Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 107

Aufgabe 1

Konstruiere eine Menge M aus 107 positiven ganzen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Keine zwei der Werte $\operatorname{ggT}(a, b)$ mit $a, b \in M$ und $a \leq b$ sind gleich.

Lösung:

Lösungsvariante 1: Wir bezeichnen mit $p_1, p_2, \ldots, p_{107}$ genau 107 paarweise verschiedene Primzahlen. Dann setzen wir für $i = 1, \ldots, 107$

$$a_i = p_1 p_2 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_{107}\,.$$

Die Schreibweise $\widehat{p_i}$ soll dabei heißen, dass genau der Faktor p_i ausgelassen wird.
Dann gilt für $i = j$ offensichtlich:

$$\operatorname{ggT}(a_i, a_i) = a_i = p_1 p_2 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_{107}\,.$$

Und für $i < j$ gilt fast ebenso offensichtlich:

$$\operatorname{ggT}(a_i, a_j) = p_1 p_2 \ldots \widehat{p_i} \ldots \widehat{p_j} \ldots p_{107}\,.$$

Da die Primfaktorzerlegung von positiven ganzen Zahlen eindeutig ist, sind wie gefordert alle diese Zahlen verschieden.

Lösungsvariante 2: Es geht auch mit nur sehr wenigen verschiedenen Primzahlen! Wir setzen für $i = 1, \ldots, 107$:

$$b_i := 2^i 3^{107-i}\,.$$

Für $i \leq j$ gilt dann:

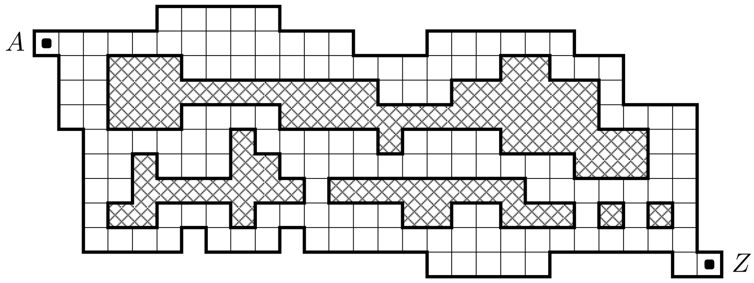
$$\operatorname{ggT}(b_i, b_j) = 2^i 3^{107-j}\,.$$

Mit der gleichen Begründung wie oben sind alle diese Zahlen verschieden.

Bemerkung: Die eingesetzten Zahlen sind bei der zweiten Variante zwar wesentlich kleiner als bei der ersten, aber immer noch sehr groß. Das größte b_i ist $b_1 \approx 7{,}5 \cdot 10^{50}$. Wir könnten problemlos alle b_i noch durch 2 teilen, das ergibt ebenso eine Lösung; in ihr sind die Zahlen jedoch nicht wesentlich kleiner, dafür ist die Notation ein klein wenig länger. Man kann aber das Prinzip von zwei gegenläufig in größerer beziehungsweise kleinerer Potenz auftretenden Primfaktoren noch nach Art des Dualsystems verfeinern und käme damit in Regionen spürbar unter einer Milliarde. Dies exakt zu beschreiben würde hier allerdings den Rahmen sprengen.

Aufgabe 2

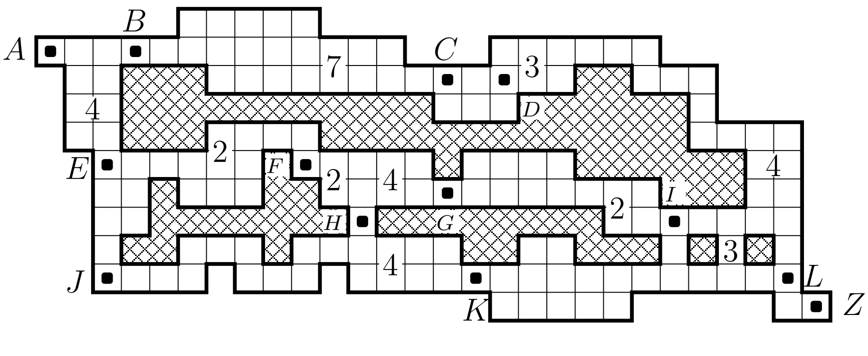
Auf dem abgebildeten Spielfeld kann sich eine Figur immer genau von einem Feld auf eines der maximal vier über eine Kante benachbarten Felder bewegen.



Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Figur von A nach Z auf einem kürzestmöglichen Weg zu bewegen?

Lösung:

Wir markieren auf dem Spielfeld einige weitere Punkte. Außerdem gibt es Bereiche, bei denen die „Straße“ breiter als ein Feld wird. Wenn das Abrücken von der hauptsächlichen Gehrichtung offensichtlich einen Umweg bedeutet (wie zum Beispiel zwischen den Punkten C und D), dann ignorieren wir das. Alle anderen solchen Bereiche sind so gestaltet, dass man genau einen Schritt „zur Seite“ tun muss; man hat genau die Wahl, wann man diesen Schritt macht, dazu gibt es genau so viele Möglichkeiten, wie der Bereich in Gehrichtung lang ist. Diese Zahl schreiben wir jeweils in einen solchen Bereich. Auch den Bereich zwischen I und L können wir so behandeln. Der sich an F rechts anschließende Bereich trägt zwei Zahlen, die je nachdem gelten, ob man über G oder über H weitergehen will.



Der Weg von E über J nach K ist 21 Kästchen lang, der über F und H führende Weg dagegen nur 19 Kästchen. Damit kann kein kürzestmöglicher Weg über J führen. Hingegen sind alle verbliebenen drei Hauptvarianten A–B–C–Z, A–E–F–G–Z und A–E–F–K–Z jeweils 38 Kästchen lang.

Für jede der Varianten ergibt sich die Anzahl der Wege im Detail als Produkt der Möglichkeiten in den breiteren Bereichen, die auf dem Weg liegen. Das sind:

$$\begin{aligned} A\text{–}B\text{–}C\text{–}Z: &\quad 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84\,, \\ A\text{–}E\text{–}F\text{–}G\text{–}Z: &\quad 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 192\,, \\ A\text{–}E\text{–}F\text{–}K\text{–}Z: &\quad 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 64\,. \end{aligned}$$

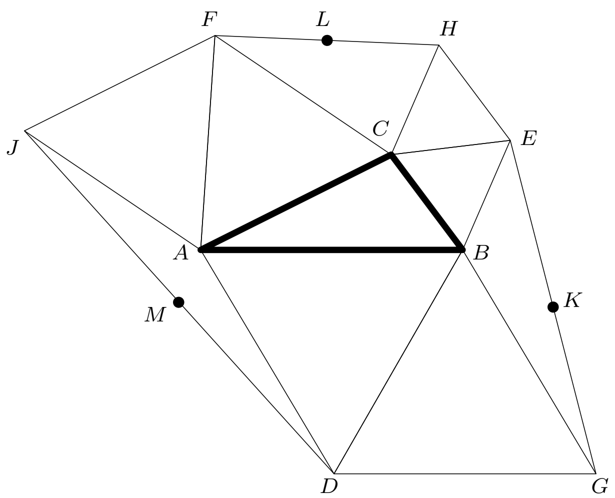
In der Summe gibt es also

$$84 + 192 + 64 = 340$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Auf den Seiten des Dreiecks werden gleichseitige Dreiecke BAD, CBE und ACF erreichtet, und auf ihnen jeweils zu einer Seite weitere gleichseitige Dreiecke BDG, CEH und AFJ. Schließlich seien K, L und M die Mittelpunkte der Strecken GE, HF bzw. JD.



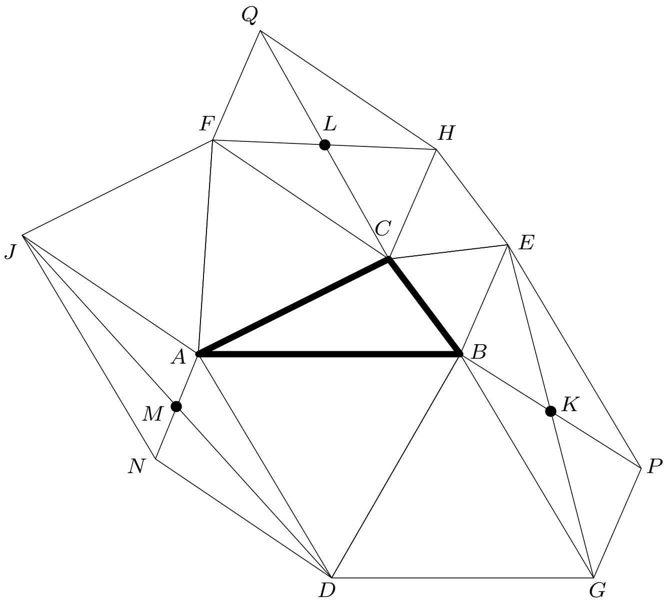
Zeige: Es ist $|AM| + |BK| + |CL|$ gleich dem halben Umfang des Dreiecks ABC.

Lösung:

Wir betrachten den Punkt A. An ihm liegen laut Vorgabe drei Winkel von gleichseitigen Dreiecken an; außerdem die Winkel $\angle BAC$ und $\angle JAD$. Damit ist

$$\angle JAD = 360° - 3 \cdot 60° - \angle BAC = 180° - \angle BAC\,.$$

Insbesondere ist der Winkel nicht gestreckt oder überstreckt. Daher können wir das Dreieck AJD nach außen auf der Seite JD zu einem Parallelogramm $AJND$ ergänzen.
Entsprechend erschaffen wir die Parallelogramme $BGPE$ und $CHQF$.



Nun betrachten wir das Dreieck AJN. Wegen der Parallelogrammeigenschaft ist $\angle NJA = 180° - \angle JAD = \angle BAC$. Außerdem ist $|AJ| = |AC|$, da ACF und AFJ gleichseitige Dreiecke sind. Wegen der Parallelogrammeigenschaft und weil auch ADB ein gleichseitiges Dreieck ist, gilt $|JN| = |AD| = |AB|$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist damit AJN kongruent zu ABC und folglich $|AN| = |BC|$. Die Diagonalen eines Parallelogramms schneiden sich in ihren Mittelpunkten; daher teilt M die Strecke AN in ihrer Mitte. Somit ist schließlich $|AM| = \frac{1}{2}|BC|$.
Entsprechend folgt für die anderen beiden Strecken $|BK| = \frac{1}{2}|AC|$ und $|CL| = \frac{1}{2}|AB|$. In der Summe ergibt das

$$|AM| + |BK| + |CL| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|) = \frac{1}{2}U_{ABC}\,.$$

Aufgabe 4

Beim Austeilen nach der Siegerehrung geraten die Klausuren der Landesrundenteilnehmer der Mathe-Olympiade durcheinander. Katastrophe! Aber mit gutem Ausgang, denn zufällig stehen die 200 Teilnehmer gerade so im Kreis, dass jeder nur seine falsche Klausur an den rechten Nachbarn weiterreichen muss, um die Ordnung wiederherzustellen. Und noch etwas ist erstaunlich: Gerade einmal zwei Teilnehmer hatten eine Klausur mit einer zu großen Startnummer erhalten.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, um eine solche Konstellation bei der Klausurausgabe zu erzeugen?

Lösung:

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass als Startnummern ohne Lücke die Zahlen von 1 bis 200 vergeben wurden. Einer der beiden, die eine Klausur mit zu hoher Startnummer bekommen hatten, hatte die Nummer 200 bekommen.

Wir nennen diesen Teilnehmer A. Den anderen Teilnehmer mit zu großer Startnummer nennen wir B.
A hat eine Startnummer kleiner als 200, der Teilnehmer rechts von A hat die 200 und ist damit automatisch ungleich B. Für den Teilnehmer rechts von A und alle nach rechts folgenden Teilnehmer bis hin zum Teilnehmer vor B gilt: Sie haben eine Klausur mit zu kleiner Startnummer bekommen. Da sie diese nach rechts weitergeben, hat der rechte Nachbar eine kleinere Startnummer als sie selbst. Die Folge der Startnummern der Teilnehmer fällt also von der 200 immer weiter bis hin zu B. Dann steigt sie einmalig und fällt danach wieder kontinuierlich bis zum Teilnehmer A.
Für die Beschreibung der Aufstellung der Teilnehmer und damit der genauen Konstellation der Klausurausgabe reicht es daher zu wissen, welche Teilnehmer sich in dem Bereich zwischen dem Teilnehmer mit der (korrekten) Startnummer 200 und einschließlich B befinden. Denn nach dem vorher Gesagten stehen diese Teilnehmer der Startnummer nach absteigend geordnet nebeneinander. Die restlichen Teilnehmer rechts von B bis zu A stehen ebenso absteigend geordnet nebeneinander.
Umgekehrt sei eine Aufteilung der Teilnehmer 1 bis 199 auf zwei unterscheidbare Teilmengen gegeben. Ohne Nebenbedingungen gibt es 2^{199} Aufteilungen. Zu untersuchen ist, welche Aufteilungen eine Aufstellung ergeben, wie sie vorgegeben wurde. Dazu ist nur wenig zu erfüllen: Die erste Teilmenge darf nicht leer sein, weil sie mindestens den Teilnehmer B enthält. In der zweiten Teilmenge muss mindestens der Teilnehmer A sein, sie ist also auch nicht leer. Als letzte Bedingung muss in der zweiten Teilmenge jemand sein, der eine höhere Startnummer hat als der Teilnehmer aus der ersten Teilmenge mit der kleinsten Startnummer, denn sonst gäbe es keinen Teilnehmer B.
Ausgeschlossen sind damit genau die folgenden 200 Aufteilungen:

$$\begin{aligned}
M_1 = \{\} &\quad \text{und} \quad M_2 = \{199, 198, 197, \ldots, 1\}\,, \\
M_1 = \{199\} &\quad \text{und} \quad M_2 = \{198, 197, 196, \ldots, 1\}\,, \\
M_1 = \{199, 198\} &\quad \text{und} \quad M_2 = \{197, 196, 195, \ldots, 1\}\,, \\
&\quad \ldots \\
M_1 = \{199, 198, 197, \ldots, 1\} &\quad \text{und} \quad M_2 = \{\}\,.
\end{aligned}$$

Es verbleiben genau

$$2^{199} - 200$$

verschiedene Konstellation der fälschlichen Klausurausgabe.