen zu diesem Feld kann nicht das mit einem Kreis markierte sein, weil dessen zweites Feld ein schwarzes sein muss. Von allen anderen markierten Plättchen haben wir schon beide Felder besucht. Daher ist das zweite Plättchen zum aktuellen Feld noch unmarkiert, und wir markieren es mit einem Kreuz. Dessen zweites Feld ist nun wieder ein schwarzes Feld, und es gibt zwei Möglichkeiten: Wenn wir auf ein unmarkiertes Plättchen stoßen, markieren wir es mit einem Quadrat und gehen in unserem Text zwei (Markierungs-)Schritte zurück. Wenn es aber schon markiert ist, muss es das mit einem Kreis markierte sein, weil dieses das einzige markierte Plättchen ist, dessen zweites Feld noch nicht untersucht wurde. Dann hat sich ein „Rundweg“ mit markierten Plättchen geschlossen. Dieser besteht aus einer geraden Anzahl an Plättchen und aus einer geraden Anzahl an Feldern.



Beispiel für einen Rundweg aus Plättchen

Die Plättchen mit einem Kreis oder Quadrat können wir löschen; danach sind alle beteiligten Felder von genau einem (mit einem Kreuz markierten) Plättchen bedeckt. Solange es noch Felder gibt, die von zwei Plättchen bedeckt sind, wiederholen wir das Verfahren. Offensichtlicherweise können sich die einzelnen Rundwege nicht überschneiden; daher bleibt nach endlich vielen Schritten eine komplette Überdeckung mit je genau einem Plättchen pro Feld übrig.