Beispiellösungen zu Blatt 102

Aufgabe 1

Fußball: Nils darf zwei Elfmeter auf das Tor von Lars schießen. Nils schießt immer in eine der Ecken; dabei schießt er in eine der Ecken mit doppelt so großer Wahrscheinlichkeit wie in jede andere. Lars weiß, dass Nils eine Lieblingsecke hat, weiß aber nicht, welche. Also wirft er sich beim zweiten Schuss in genau die Ecke, in die Nils beim ersten Mal geschossen hat.
Wir nehmen an, dass Nils den zweiten Schuss völlig unvoreingenommen schießt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt Lars beim zweiten Schuss die richtige Ecke?

Lösung:

Lars hält genau dann Nils' zweiten Schuss, wenn Nils beim zweiten Mal in dieselbe Ecke wie beim ersten Mal schießt.

Da Nils doppelt so oft in seine Lieblingsecke schießt wie in die anderen Ecken, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass Nils beim ersten Mal in seine Lieblingsecke schießt, $\frac{2}{5}$ und die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne der anderen drei Ecken $\frac{1}{5}$. Unabhängig vom ersten Schuss gilt das auch für den zweiten Versuch, wenn wir nur diesen betrachten.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er beide Male in seine Lieblingsecke schießt, beträgt daher $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er beide Male in eine andere Ecke schießt, beträgt für jede einzelne der drei anderen Ecken $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$.
Insgesamt beträgt also die Wahrscheinlichkeit, dass er zweimal in dieselbe Ecke schießt, und damit auch die Wahrscheinlichkeit, dass Lars Nils' zweiten Schuss hält:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{25} = 0{,}28\,.$$

Aufgabe 2

Fünf positive ganze Zahlen sollen in eine Reihe geschrieben werden, wobei jede Zahl so groß ist wie die Summe der Quersummen ihrer Nachbarn (die Randzahlen haben nur einen Nachbarn). Welches ist die kleinstmögliche Summe der Zahlen? Finde alle Möglichkeiten für die Zahlen für diese minimale Summe.

Lösung:

Wir bezeichnen die fünf Zahlen der Reihe nach mit a, b, c, d und e. Mit $Q(n)$ sei die Quersumme einer natürlichen Zahl n bezeichnet. Nach Voraussetzung gilt:

$$
\begin{aligned}
a &= Q(b)\,, &(1)\\
b &= Q(a) + Q(c)\,, &(2)\\
c &= Q(b) + Q(d)\,, &(3)\\
d &= Q(c) + Q(e)\,, &(4)\\
e &= Q(d)\,. &(5)
\end{aligned}
$$

Aus (1), (3) und (5) folgt unmittelbar

$$c = a + e\,. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$b = Q(a) + Q(c) = Q(Q(b)) + Q(c)\,.$$

Weil bekanntermaßen die Quersumme einer Zahl beim Teilen durch 9 denselben Rest lässt wie die Zahl selbst, folgt daraus, dass $Q(c)$ durch 9 teilbar ist. Damit ist auch c durch 9 teilbar und insbesondere ist

$$Q(c) \geq 9 \quad \text{und} \quad c \geq 9\,. \tag{7}$$

Daraus folgt mit (3), dass $Q(b)+Q(d)$ durch 9 teilbar ist, weswegen auch $b+d$ durch 9 teilbar ist. Aus (2) und (7) ergibt sich $b = Q(a)+Q(c) \geq Q(a)+9 > 9$ und ebenso aus (4) und (7) die Ungleichung $d > 9$. Zusammen mit der eben gezeigten Teilbarkeit durch 9 folgt $b + d \geq 27$. Insgesamt kann man also die Summe aller fünf Zahlen – unter Beachtung von (6) – abschätzen durch

$$a + b + c + d + e = 2c + b + d \geq 2 \cdot 9 + 27 = 45\,.$$

Wenn Gleichheit erreicht werden kann, dann nur dann, wenn alle zwischenzeitlich angeführten nicht echten Ungleichungen in Wahrheit Gleichungen sind, das heißt, wenn gilt:

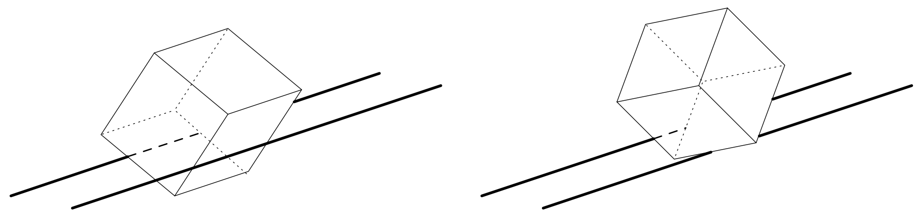
$$
\begin{aligned}
1 \leq a &\leq 8\,,\\
b &= 9 + a\,,\\
c &= 9\,,\\
d &= 27 - b = 18 - a\,,\\
e &= 9 - a\,.
\end{aligned}
$$

Nun kann man einfach alle acht Möglichkeiten für a ausprobieren und erkennt, dass jede Möglichkeit eine Lösung ergibt.

a	b	c	d	e
1	10	9	17	8
2	11	9	16	7
3	12	9	15	6
4	13	9	14	5
5	14	9	13	4
6	15	9	12	3
7	16	9	11	2
8	17	9	10	1

Aufgabe 3

In einem Park stehen zwei lange Geländer gleicher Höhe parallel zueinander mit einem Abstand von genau 1 Meter. Anna und Sophia haben einen riesigen Spielwürfel mit Seitenlänge 2 m. Sie wollen ihn so auf die beiden Geländer legen, dass der tiefste Punkt des Würfels möglichst tief liegt. Anna meint, dass man ihn dazu auf zwei benachbarte Flächen legen muss – dabei ist dann die Kante zwischen den beiden Flächen parallel zu den beiden Geländern und gleichzeitig die tiefste Linie. Sophia hingegen findet es besser, wenn auf einem Geländer eine Fläche liegt und auf dem anderen eine dazu senkrechte Kante. Dann ist offensichtlich die gemeinsame Ecke der am tiefsten liegende Punkt.



Welche von beiden Varianten liefert den tieferen tiefstliegenden Punkt?

Lösung:

Bei beiden Varianten kommt man gleich tief, nämlich 0,5 m.

Entscheidend für die Beantwortung der Frage ist der Winkel, den man an der unteren Kante beziehungsweise an der Spitze des Würfels sieht, wenn man parallel zu den Geländerstangen schaut. Im ersten Fall ist das bei der Würfelkante ganz offenbar ein rechter Winkel. Bei der zweiten Variante ist die Blickrichtung parallel zu derjenigen Würfelfläche, die auf dem Geländer aufliegt; das ist in dem Sinne gemeint, dass es eine Strecke auf der Würfelfläche gibt, die parallel zur Blickrichtung ist. Die Kante, die auf dem anderen Geländer liegt, steht senkrecht auf der genannten Fläche. Damit ist sie auch senkrecht zur Blickrichtung. Die aufliegende Würfelfläche enthält eine Strecke, die senkrecht sowohl zur Blickrichtung als auch – ganz automatisch – zu der aufliegenden Kante ist. Damit bilden die letztgenannte Strecke, gleichbedeutend mit der aufliegenden Würfelfläche, und die aufliegende Würfelkante in der Blickrichtung des Betrachters einen rechten Winkel.

Den ersten Fall kann man übrigens auch als Grenzfall des zweiten auffassen, indem man den Würfel um die aufliegende Kante dreht.

In Blickrichtung der Geländerstangen stellt also in jedem Fall der Teil des Würfels unterhalb der Stangen zwei Strecken mit einem rechten Winkel dar. Die Menge aller möglichen Orte, auf denen der Scheitelpunkt des Winkels liegen kann, ist bekanntermaßen der Thaleskreis über – hier – der Verbindungsstrecke der beiden Geländer. Der tiefstmögliche Ort wird erreicht, wenn ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck entsteht. Der Scheitelpunkt und damit der tiefste Punkt des Würfels ist dann halb so tief wie der Abstand der Geländerstangen – das sind 0,5 m.

Aufgabe 4

Auf einer australischen Insel blickt ein altes Kaninchenpärchen auf sein Familienleben zurück. Er sagt: „Schau, wir haben vier Kinder, und jedes Kind und jedes Kindeskind hat ebenso vier Kinder. Da werden wir bald den Überblick verlieren.“ Sie entgegnet: „Ja, aber bedenke, dass hier ja nicht beliebig viel Platz ist. Alle vier Kinder haben eigene Familien, aber schon in der Enkelgeneration ist unter je vier Enkeln ein Enkel, der mit einem anderen Enkel eine Familie gegründet hat. Bei den Urenkeln sind es zwei von vier, dann drei von vier und danach vier von vier – es werden dann alle Kaninchen auf dieser Insel Nachkommen von uns sein.
Wie viele Nachkommen des Kaninchenpaares leben in jeder Generation auf der Insel?

Lösung:

Die ersten Generationen müssen Schritt für Schritt gerechnet werden:

- In der ersten Generation gibt es 4 Kinder, die allesamt Familien mit Kaninchen gründen, die nicht vom ersten Paar abstammen.
- In der zweiten Generation gibt es daher $4 \cdot 4 = 16$ Enkel. Drei Viertel davon, das sind 12, bilden eine eigene Familie; die restlichen vier gründen je zu zweit eine Familie, das sind weitere zwei Familien. Insgesamt werden also 14 Familien gegründet.
- Die dritte Generation hat $4 \cdot 14 = 56$ Urenkel. 28 davon gründen eigene Familien, die anderen 28 gründen 14 weitere Familien. Insgesamt sind das 42 Familien.
- Aus diesen Familien entspringen $4 \cdot 42 = 168$ Ururenkel. Diese gründen $\frac{168}{4} + \frac{3}{4} \cdot 168 \cdot \frac{1}{2} = 42 + 63 = 105$ Familien.
- Damit gibt es in Generation 5 schon $4 \cdot 105 = 420$ Nachkommen.

Ab hier wird es einfacher, da alle Nachkommen nur untereinander Familien gründen: Bei jeweils 4 Kindern pro Familie verdoppelt sich mit jeder Generation die Familien- und damit auch die Nachkommenzahl. In der k-ten Generation, $k \geq 5$, gibt es daher $420 \cdot 2^{k-5}$ Nachkommen.