Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

# Beispiellösungen zu Blatt 105

## Aufgabe 1

Alva liebt Adventskalender. Aber sie hat keine Lust, die Türen von 1 bis 24 in der normalen Reihenfolge zu öffnen. Daher würfelt sie jeden Tag mit einem „Würfel“ mit 24 Flächen eine Zahl $k$ von 1 bis 24 aus. Sie öffnet dann das $k$-te noch verschlossene Türchen. Sollte sie beim Zählen über die Tür Nummer 24 hinauskommen, fängt sie vorne wieder an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie am Heiligabend das Türchen mit der Nummer 24 öffnen? Und mit welcher Wahrscheinlichkeit die Tür mit der Nummer 1?

**Lösung:**

Am ersten Tag darf Alva genau dann Türchen 1 öffnen, wenn sie eine 1 würfelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt genau $\frac{1}{24}$. Die Wahrscheinlichkeit, Tür Nummer 1 erst an einem der anderen Tage öffnen zu dürfen, beträgt also $1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$. Die gleichen Wahrscheinlichkeiten gelten für Türchen 24.

Am zweiten Tag darf Alva das erste noch nicht geöffnete Türchen – das ist das mit Nr. 1 oder Nr. 2 – genau dann öffnen, wenn sie eine 1 oder eine 24 würfelt, also in 2 von 24 Fällen. Alle anderen Türchen werden weiterhin nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{24}$ geöffnet. Die Wahrscheinlichkeit, Türchen 1 weder am ersten noch am zweiten Tag öffnen zu dürfen, beträgt somit

$$\left(1 - \frac{1}{24}\right)\left(1 - \frac{2}{24}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, Türchen 24 weder am ersten noch am zweiten Tag öffnen zu dürfen, beträgt hingegen

$$\left(1 - \frac{1}{24}\right)\left(1 - \frac{1}{24}\right).$$

Allgemein gilt am $n$-t-letzten Tag, dass noch $n$ Türchen geschlossen und bereits $24 - n$ Türchen geöffnet sind. Das erste der geschlossenen Türchen öffnet Alva an diesem Tag genau dann, wenn sie eine der $t$ Zahlen

$$1, n+1, 2n+1, \ldots, (t-1)n+1$$

mit $(t-1)n + 1 \leq 24$ und $tn + 1 > 24$ würfelt. Da $t$ und $n$ positive ganze Zahlen sind, gilt

$$\begin{aligned}
& tn + 1 > 24 \\
\iff \quad & tn \geq 24 \\
\iff \quad & t \geq \frac{24}{n} \\
\iff \quad & t \geq \left\lceil \frac{24}{n} \right\rceil .
\end{aligned}$$

(Dabei bezeichne $\lceil x \rceil$ das Aufrunden und weiter unten $\lfloor x \rfloor$ das Abrunden einer Zahl.) Das erste noch geschlossene Türchen am $n$-t-letzten Tag öffnet Alva also in $\left\lceil \frac{24}{n} \right\rceil$ von 24 Fällen. Das letzte noch geschlossene Türchen dieses Tages öffnet Alva genau dann, wenn sie eine der $t$ Zahlen

$$n, 2n, 3n, \ldots, tn$$

mit $tn \leq 24$ und $(t+1)n > 24$ würfelt. Da $t$ und $n$ positive ganze Zahlen sind, gilt

$$\begin{aligned} & tn \leq 24 \\ \Longleftrightarrow \quad & t \leq \frac{24}{n} \\ \Longleftrightarrow \quad & t \leq \left\lfloor \frac{24}{n} \right\rfloor . \end{aligned}$$

Das letzte noch geschlossene Türchen öffnet Alva also in $\left\lfloor \frac{24}{n} \right\rfloor$ von 24 Fällen.

Am 24. Dezember öffnet Alva schließlich das Türchen, das sie bisher noch nicht geöffnet hat. Die Nummer 1 ist das genau dann, wenn sie bisher nie das erste Türchen öffnen musste. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

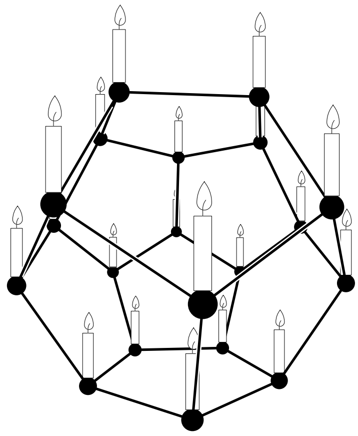
$$\begin{aligned} w(1) &= \left(1 - \frac{\left\lceil \frac{24}{24} \right\rceil}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{\left\lceil \frac{24}{23} \right\rceil}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{\left\lceil \frac{24}{22} \right\rceil}{24}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{\left\lceil \frac{24}{2} \right\rceil}{24}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{24}\right)^{12} \cdot \left(1 - \frac{3}{24}\right)^{4} \cdot \left(1 - \frac{4}{24}\right)^{2} \cdot \left(1 - \frac{5}{24}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{6}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{8}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{12}{24}\right) \\ &= \frac{23}{24} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{12} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^{12} \cdot 19 \cdot 23}{2^{46} 3^{16}} \\ &\approx 0{,}027177278 \approx 2{,}72\,\% . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, Türchen 24 als letztes zu öffnen, ist hingegen sogar

$$\begin{aligned} w(24) &= \left(1 - \frac{\left\lfloor \frac{24}{24} \right\rfloor}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{\left\lfloor \frac{24}{23} \right\rfloor}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{\left\lfloor \frac{24}{22} \right\rfloor}{24}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{\left\lfloor \frac{24}{2} \right\rfloor}{24}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{24}\right)^{12} \cdot \left(1 - \frac{2}{24}\right)^{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{24}\right)^{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{24}\right)^{2} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{6}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{8}{24}\right) \cdot \left(1 - \frac{12}{24}\right) \\ &= \left(\frac{23}{24}\right)^{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{4} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 23^{12}}{2^{54} 3^{18}} \\ &\approx 0{,}056316870 \approx 5{,}63\,\% . \end{aligned}$$

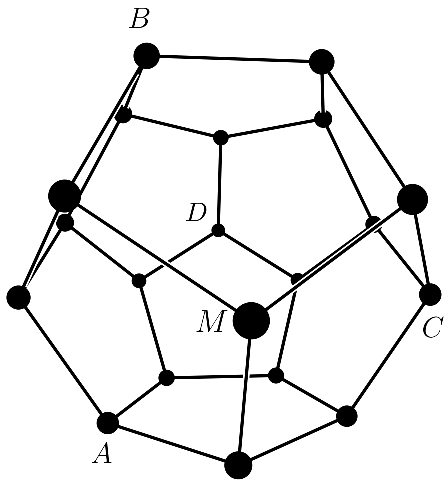
**Aufgabe 2**

Ein Dodekaeder hat 20 Ecken. Zeige, dass man aus diesen 20 Ecken fünf disjunkte Teilmengen aus jeweils vier Ecken bilden kann, die die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders bilden. Färbe nun die Ecken jedes Tetraeders mit derselben Farbe ein; aber jedes Tetraeder soll eine andere Farbe bekommen. Zeige, dass jedes Fünfeck des Dodekaeders auf diese Weise fünf verschiedenfarbige Ecken bekommt. Wie viele verschiedene Färbungsvarianten kommen bei den zwölf Fünfecken vor?



**Lösung:**

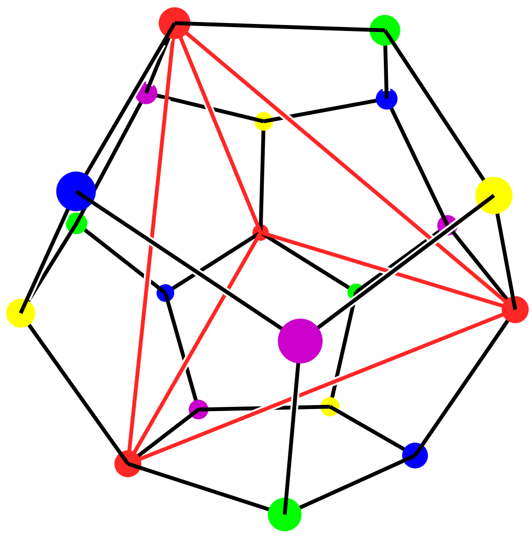
Wir betrachten eine beliebige Ecke $A$ des Dodekaeders. Von ihr gehen drei Kanten aus. Wir gehen eine dieser Kanten entlang bis zum nächsten Eckpunkt; dort gehen wir auf die von außen gesehen nach rechts abknickende Kante und an der nächsten Ecke auf die links abknickende Kante. An deren Endpunkt markieren wir den Eckpunkt $B$.
Mit den beiden anderen Kanten startend gehen wir entsprechende Wege: Kante – rechts abbiegen zur nächsten Kante – links abbiegen auf die dritte Kante, und wir erhalten so zwei weitere Punkte $C$ und $D$.
Nach Konstruktion und wegen der völligen Symmetrie des Dodekaeders sind die Punkte $B$, $C$ und $D$ gleich weit von $A$ entfernt. Nun bestimmen wir den Abstand von $B$ zu $C$, dazu betrachtet man am besten das Kantenmodell des Dodekaeders. Um von $B$ zu $C$ zu gehen, kann man einen genau entsprechenden Weg wie von $A$ zu $B$ gehen: Man geht über eine Kante, biegt an der nächsten Ecke auf die rechts abzweigende Kante und an der dann folgenden Ecke auf die nach links zeigende Kante. Damit ist $B$ von $C$ genauso weit entfernt wie von $A$. Die Längengleichheit wird auch darin offensichtlich, dass $A$, $B$ und $C$ drehsymmetrisch bezüglich des Punktes $M$ liegen.




Weiterhin aus Gründen der Drehsymmetrie haben $C$ und $D$ denselben Abstand wie $B$ und $C$, und $D$ und $B$ haben ebenso denselben Abstand. Damit hat jedes der Paare der Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ denselben Abstand, womit die Punkte ein regelmäßiges Tetraeder bilden. Übrigens ist erkennbar, dass es keinen Weg zwischen zwei dieser Punkte gibt, der nur zwei Kanten lang ist.

Nun betrachten wir eine beliebige Seite des Dodekaeders, also ein Fünfeck. Je zwei Ecken des Fünfecks sind höchstens zwei Kanten voneinander entfernt; damit können nicht zwei Ecken zu dem eben konstruierten Tetraeder gehören. Umgekehrt berührt jeder Punkt des Tetraeders drei Seitenflächen des Dodekaeders, so dass alle zwölf Seitenflächen einen Eckpunkt haben, der zum Tetraeder gehört.
Wir stellen das Dodekaeder nun mit einer Fünfecksseite auf einen Tisch. Die vier Punkte des Tetraeders liegen dann, wie man wieder am Kantenmodell sieht, in verschiedener Höhe über der Tischfläche. Das Dodekaeder hat auf der Fläche eine fünfzählige Drehsymmetrie. Über die dazugehörigen Drehungen überführen wir das erste Tetraeder somit, weil zudem dessen Punkte in verschiedener Höhe liegen, in insgesamt fünf verschiedene Tetraeder, bei denen keine Ecke mehrfach genutzt wird. Und weil das Dodekaeder 20 Ecken hat, ist damit jede Ecke zu einem Tetraeder zugeörig.
Damit folgt auch, dass jedes Fünfeck Ecken aller fünf Tetraeder hat.

Es ergibt sich außerdem, dass alle Tetraeder in der gleichen Weise aufgebaut sind. Dadurch sieht auch die Anordnung der Tetraeder von jeder Dodekaederseite aus betrachtet gleich aus – bis auf eventuell deren Färbung.



Nun betrachten wir die Verschiedenartigkeit der Färbungen der Fünfecke.
Zwei benachbarte Flächen können nicht gleich gefärbt sein. Denn die Farben der beiden gemeinsamen Ecken kommen in der jeweiligen Färbung in verschiedener Reihenfolge vor.
Können zwei Flächen, die nicht benachbart sind, aber einen gemeinsamen Nachbarn haben, gleich gefärbt sein? Wir nehmen es einmal an und können zudem annehmen, dass die beiden Flächen an die unten liegende Fläche angrenzen. Es würde dann also eine Drehung des Dodekaeders um zwei Fünftel die eine Fläche in die andere überführen. Das heißt, dass dabei die Färbung der einen Fläche durch eine Drehung in die Färbung der anderen Fläche überführt wird. Wegen der Symmetrie der gesamten Anordnung muss dann aber auch die Färbung der zweiten Fläche durch dieselbe Drehung in die Färbung der Fläche überführt werden, die weitere zwei Fünftel gedreht liegt. Sie hätte also auch die gleiche Färbung wie die erste Fläche. Damit ergibt sich ein Widerspruch, weil diese beiden Flächen benachbart sind.
Fast alle Paare von Flächen sind direkt oder über genau eine weitere Fläche benachbart. Es bleibt als einzige offene Frage, ob zwei Flächen gleich gefärbt sein können, die diametral gegenüberliegen.
Dazu betrachten wir noch einmal die Art, wie wir aus einem Tetraeder die vier anderen gewonnen haben: durch Kopieren und Drehen. Von oben betrachtet haben daher die obere Ebene und die untere Ebene die gleiche Färbung. Da man auf die untere Ebene aber von unten schauen muss, sind die Färbungen doch nicht gleich, denn die Reihenfolge kehrt sich ja genau um.

*Ergebnis:* Da keine zwei Flächen gleich gefärbt sind, gibt es zwölf verschiedene Färbungen.

*Bemerkungen und Weiterführendes:* Statt bei der Konstruktion rechts–links

auf den Kanten abzubiegen, kann man natürlich auch links–rechts abbiegen. Das liefert dann eine andere Art von Tetraedern, die selbstverständlich die gleiche Größe besitzt.
In einer vollständigen Zerlegung kann man diese beiden Arten nicht mischen, wie man sich leicht klarmachen kann, wenn man betrachtet, welche Punktepaare die Tetraeder jeweils in der obersten und untersten Ebene beanspruchen. Daher ist die betrachtete Anordnung bis auf Spiegelung auch die einzig mögliche und die Aussage, dass es zwölf Färbungen gibt, universell richtig. – Die zwölf Färbungen stellen genau alle *geraden* Permutationen untereinander dar; rein von fünf Farben her gesehen wären doppelt so viele Färbungen, also 24, möglich.

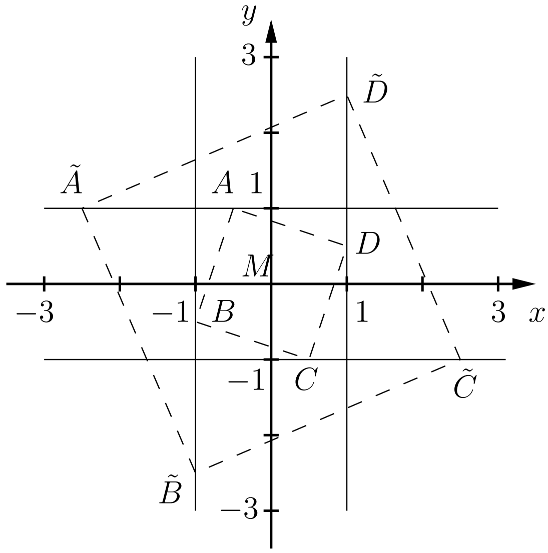
### Aufgabe 3

Der Punkt $M$ liege auf dem Ursprung $(0, 0)$ eines rechtwinkligen, 2-dimensionalen Koordinatensystems. Der Punkt $A$ bewege sich beliebig auf der Geraden $y = 1$. Auf welchen Kurven bewegen sich die Punkte $B$, $C$ und $D$, die jeweils so liegen, dass $ABCD$ ein Quadrat mit Mittelpunkt $M$ ist? Auf welchen Kurven bewegen sich die Punkte $B'$ und $D'$, die jeweils so liegen, dass $AB'MD'$ ein Quadrat ist?

### Lösung:

*Erster Teil.* Der Punkt $M$ ist hier der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ und damit das Zentrum der vierzähligen Drehsymmetrie. Durch eine Drehung um $M$ um 90, 180 bzw. 270 Grad im Gegenuhrzeigersinn wird $A$ auf $B$, $C$ bzw. $D$ abgebildet. Folglich wird auch die Kurve, auf der sich $A$ bewegt – hier also die Gerade $y = 1$ – auf jeweils die Kurve abgebildet, auf der sich der jeweilige Punkt bewegt. Es bewegt sich also

$B$ auf der Geraden $x = -1$,
$C$ auf der Geraden $y = -1$ und
$D$ auf der Geraden $x = 1$.

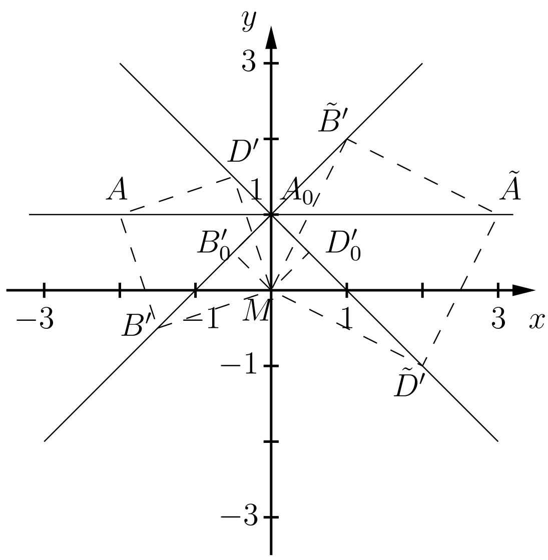


*Zweiter Teil.* Auch hier können wir mit Drehungen arbeiten. Der Punkt $M$ ist ein Eckpunkt der Quadrate. In jedem Quadrat $AB'MD'$ bildet eine Drehstreckung um $M$ um 45 Grad im Gegenuhrzeigersinn mit Streckfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ den Punkt $A$ auf den Punkt $B'$ ab. Im Uhrzeigersinn bildet die Drehstreckung um 45 Grad mit Streckfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ den Punkt $A$ auf den Punkt $D'$ ab. Daher entstehen die Kurven – es sind ebenfalls Geraden –, auf denen sich $B'$ und $D'$ bewegen, analog zum ersten Fall aus der jeweiligen Drehstreckung der Geraden $y = 1$. Da diese Gerade im Punkt $A_0 = (0, 1)$ senkrecht zur Strecke $MA_0$ verläuft, verläuft die Gerade zu $B'$ im Punkt $B'_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ senkrecht zur Strecke $MB'_0$. Sie hat folglich die Gleichung

$$y = x + 1\,.$$

Die Gerade für $D'$ verläuft durch den Punkt $D'_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ senkrecht zur Strecke $MD'_0$ und hat damit die Gleichung

$$y = -x + 1\,.$$




**Aufgabe 4**

Der Nikolaus ist stolz auf seinen neuen Schlitten. Ganze 105 Tage hat er daran gearbeitet! Besonders stolz ist er auf die vielen Glocken. Am $n$-ten Tag ($n = 1, \ldots, 105$) der Arbeit am Schlitten hat er nämlich jeweils genau $\mathrm{ggT}(n, 105)$ Glocken befestigt.
Wie viele Glocken hängen insgesamt am Schlitten?

**Lösung:**

Zu bestimmen ist die Zahl

$$S = \sum_{n=1}^{105} \mathrm{ggT}(n, 105)\,.$$

Die Zahl 105 hat die Primfaktorzerlegung

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \,.$$

Damit hat 105 genau die Teiler

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 21,\ 35 \text{ und } 105 \,.$$

Nur diese Zahlen können als ggT auftreten. Nun können wir zählen, wie viele Zahlen von 1 bis 105 einen bestimmten ggT $k$ mit 105 haben. Das sind genau alle Zahlen von 1 bis 105, die durch $k$ teilbar sind, aber keinen größeren ggT mit 105 haben. Den ggT $k$ haben also genau

$$|\{1 \le n \le 105 \mid k \mid n\}| - |\{1 \le n \le 105 \mid k \mid n \text{ und } \mathrm{ggT}(n, 105) > k\}|$$

Zahlen.
Beispielsweise gibt es drei Zahlen im betrachteten Bereich, die durch 35 teilbar sind, aber weil eine davon durch 105 teilbar ist, haben genau 2 Zahlen den ggT 35, entsprechend $5 - 1 = 4$ den ggT 21. Und genau $15 - 1 - 2 - 4$ haben den ggT 7. Absteigend kann man so die Anzahlen bestimmen.
Es ergibt sich als Lösungswert:

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 105 + (3-1) \cdot 35 + (5-1) \cdot 21 + (7-1) \cdot 15 + (15-1-2-4) \cdot 7 \\ &\quad + (21-1-2-6) \cdot 5 + (35-1-4-6) \cdot 3 \\ &\quad + (105-1-2-4-6-8-12-24) \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 105 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 15 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 5 + 24 \cdot 3 + 48 \cdot 1 \\ &= 585 \,. \end{aligned}$$