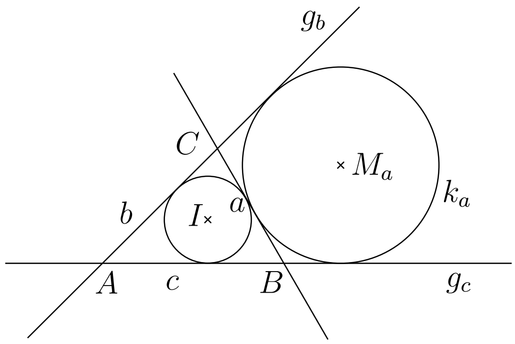
athematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 109

Aufgabe 1

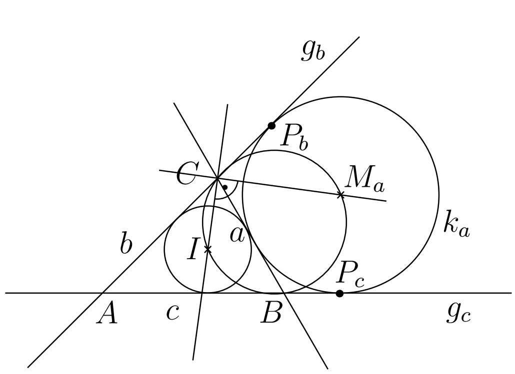
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der üblichen Bezeichnung a, b, c für die Seiten. Die Seiten seien über die Eckpunkte hinaus zu Geraden g_a, g_b und g_c verlängert.
Der *Ankreis* zum Dreieck ABC an der Seite a ist derjenige Kreis k_a, der a von außerhalb des Dreiecks und zudem die Geraden g_b und g_c berührt, siehe Abbildung. Er ist ebenso wie der Inkreis eindeutig definiert.



Es seien I der Inkreismittelpunkt und M_a der Mittelpunkt von k_a.
Zeige: Die Punkte I, B, M_a und C liegen auf einem Kreis.

Lösung:

Wir bezeichnen die Berührpunkte von k_a mit g_b und mit g_c mit P_b bzw. P_c. Berührt ein Kreis beide Schenkel eines Winkels, so liegt bekanntermaßen der Kreismittelpunkt auf der Halbierenden des Winkels. Daher liegt I auf der Halbierenden des Winkels ACB und ebenso M_a auf der Halbierenden von BCP_b. Die beiden angesprochenen Winkelhalbierenden teilen die Nebenwinkel ACB und BCP_b. Da sich die Nebenwinkel zu einem gestreckten Winkel addieren, ist der Winkel zwischen den beiden Winkelhalbierenden exakt ein rechter Winkel, $\angle ICM_a = 90°$. Somit liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke IM_a.



Mit einer genau entsprechenden Argumentation können wir zeigen, dass auch B auf dem Thaleskreis über IM_a liegt. Damit ist der Thaleskreis der gesuchte Kreis, auf dem I, B, M_a und C liegen.

Aufgabe 2

Ein paar Tage vor Ende der Ferien machen Anna und Jessica Kassensturz, wie viel Abkühlung sie sich noch leisten können. Die lange Wärme hat Tribut gefordert ... Anna zeigt ihr Geld und stellt fest: „Ich könnte noch einmal ins Schwimmbad gehen und acht Kugeln Eis kaufen, dann hätte ich noch 70 Cent übrig und könnte nichts mehr machen.“ Jessica zählt ihr Geld und meint: „Ich könnte es auch so machen, dass ich 70 Cent übrig habe. Aber ich denke eher daran, zweimal ins Schwimmbad zu gehen und fünf Kugeln Eis kaufen. Dann hätte ich noch 40 Cent übrig. – Wenn wir unser Geld zusammenlegen, könnten wir es vielleicht etwas besser nutzen. Zum Beispiel könnten wir viermal ins Schwimmbad gehen und neun Kugeln Eis kaufen. Dann hätten wir 50 Cent übrig.“
Wie viel kostet eine Kugel Eis, wie viel der Eintritt ins Schwimmbad?

Lösung:

Wir rechnen alle Werte in Cent und legen folgende Bezeichnungen fest: Das Vermögen von Anna und Jessica als a und j, den Preis einer Kugel Eis als e und den Eintrittspreis ins Schwimmbad als s.
Der Feststellung von Anna ist zu entnehmen, dass

$$a = s + 8e + 70 \tag{1}$$

und

$$e > 70 \tag{2}$$

gilt.
Jessicas zweiter und dritter Satz ergeben die Gleichung

$$j = 2s + 5e + 40\,. \tag{3}$$

Ihr Vorschlag, das Geld zusammenzulegen, liefert die Gleichung

$$a + j = 4s + 9e + 50\,. \tag{4}$$

Addiert man (1) und (3), so erhält man die Gleichung

$$a + j = 3s + 13e + 110\,. \tag{5}$$

Aus der Differenz von (4) und (5) ergibt sich schließlich die Beziehung

$$s = 4e + 60\,. \tag{6}$$

Setzen wir dies nun wieder in (3) ein, so ergibt sich der Zusammenhang

$$j = 13e + 160\,. \tag{7}$$

Nun beachten wir den Hinweis von Jessica, dass auch sie es so hätte machen können, dass sie 70 Cent übrig hätte. Dazu betrachten wir die Darstellung (7) ihres Vermögens in Verbindung mit (6). Wir nehmen allgemein an, dass sie b-mal ins Schwimmbad gehen will. Ihr Vermögen lässt sich entsprechend als

$$j = b\,s + (13 - 4b)e + 70 + 90 - b \cdot 60$$

darstellen. Da sie bei einem bestimmten Wert für b genau 70 Cent übrig hat, bedeutet das, dass für dieses b der Ausdruck $90 - b \cdot 60$ dem Preis von einer oder mehreren Kugeln Eis entspricht. Diese Anzahl darf dabei auch negativ sein – Jessica muss dann entsprechend weniger als $13 - 4b$ Kugeln Eis essen. Wenn allerdings $b > 3$ wäre, wäre nicht nur $90 - b \cdot 60$, sondern auch $13 - 4b$ negativ. Das hieße also, dass die Schwimmbadbesuche mehr als Jessicas Vermögen kosten. Daher kann sie höchstens dreimal baden gehen.
Die verbleibenden vier Fälle untersuchen wir und bestimmen daraus den Preis einer Kugel Eis unter Beachtung der Feststellung (2), dass $e > 70$ ist. Damit ergibt sich in zweien der vier Fälle ein Widerspruch, in den anderen beiden verbleibt genau eine Möglichkeit für den Preis:

b	$90 - b \cdot 60$	Anz. zus. Kugeln Eis	Preis für Eis
0	90	1	90
1	30	Widerspruch	–
2	−30	Widerspruch	–
3	−90	−1	90

Jessica hat demnach sogar zwei Möglichkeiten, 70 Cent übrig zu behalten. In beiden Fällen folgt, dass eine Kugel Eis $e = 90$ Cent kostet. Der Preis für den Eintritt ins Schwimmbad ergibt sich aus (6) zu $s = 4e + 60 = 420$ Cent.

Wir machen noch eine Probe: Anna hat nach (1) ein Vermögen von $420 + 8 \cdot 90 + 70 = 1210$ Cent. Jessica besitzt nach (3) genau $2 \cdot 420 + 5 \cdot 90 + 40 = 1330$ Cent. Wegen $1210 + 1330 = 2540 = 4 \cdot 420 + 9 \cdot 90 + 50$ stimmt tatsächlich Gleichung (4), und wenn Jessica dreimal ins Schwimmbad geht, ohne ein Eis zu kaufen, oder gar nicht badet, aber dafür 14 Kugeln Eis kauft, hat sie wegen $3 \cdot 420 + 70 = 1330 = 14 \cdot 90 + 70$ jeweils 70 Cent übrig.

Aufgabe 3

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 109 als Summe von genau 4 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen $a < b < c < d$ darzustellen?

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe sehr allgemein und geben dazu ein Verfahren an, mit dem man für jede Anzahl k an vorgegebenen Summanden und jede zu erzielende Summe n die entsprechende Anzahl an Möglichkeiten bestimmen kann. Diese Anzahl sei jeweils mit $m_{n,k}$ bezeichnet; im Speziellen gesucht ist also $m_{109,4}$.

Zum Anfang geben wir uns bescheiden und betrachten nur den Fall $k = 1$, also den Fall mit genau einem Summanden. Offensichtlich gilt

$$m_{n,1} = 1 \quad \text{für alle positiven ganzen } n.$$

Jede Summe von $k \geq 2$ verschiedenen Summanden ist größer als k. Daher gilt:

$$m_{n,k} = 0 \quad \text{für alle } n, k \text{ mit } n \leq k \text{ und } k \geq 2.$$

Nun vergessen wir alle Bescheidenheit und betrachten alle restlichen Fälle, das heißt, wir betrachten eine beliebige gegebene positive ganze Zahl n als zu erzielende Summe und eine beliebig vorgegebene Anzahl k mit $n > k \geq 2$ von paarweise verschiedenen Summanden. Es soll also jeweils $n = a_1+a_2+\ldots+a_k$ mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ sein.
Wir betrachten die Menge aller solchen Darstellungen, die wir jeweils durch das Tupel $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ eindeutig beschreiben. Bei allen Darstellungen mit $a_1 > 1$ kann man jeden Summanden um 1 verringern und erhält eine Darstellung $\{a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_k - 1\}$ der Zahl $n - k$ mit ebenfalls k Summanden. Umgekehrt liefert jede Darstellung von $n - k$ mit k Summanden eindeutig eine Darstellung für n mit k Summanden und mit $a_1 > 1$.
Bei allen Darstellungen mit $a_1 = 1$ kann man den ersten Summanden weglassen (quasi wiederum um 1 verringern) und jeden anderen um 1 verringern und erhält eine Darstellung $\{a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_k - 1\}$ von $n - k$ als Summe von $k - 1$ Summanden. Wiederum ist auch hier die umgekehrte Richtung der Zuordnung möglich und eindeutig.
Damit haben wir gezeigt, dass für jedes n und für jedes $k \geq 2$ gilt:

$$m_{n,k} = m_{n-k,k} + m_{n-k,k-1}\,.$$

Man beachte, dass neben den oben explizit genannten Einträgen an weiteren Stellen der Wert null steht. Da sich diese Stellen aber in die Rekursionsformel einfügen, war keine separate Betrachtung nötig.
Um den gefragten Wert zu erhalten, müssen wir noch etwas Fleißarbeit in das Ausfüllen der folgenden Tabelle investieren. Dabei haben wir alle Felder frei gelassen, die für unsere konkreten Werte nicht benötigt werden. Alle Werte mit Stern sind aus den ersten Überlegungen vorgegeben.

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	*1	*0	*0	*0
2	*1	*0	*0	
3	*1	1	*0	
4	*1	1	0	
5	*1	2	0	0
6	*1	2	1	
7	*1	3	1	
8	*1	3	2	
9	*1	4	3	0
10	*1	4	4	

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
11	*1	5	5	
12	*1	5	7	
13	*1	6	8	3
14	*1	6	10	
15	*1	7	12	
16	*1	7	14	
17	*1	8	16	11
18	*1	8	19	
19	*1	9	21	
20	*1	9	24	

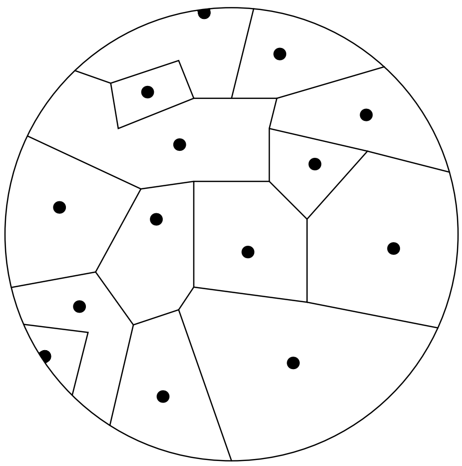
n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
21	*1	10	27	27
22	*1	10	30	
23	*1	11	33	
24	*1	11	37	
25	*1	12	40	54
26	*1	12	44	
27	*1	13	48	
28	*1	13	52	
29	*1	14	56	94
30	*1	14	61	
31	*1	15	65	
32	*1	15	70	
33	*1	16	75	150
34	*1	16	80	
35	*1	17	85	
36	*1	17	91	
37	*1	18	96	225
38	*1	18	102	
39	*1	19	108	
40	*1	19	114	
41	*1	20	120	321
42	*1	20	127	
43	*1	21	133	
44	*1	21	140	
45	*1	22	147	441
46	*1	22	154	
47	*1	23	161	
48	*1	23	169	
49	*1	24	176	588
50	*1	24	184	
51	*1	25	192	
52	*1	25	200	
53	*1	26	208	764
54	*1	26	217	
55	*1	27	225	
56	*1	27	234	
57	*1	28	243	972
58	*1	28	252	
59	*1	29	261	
60	*1	29	271	
61	*1	30	280	1215
62	*1	30	290	
63	*1	31	300	

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
64	*1	31	310	
65	*1	32	320	1495
66	*1	32	331	
67	*1	33	341	
68	*1	33	352	
69	*1	34	363	1815
70	*1	34	374	
71	*1	35	385	
72	*1	35	397	
73	*1	36	408	2178
74	*1	36	420	
75	*1	37	432	
76	*1	37	444	
77	*1	38	456	2586
78	*1	38	469	
79	*1	39	481	
80	*1	39	494	
81	*1	40	507	3042
82	*1	40	520	
83	*1	41	533	
84	*1	41	547	
85	*1	42	560	3549
86	*1	42	574	
87	*1	43	588	
88	*1	43	602	
89	*1	44	616	4109
90	*1	44	631	
91	*1	45	645	
92	*1	45	660	
93	*1	46	675	4725
94	*1	46	690	
95	*1	47	705	
96	*1	47	721	
97	*1	48	736	5400
98	*1	48	752	
99		49	768	
100	*1	49		
101			800	6136
102		50	817	
...	...	...	...	...
105			867	6936
...	...	...	...	...
109				7803

Es gibt also 7803 Möglichkeiten

Aufgabe 4

Wir sehen hier einen Staat mit seinen (nennen wir sie einfach) Bundesländern und deren Hauptstädten. Der Präsident des Staates findet, dass es zu wenig Kontakt unter den Bundesländern gibt, denn von einem echten Kontakt kann man, wie er feststellt, nur dann sprechen, wenn zwei Länder eine gemeinsame Grenze haben. In einer lauen Sommernacht malt sich der Präsident aus, ob man nicht die Grenzen innerhalb des Staates so verändern kann, dass es mehr Kontakte gibt. Die Hauptstädte sollen dabei nicht verändert werden, aber sämtliche anderen Grenzen könnte man beliebig verändern, solange das Gebiet jedes Landes zusammenhängend bleibt.



Derzeit gibt es, wie man einfach nachzählen kann, 27 Kontakte. Wie viele können es maximal sein?

Lösung:

Wir betrachten die Darstellung der Grenzen zwischen den Bundesländern und nach außen als Graphen. Die Menge der Ecken besteht dabei mindestens aus allen Punkten, an denen mindestens drei Grenzabschnitte zusammentreffen. Zusätzlich erlauben wir, aber nur für Zwischenschritte der Lösungsfindung, dass es auch „triviale“ Eckpunkte gibt, an denen nur zwei Grenzabschnitte zusammenstoßen, das heißt, an denen nur zwei Länder anliegen. Da wir aber außerdem auch erlauben, dass die Grenzabschnitte beliebig gebogen oder sogar geknickt sein dürfen, ist das tatsächlich nur für Übergangsschritte nötig.

Hilfssatz. Es sei eine (nahezu) beliebige Einteilung der vorgegebenen Staatsfläche in eine beliebige Anzahl Bundesländer gegeben. Dabei seien bezeichnet: Die Anzahl der Flächen (also die Anzahl der Bundesländer) mit f, die Anzahl der Ecken mit e und die Anzahl der Grenzabschnitte (Kanten) mit k. Außerdem sei als einzige Einschränkung kein Bundesland so gelegen, dass es ein oder mehrere andere Bundesländer vollständig umschließt. Dann gilt:

$$e + f - k = 1$$

Als Beispiel sei der Hilfssatz in der Ausgangssituation des Staates überprüft. Dort ist $f = 14$, $e = 26$ und $k = 39$ und damit in der Tat $e + f - k = 26 + 14 - 39 = 1$.

Der Hilfssatz ist eine in den Voraussetzungen nur geringfügig eingeschränkte Version des bekannten Eulerschen Polyedersatzes. Wir wollen dennoch einen **Beweis** angeben:
Wir verkleinern Schritt für Schritt den Graphen, bis nur noch die Außengrenze übrig bleibt. Weil es die Argumentation etwas einfacher macht, verzichten wir darauf, auf der Außengrenze irgendwelche Ecken zu entfernen. Die Verkleinerung verläuft über zwei mögliche Schritte:
I) Sofern es einen inneren Eckpunkt gibt, an dem nur zwei Kanten aneinandergrenzen, wählen wir einen solchen aus, entfernen ihn und legen die beiden zugehörigen Grenzabschnitte zu einem zusammen.
II) Wenn I) nicht anwendbar ist, entfernen wir eine Kante im Inneren. Dabei machen wir die Einschränkung, dass es keine Kante sein darf, die zu zwei Ländern gehört, die auch noch an einer anderen Kante benachbart sind. Diese Einschränkung sorgt dafür, dass nicht etwa danach ein Land an sich selbst grenzt und dabei noch andere Länder umschließt. Sie kann genau dann greifen, wenn es zwei Länder gibt, die mehr als nur einen Grenzabschnitt gemeinsam haben. Es aber immer möglich, eine Kante zu finden, die der Einschränkung nicht unterliegt. Denn wenn wir eine Kante auswählen, die von der Einschränkung betroffen ist, so umschließen ja die beiden angrenzenden Länder ein oder mehrere andere Länder. Nun wählen wir eine Kante, die zu einem dieser umschlossenen Länder gehört. Wenn auch sie von der Einschränkung betroffen ist, gibt es wieder eine Umschließung, die aber echt kleiner ist als die vorige. So wird die Menge an umschlossenen Ländern, die wir betrachten, immer kleiner. Weil wir nur endlich viele Länder haben, stoßen wir nach endlicher Zeit auf eine Kante, die von der Einschränkung nicht betroffen ist.
Im Schritt I) verringert sich e um 1 und auch k um 1. Denn es kann nicht sein, dass die beiden Grenzabschnitte in Wahrheit ein einziger sind. In diesem Fall würden sie nämlich ein Land umschließen, das damit von einem anderen Land vollständig umschlossen wäre.
Im Schritt II) verringern sich k und f um jeweils 1.
In beiden Schritten ändert sich der Wert des Terms $e + f - k$ also nicht.

Nach jeder Anwendung von Schritt II) ist Schritt I) höchstens zweimal anwendbar, nämlich allenfalls auf die Ecken zu der gerade entfernten Kante. Danach haben wir eine neue Aufteilung der Staatsfläche mit einem Bundesland weniger. Daher bleibt nach endlich vielen solcher Schrittfolgen nur noch ein einziges Bundesland übrig. Dieses hat also kombinatorisch gesehen die Form eines n-Ecks, und hier gilt offensichtlich:

$$e + f - k = n + 1 - n = 1\,.$$

Da sich der Wert des Terms $e + f - k$ die gesamte Zeit über nicht geändert hst, ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun können wir uns der eigentlichen Fragestellung nähern. Wir zählen die Grenzabschnitte noch etwas genauer: Für jeden Kontakt zweier Bundesländer wählen wir eine Grenze aus; die Anzahl sei k_{echt}. Weitere Grenzabschnitte zwischen Bundesländern zählen wir als k_{zweit}. (Im Nordwesten beispielsweise zählt eine Kante dazu, dort umschließen zwei Länder ein drittes, kleines Land – nennen wir es Humburg.) Die Grenzabschnitte zum Ausland hin zählen wir mit der Anzahl $k_{\text{außen}}$. Damit sind alle Kanten erfasst, es ist $k = k_{\text{echt}} + k_{\text{zweit}} + k_{\text{außen}}$.
Als weiteren Schritt bestimmen wir, wie groß k maximal sein kann. Es gilt nun die schon oben genannte Bedingung, dass an jeder Ecke mindestens drei Kanten zusammenkommen. Wir zählen die Enden von Kanten. Diese Zahl ist einerseits gleich $2 \cdot k$ (offensichtlich), andererseits ist sie größer oder gleich $3 \cdot e$. Damit gilt die Abschätzung

$$2k \geq 3e\,.$$

Diese Ungleichung setzen wir in $e + f - k = 1$ ein und erhalten

$$1 \leq \frac{2}{3}k + f - k = f - \frac{1}{3}k$$

und äquivalent dazu

$$k \leq 3 \cdot (f - 1)\,.$$

Für die Anzahl der möglichen Kontakte folgt schließlich

$$k_{\text{echt}} = k - k_{\text{zweit}} - k_{\text{außen}} \leq 3 \cdot (f - 1) - k_{\text{zweit}} - k_{\text{außen}}\,.$$

Die Anzahl der Flächen/Länder ist vorgegeben. Gleichheit bei der Ungleichung lässt sich erreichen, indem an keinem Punkt mehr als drei Länder zusammentreffen. Das ist beim aktuellen Plan bereits der Fall. Eine Erhöhung der Kontakte ist also genau darüber möglich, dass es keine von zwei Ländern umschlossenen Gebiete gibt – das lässt sich offensichlich immer erreichen, indem an Zweitgrenzen ein Streifen um diese Grenze an das Land gegeben wird, das am inneren Endpunkt der Grenze als drittes Land anstößt. Es bekommt auf diese Weise Kontakt zu einem außerhalb der Umschließung liegenden Land – Humburg wird sich nach Osten ausdehnen.
Als letztes und wesentliches Mittel, die Kontakte zu erhöhen, bleibt nur, die Grenzen zum Ausland zu reduzieren. Dabei muss man aufpassen, dass keine neuen Zweitgrenzen entstehen. Zwei Landeshauptstädte liegen direkt an der Außengrenze, so dass mindestens zwei Länder eine Außengrenze haben müssen. Bei nur zwei Ländern mit Außengrenze entsteht aber eine Zweitgrenze dieser beiden Länder. Damit ist es für die Anzahl der Kontakte egal, ob zwei oder drei Länder Außengrenzen haben. In beiden Fällen entsteht die Maximalanzahl von

$$3 \cdot (14 - 1) - 3 = 36 \text{ Kontakten.}$$

Eine mögliche neue Grenzziehung folgt als Abbildung.