Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 106

Aufgabe 1

Die noch sehr kleine Helene entdeckt, dass man mit Fingern zählen kann. Zunächst streckt sie einfach für jede neue Zahl einen weiteren Finger, so dass sie von 0 bis 10 zählen kann. Schnell aber ist ihr das zu wenig. Daher macht sie aus dem Zählen ein kleines Spiel: Sie hält beide Hände halboffen vor sich, anfangs sind alle Finger krumm. Wenn Helene nun um eins weiterzählen will, stubst sie mit ihrem linken Daumen den Zeigefinger an. Ist der in diesem Moment krumm, streckt er sich einfach. Ist er aber gerade, so gibt er den Stubs weiter nach rechts und krümmt sich. Die nach rechts folgenden Finger tun es ihm gleich, so dass sich eine Kette von Stubsern ergibt, bis sich ein krummer Finger streckt.

Bis zu welcher Zahl kann Helene auf ihre Art zählen?

Lösung:

Helene hat das Binärsystem entdeckt! Sie kann bis 511 zählen.

Den linken Daumen benutzt Helene nur zum Anstubsen, wir lassen ihn aus der weiteren Betrachtung heraus. Für jeden Finger gibt es die zwei Möglichkeiten, entweder krumm oder gerade zu sein. Nun lassen wir einen krummen Finger eine Ziffer 0 und einen gestreckten Finger eine Ziffer 1 darstellen und betrachten diese Ziffernfolge – in umgekehrter Reihenfolge! – als Binärzahl. Der linke Zeigefinger stellt also die 1 dar, der Mittelfinger die 2, der Ringfinger die 4 usw. Dann entspricht das Anstubsen genau der Addition von 1, denn das ergibt bei Helene – exakt wie im Binärsystem – einen „Übertrag“ genau so lange, bis eine Ziffer 0 erreicht wird. Diese wird zu einer 1, alle vorigen Ziffern wechseln von einer 1 zu einer 0.
Da Helene den linken Daumen nicht als Ziffer benutzt, bleiben noch 9 Finger übrig, mit denen sie 9 Stellen einer Binärzahl darstellen kann.

Insgesamt kann sie so die $2^9 = 512$ Zahlen von 0 bis

$$511 = 2^9 - 1 = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^8$$

darstellen.

Aufgabe 2

Ein Pastor zählt mit besorgter Miene die kärgliche, nur aus Münzen bestehende Kollekte des sonntäglichen Gottesdienstes. Ein Freund will ihn aufmuntern: „Na, für den guten Zweck wird doch hoffentlich noch etwas zusammengekommen sein? – Pass auf, wenn es nicht möglich ist, höchstens fünf Prozent der Münzen so auszuwählen, dass sie zusammen mindestens neunzig

Prozent des Kollektenwertes ergeben, dann machen wir daraus so etwas wie das Gegenteil, dann nämlich stocke ich die Kollekte so auf, dass es von allen darin bereits vorkommenden Münzen gleich viele gibt!“
Missmutig hebt der Pastor ein Fünf-Cent-Stück auf, das ihm heruntergefallen war. Er zählt zu Ende: „20,13 Euro.“ Und plötzlich hellt sich seine Miene auf ...
Zeige, dass der Freund garantiert etwas bezahlen muss! Wie viel ist es maximal?

Lösung:

Wir nehmen zunächst einmal an, dass es möglich sei, dass der Freund nichts bezahlen muss. Dazu müssten also mindestens 90 Prozent des Kollektenwertes, das sind $0{,}9 \cdot 20{,}13 = 18{,}117$ Euro, von höchstens 5 Prozent der Münzen aufgebracht werden. Wir nennen einen solchen geeigneten, folglich mindestens 18,12 Euro betragenden Anteil der Kollekte mit A.
Mit 9 Münzen hat man höchstens 18 Euro. Daher besteht A aus entweder genau 10 Münzen, zu denen dann aber nicht das 5-Cent-Stück gehören kann, das der Pastor aufhebt, oder aus mindestens 11 Münzen. Im ersten Fall muss der Wert von A mindestens 18,20 Euro sein, denn nach wie vor müssen neun 2-Euro-Stücke enthalten sein.
Der Rest der Kollekte, wir nennen ihn B, besteht gemäß der 5-Prozent-Bedingung daher im ersten Fall aus mindestens 190 Münzen, zu denen mindestens ein 5-Cent-Stück gehört, und im zweiten Fall aus mindestens 209 Münzen. B hat folglich einen minimalen Wert von 1,94 beziehungsweise 2,09 Euro. Die Summe der Werte von A und B ist dann aber minimal $18{,}20 + 1{,}94 = 20{,}14$ beziehungsweise $18{,}12 + 2{,}09 = 20{,}21$ Euro.
Das ist mehr, als in der Kollekte vorhanden ist − damit haben wir einen Widerspruch erhalten, und folglich muss der Freund die Kollekte aufstocken.

Bleibt die Frage, wie viel der Freund maximal beisteuern muss. Dafür sind zwei Dinge entscheidend: Welche Münzen in der Kollekte vorhanden sind und wie viele es maximal von einer Sorte gibt.
Es ist offensichtlich, dass es nur dann Sinn hat (in der Sichtweise des auf Wohltaten hoffenden Pastors, versteht sich), mehr als eine Münze von einer Sorte zu haben, wenn diese Sorte die maximal vorhandene Anzahl an Münzen stellt. Von den 2-Cent- und den höherwertigen Münzen können nicht mehr als 1006 enthalten sein (1004, wenn man das Vorhandensein eines 5-Cent-Stückes berücksichtigt). Hingegen können selbst dann deutlich mehr als 1006 Münzen im Wert von 1 Cent vorhanden sein, wenn jede andere Münzsorte ebenfalls in der Kollekte vertreten ist. Daher kann eine maximal zuzahlungspflichtige Konstellation nur eintreten, wenn jede Münzsorte außer dem 1-Cent-Stück höchstens einmal vorkommt und von den 1-Cent-Münzen dann der Rest bestritten wird.
Die höherwertigen Münzen haben in der Maximalkonstellation einen Wert von höchstens $2 + 1 + 0{,}50 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 3{,}87$ Euro. Daher gibt es mindestens $2013 - 387 = 1626$ Stück an 1-Cent-Münzen.

Nun ist die Frage, ob eine bestimmte Münze im Wert von k Cent besser in der Kollekte enthalten ist oder nicht. Wenn sie enthalten ist, ersetzt sie damit k von den 1-Cent-Münzen. Dadurch verringert sich der fällige Aufstockungsbetrag um nicht mehr als $k \cdot 387$ Cent. Dadurch aber, dass sie enthalten ist und ihre Anzahl vom Freund des Pastors aufgestockt werden soll, erhöht sich dieser Betrag um mindestens $(1626 - 1) \cdot k$ Cent. Somit ist es zum Erreichen des Maximums notwendig, dass jede Münze enthalten ist.
Der maximal mögliche Aufstockungsbetrag ist folglich

$$1625 \cdot 3{,}87 = 6288{,}75 \text{ Euro.}$$

Hoffen wir mal für den Freund, dass nicht allzu viel Kleingeld in der Kollekte ist ...

Bemerkung: Wir argumentieren hier im Stile einer „Worst-Case-Argumentation“: Die Münzen werden sozusagen einzeln hintereinander darauf untersucht, ob sie im Klingelbeutel landen sollen oder nicht. Im Allgemeinen muss man bei einer solchen Vorgehensweise sehr vorsichtig sein: Denn es könnte passieren, dass es zunächst sinnvoll ist, ein 1-Euro-Stück im Beutel zu haben; dass danach noch die Hinzunahme weiterer Münzen sinnvoll ist; aber dass dann ein noch besseres Ergebnis erzielt werden kann, wenn das 1-Euro-Stück wieder ausgeschlossen wird. Hier ist eine solche Art der Argumentation zulässig, weil gezeigt wurde, dass es in *jeder* Konstellation der anderen Münzen sinnvoll ist, die gerade betrachtete Münze hinzuzunehmen. Daher spielt die Reihenfolge, in der die Münzen betrachtet werden, keine Rolle.

Aufgabe 3

Eine natürliche Zahl n heiße *kleinteilig* zum Faktor f, wenn sie im Dezimalsystem keine Ziffer Null hat, wenn $f \cdot n$ die gleiche Stellenanzahl wie n hat und dabei an jeder Stelle eine größere Ziffer als n aufweist. Beispielsweise ist 16 kleinteilig zum Faktor 3, weil $3 \cdot 16 = 48$ ist und $1 < 4$ sowie $6 < 8$ gilt.
Finde die kleinste kleinteilige Zahl zum Faktor 8, die eine Ziffer 5 hat!

Lösung:

Wir nehmen erst einmal an, dass es eine kleinteilige Zahl n zum Faktor 8 gibt, die wie gefordert eine Ziffer 5 hat. Die Position der 5 sei dabei die k-te Stelle von rechts. (Wir führen k nur ein, um manche Abschätzungen mathematisch glatt formulieren zu können.)
Das Achtfache von 5 ist 40. Damit n kleinteilig ist, muss der in der Dezimaldarstellung von n rechts von der 5 stehende Teil somit bei Multiplikation mit 8 einen Übertrag von mindestens 6 liefern. Wegen $\frac{6 \cdot 10^{k-1}}{8} = 0{,}75 \cdot 10^{k-1}$ muss der rechts von der 5 stehende Zahlenteil mindestens $7{,}5 \cdot 10^{k-2}$ sein. Die Ziffer direkt rechts von der 5 muss daher eine 7, 8 oder 9 sein. Eine 9 scheidet schon einmal deswegen aus, weil es keine größere Ziffer als 9 gibt. Wäre die Ziffer eine 7, so wäre von den Ziffern rechts von der 7 nach der obigen Rechnung ein Übertrag von mindestens 4 nötig, um den geforderten Übertrag für die k-te Stelle zu bekommen. Damit dann aber n auch an der $(k-1)$-ten Stelle die Bedingung der Kleinteiligkeit erfüllt, das heißt, dass $8n$ dort eine Ziffer größer als 7 hat, müsste der Übertrag mindestens 12 betragen. Da nur mit 8 multipliziert wird, ist das nicht möglich.

Damit muss die $(k-1)$-te Ziffer, also die Ziffer rechts von der 5, eine 8 sein.
Nun ist $8 \cdot 58 = 464$. Für die $(k-1)$-te Stelle ist also ein Übertrag von exakt 5 von den rechten $k-2$ Ziffern nötig, weil ja nur die 9 eine größere Ziffer als die 8 ist. Wegen $\frac{5 \cdot 10^{k-2}}{8} = 0{,}625 \cdot 10^{k-2}$ und $\frac{6 \cdot 10^{k-2}}{8} = 0{,}75 \cdot 10^{k-2}$ kommen für die $(k-2)$-te Ziffer nur eine 6 oder eine 7 in Frage. Bei einer 6 ergibt sich wegen $8 \cdot 6 = 48$ das gleiche Problem wie oben bei der 7: die Ziffern rechts von der 6 müssten einen Übertrag von 9 liefern, das geht nicht.
Damit kann die $(k-2)$-te Ziffer nur eine 7 sein.
Es ist $8 \cdot 587 = 4696$. An der Stelle der 7 ist die Bedingung der Kleinteiligkeit noch nicht erfüllt, also muss es rechts davon noch eine weitere Ziffer geben. Wählt man hier die 3, so ist wegen $8 \cdot 5873 = 46984$ die Kleinteiligkeitsbedingung für die rechten vier Ziffern erfüllt. Eine 2 oder eine 1 alleine können nicht den benötigten Übertrag liefern, so dass die 3 die kleinste Wahl ist, bei der keine weitere Ziffer nach rechts zwingend nötig ist.
Die Wahl der Ziffern links von der 5 ist unabhängig von der Wahl der Ziffern rechts von der 7. Für das kleinstmögliche n muss also die Ziffer 3 als $(k-3)$-te Ziffer, also als erste Ziffer von rechts gewählt werden.
Die meiste Arbeit ist damit schon erledigt. Denn links von der 5 kann man einfacher argumentieren: Da der Zahlenteil 5873 bei Verachtfachung einen Übertrag von 4 liefert, liefert jede Wahl der $(k+1)$-ten Ziffer einen weiteren Übertrag, so dass es keine Zahl n geben kann, bei der links von der 5 nur eine Ziffer steht. Umgekehrt aber kann man nachrechnen, dass die kleinstmögliche Wahl von zwei Ziffern (1 und 1) links von der 5 eine Lösung liefert, die deswegen auch schon die kleinste Lösung ergibt.
Ergebnis: Die kleinste kleinteilige Zahl mit einer Ziffer 5 ist

$$n = 115873\,, \text{ und es ist}$$
$$8 \cdot 115873 = 926984\,.$$

Übrigens ist das sogar die einzige kleinteilige Zahl zum Faktor 8, die eine 5 enthält und sechs Stellen hat.

Aufgabe 4

Ein Dreieck heiße *dickflächig*, wenn die Maßzahl seines Flächeninhalts größer als die Maßzahl seines Umfangs ist.
Finde alle dickflächigen Dreiecke, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten aus dem Intervall $[0, 7]$ haben!

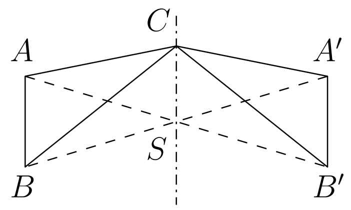
Lösung: Es gibt, durch Drehungen und Spiegelungen ineinander überführbare Dreiecke mitgezählt, 92 dickflächige Dreiecke im vorgegebenen Punktegitter. Unterscheidet man nicht zwischen kongruenten Dreiecken, bleiben 12 verschiedene Formen übrig.

Als Erstes benötigen wir eine Aussage, die wir sicherheitshalber auch noch beweisen wollen:

Hilfssatz: Es sei ein positiver Flächeninhalt F fest gegeben. Unter allen Dreiecken, die den Flächeninhalt F haben, ist dasjenige mit dem kleinsten Umfang ein gleichseitiges Dreieck. (1)

Zum *Beweis* dieses Hilfssatzes stellen wir zunächst fest, dass es überhaupt ein Dreieck mit minimalem Umfang geben muss; denn es ist offensichtlich nicht möglich,

eine gegebene Fläche mit einem beliebig kleinen Umfang egal welcher Form zu umschließen; und kein Entartungsfall eines Dreiecks hat einen positiven Flächeninhalt.[1]
Sei ein beliebiges Dreieck ABC mit Inhalt F gegeben. Wir spiegeln ABC an der Parallelen zu (AB) durch C und erhalten ein kongruentes Dreieck $CB'A'$. Der Abstand der beiden Parallelen (AB) und $(A'B')$ ist nur von F und $|AB|$ abhängig, also unabhängig von der Lage von C, zudem ist $ABB'A'$ ein Rechteck. Wir definieren S als Diagonalenschnittpunkt von $ABB'A'$.



Nach der Dreiecksungleichung ist der Streckenzug A–C–B' nicht kürzer als der Streckenzug A–S–B', entsprechend ist der Streckenzug B–C–A' nicht kürzer als B–S–A', wobei Gleichheit jeweils nur gilt, wenn C und S zusammenfallen. Der doppelte Umfang von ABC setzt sich nun aber zusammen aus $|AB|$, $|A'B'|(= |AB|)$ und der Länge der beiden Streckenzüge A–C–B' und B–C–A'. Das gleichschenklige Dreieck ABS ist daher bis auf Kongruenz dasjenige Dreieck mit einer Seite $|AB|$ und dem Flächeninhalt F, das den kleinsten Umfang hat.
Ein Dreieck, das zum Flächeninhalt F den kleinsten Umfang hat, kann somit nur zu jeder seiner Seiten als Basis gleichschenklig sein. Damit ist es gleichseitig.
Ende des Beweises des Hilfssatzes.

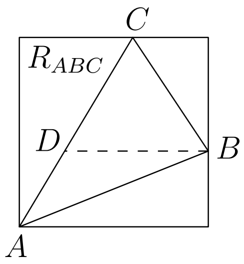
Wir suchen als Nächstes das kleinste dickflächige Dreieck, das es überhaupt gibt. Nach dem Hilfssatz (1) muss es gleichseitig mit einer Seitenlänge a sein, und es muss dann offensichtlich die Maßzahl des Flächeninhalts *gleich* derjenigen des Umfangs sein, also muss $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3a$ sein. Daraus folgt:

$$a = 4\sqrt{3} = \sqrt{48} \approx 6{,}928 \quad \text{und} \quad F_{\min} = 3a \approx 20{,}785 > 20{,}7\,. \tag{2}$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch Dreiecke mit Eckpunkten auf dem gegebenen Gitterausschnitt, also mit ganzzahligen Koordinaten im Intervall $[0, 7]$. Die Koordinaten eines solchen Gitterpunktes P seien (x_P, y_P).

Jedes Dreieck ABC auf dem Punktegitter besitzt ein eindeutiges *einhüllendes Rechteck* R_{ABC}, dessen Eckpunkte auf Gitterpunkten liegen, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, das ABC enthält und das minimal mit dieser Eigenschaft ist. Insbesondere liegt auf jeder Seite von R_{ABC} mindestens ein Eckpunkt von ABC.
Sei ABC so bezeichnet, dass $y_A \leq y_B \leq y_C$ gilt. Sei BD die zur x-Achse parallele Strecke, die entsteht, wenn man die zur x-Achse parallele Gerade durch B mit ABC schneidet. (Eventuell ist dann D gleich A oder C.)

[1]Die Feststellung der Existenz ist für die folgende Argumentation keine Nebensache; denn ohne diese Feststellung würde man eventuell zwar ein Dreieck finden, das verglichen mit nicht sonderlich anders geformten Dreiecken optimal ist, das aber nicht zwingend besser als *alle* Dreiecke die gesuchte Bedingung erfüllt.



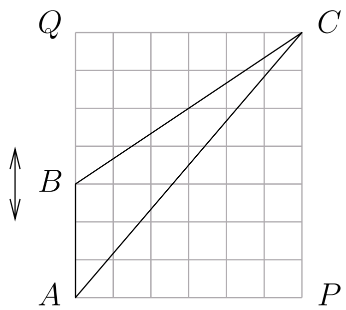
Dann ist der Flächeninhalt F_{ABC} von ABC gleich $\dfrac{|BD| \cdot (y_C - y_A)}{2}$. (3)

Die Breite von R_{ABC} ist größer gleich $|BD|$, die Höhe ist gleich $y_C - y_A$, daher gilt:

$$F_{ABC} \leq \frac{1}{2} F_{R_{ABC}} . \tag{4}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir ein dickflächiges Dreieck so um ein Vielfaches von 90° drehen und gegebenenfalls noch verschieben, dass ein Eckpunkt auf $(0,0)$ liegt. Dies sei der Punkt A.
Wegen (4) können nicht alle Koordinaten von A, B und C kleiner als 7 sein, denn dann wäre $F_{ABC} \leq 18$ im Widerspruch zu (2). Daher ist R_{ABC} entweder ein 6×7- oder ein 7×7-Rechteck.

Fall I. R_{ABC} ist ein 6×7-Rechteck. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Breite von R_{ABC} den Wert 6 hat. Außerdem sei $y_B \leq y_C$ und somit $y_C = 7$. Wegen (2) und (3) muss $\frac{|BD| \cdot 7}{2} > \frac{41}{2}$ und damit $|BD| > 5{,}8$ sein. Folglich ist $x_B = 0$ oder $x_B = 6$. Im ersten Unterfall ist zwingend $x_C = 6$.

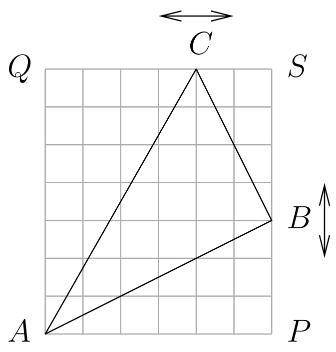


Es ergibt sich mit (2):

$$\begin{aligned} 20{,}5 < F_{ABC} &= F_{R_{ABC}} - F_{APC} - F_{BCQ} \\ &= 6 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (7 - y_B) \\ &= 21 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (7 - y_B) \end{aligned}$$

Daraus folgt $y_B = 7$ und $F_{ABC} = 21$. Der Umfang von ABC ist jedoch $U_{ABC} = 6 + 7 + \sqrt{85} \approx 22{,}22 > 21$.

Im zweiten Unterfall ist $x_B = 6$. Hier berechnet sich der Flächeninhalt von ABC so:



$$
\begin{aligned}
20{,}5 < F_{ABC} &= F_{R_{ABC}} - F_{APB} - F_{ACQ} - F_{BSC} \\
&= 6 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot x_B \cdot y_B - \frac{1}{2} \cdot x_C \cdot y_C - \frac{1}{2} \cdot (x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B) \\
&= 42 - \frac{1}{2} \cdot (x_B \cdot y_C + x_C \cdot y_B) \\
&= 42 - \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 7 + x_C \cdot y_B) \\
&= 21 - \frac{x_C \cdot y_B}{2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Daher muss $x_C = 0$ oder $y_B = 0$ sein. In allen diesen Fällen ist $F_{ABC} = 21$.
Fall I.1: $x_C = 0$. Es ist $U_{ABC} = 7 + \sqrt{36 + y_B^2} + \sqrt{36 + (7 - y_B)^2}$. Aus Symmetriegründen reicht es, $y_B \leq 3$ zu betrachten. Wir rechnen nach:

y_B	$U_{ABC} \approx$
0	22,22
1	21,57
2	21,13
3	20,92

Damit haben wir ein dickflächiges Dreieck gefunden. Durch Drehen, Spiegeln und Verschieben innerhalb des 7×7-Gitters kommen wir auf 16 kongruente Exemplare.
Fall I.2: $y_B = 0$. Es ist $U_{ABC} = 6 + \sqrt{49 + x_C^2} + \sqrt{49 + (6 - x_C)^2}$. Aus Symmetriegründen reicht es, $x_C \leq 3$ zu betrachten. Wir rechnen ebenso nach:

x_C	$U_{ABC} \approx$
0	22,22
1	21,67
2	21,34
3	21,23

In diesem Unterfall gibt es also keine Lösung.

Fall II. R_{ABC} ist ein 7×7-Rechteck. Wie im Fall I können wir $y_B \leq y_C = 7$ setzen, und es muss dann ebenso $|BD| > 5{,}8$ sein. Damit ist $x_B \in \{0, 1, 6, 7\}$. In den Fällen $x_B = 0$ und $x_B = 1$ muss $x_C = 7$ sein. Durch eine Drehung um $180°$ und Vertauschen der Bezeichnungen von A und C können wir diese Fälle auf

Unterfälle aus den Fällen $x_B = 7$ bzw. $x_B = 6$ zurückführen. Es bleiben also noch zwei Fälle.
Fall II.1. $x_B = 6$. Es muss dann $x_C = 7$ sein, so dass AC die Winkelhalbierende des Koordinatensystems ist. Daher ist in der Bezeichnung von (3) der Punkt D gleich (y_B, y_B) und also $|BD| = |6 - y_B|$. Um (2) und (3) zu erfüllen, muss daher $y_B = 0$ sein. Es ist daher $F_{ABC} = 21$ und $U_{ABC} = 6 + \sqrt{98} + \sqrt{50} \approx 22{,}97$, womit sich keine Lösung ergibt.
Fall II.2. $x_B = 7$. Ganz entsprechend wie bei (5) gilt hier für den Flächeninhalt:

$$F_{ABC} = 24{,}5 - \frac{x_C \cdot y_B}{2} \,.$$

Um (2) zu erfüllen, muss $x_C \cdot y_B \leq 7$ sein. Wir berechnen die Fälle systematisch, wobei es aus Symmetriegründen ausreicht, die Fälle mit $x_C \geq y_B$ zu betrachten, und im Fall $y_B = 0$ reicht es ebenso wegen Symmetrie, $x_C \leq 3$ zu untersuchen. Der Umfang berechnet sich nach $U_{ABC} = \sqrt{7^2 + y_B^2} + \sqrt{x_C^2 + 7^2} + \sqrt{(7 - x_C)^2 + (7 - y_B)^2}$. In der letzten Spalte der Tabelle ist angegeben, wie viele kongruente Exemplare der dickflächigen Dreiecke es gibt.

y_B	x_C	$F_{ABC} =$	$U_{ABC} \approx$	dickflächig?	Anzahl
0	0	24,5	23,90	ja	4
0	1	24,5	23,29	ja	8
0	2	24,5	22,88	ja	8
0	3	24,5	22,68	ja	8
1	1	24	22,63	ja	4
1	2	23,5	22,16	ja	8
1	3	23	21,90	ja	8
1	4	22,5	21,84	ja	8
1	5	22	21,998	ja	8
1	6	21,5	22,37	nein	–
1	7	21	22,97	nein	–
2	2	22,5	21,63	ja	4
2	3	21,5	21,30	ja	8

Zusammen mit der einen Lösung aus Fall I.1 ergibt das wie behauptet 12 verschiedene Formen mit insgesamt 92 verschiedenen Anordnungen.
Zum Abschluss zeigen wir alle möglichen Formen. Die Lagen von kongruenten Dreiecken sind dabei durch die Lage eines ausgewählten Eckpunktes angedeutet; bei gleichschenkligen Dreiecken ist das immer der Punkt gegenüber der Basis.