Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 110

Aufgabe 1

Ausgehend vom Beispiel

$$2 \cdot 55 = 110$$

suchen wir Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen mit folgenden Eigenschaften: x ist eine einstellige Zahl, y eine zweistellige mit zwei gleichen Ziffern, und das Produkt $x \cdot y$ ist eine dreistellige Zahl, die höchstens zwei verschiedene Ziffern hat.
Wie viele solcher Paare (x, y) gibt es?

Lösung:

Es gibt genau 10 solche Paare, nämlich $(7, 88)$, $(8, 77)$ und die acht Paare $(5, 22)$, $(5, 44)$, $(5, 66)$, $(5, 88)$ und $(2, 55)$, $(4, 55)$, $(6, 55)$, $(8, 55)$.

Sei (x, y) ein Lösungspaar und seien a, b, c die Ziffern seines Produktes:

$$x \cdot y = [abc] = 100a + 10b + c\,.$$

Als zweistellige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist y von der Form $y = 11w$ mit $1 \leq w \leq 9$. Damit ist auch das Produkt xy durch 11 teilbar:

$$11 \mid xy = 100a + 10b + c = 11(9a + b) + (a - b + c)$$

und insbesondere teilt dann 11 auch den letzten Summanden:

$$11 \mid a - b + c\,. \tag{1}$$

Da das Produkt xy höchstens zwei verschiedene Ziffern hat, gilt $a = b$, $b = c$ oder $a = c$.

Im Fall $a = b$ folgt aus (1), dass $11 \mid c$ gilt, und da c eine Ziffer ist, muss $c = 0$ sein. Somit gilt $xy = a \cdot 11 \cdot 10$. Zusammen mit $y = 11w$ ergibt sich $xw = a \cdot 2 \cdot 5$. Da 5 eine Primzahl ist und x und w Ziffern sind, muss entweder $x = 5$ oder $w = 5$ sein. Für $x = 5$ ergibt sich $w = 2a$ und wir erhalten die vier Paare $(5, 22)$, $(5, 44)$, $(5, 66)$, $(5, 88)$. Für $w = 5$ ergibt sich $y = 55$ und $x = 2a$ und wir erhalten die vier Paare $(2, 55)$, $(4, 55)$, $(6, 55)$, $(8, 55)$.

Im Fall $b = c$ folgt aus (1), dass $11 \mid a$ gilt, im Widerspruch dazu, dass a eine Ziffer ungleich 0 ist. Dieser Fall ergibt also keine weiteren Lösungspaare.

Im Fall $a = c$ folgt $11 \mid 2a - b$. Da a und b Ziffern sind, muss $2a - b = 0$ oder $2a - b = 11$ gelten. Für $2a = b$ ergibt sich $xy = a \cdot 121$ und damit $xw = 11a$ im Widerspruch dazu, dass x und w als Ziffern nicht durch die Primzahl 11

teilbar sind. Für $2a - 11 = b$ ergeben sich für das Produkt $xy = 11 \cdot xw$ die Möglichkeiten

$$\begin{aligned} xy &= 616 = 11 \cdot 56 = 11 \cdot 7 \cdot 8\,, \\ xy &= 737 = 11 \cdot 67\,, \\ xy &= 858 = 11 \cdot 78 \quad \text{oder} \\ xy &= 979 = 11 \cdot 89\,. \end{aligned}$$

Weder 67 noch 78 oder 89 lassen sich als Produkt von zwei Ziffern x, w erzeugen, daher scheiden diese Varianten aus. Bis auf die Reihenfolge lässt sich 56 als Ziffernprodukt nur von 7 und 8 erzeugen, dieses führt zu den beiden Lösungspaaren $(7, 88)$ und $(8, 77)$.

Weitere Lösungen kann es somit nicht geben. Einsetzen und Nachrechnen ergibt, dass alle genannten zehn Paare tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 2

Welchen Durchmesser muss eine Kugel haben, damit die Maßzahl ihrer Oberfläche gleich der Maßzahl ihres Volumeninhalts ist?
Welche Kantenlänge muss dagegen ein Würfel haben, damit die Maßzahlen von Oberfläche und Volumen gleich sind? Und ein Tetraeder?

Lösung:

Oberfläche und Volumen einer Kugel mit Radius r, eines Würfels mit Kantenlänge a und eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge b lassen sich mit den folgenden Formeln berechnen:

	Oberfläche	Volumen
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Würfel	$6a^2$	a^3
Tetraeder	$\sqrt{3}b^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}b^3$

Für die Kugel gilt Gleichheit der Maßzahlen von Oberfläche und Volumen somit genau dann, wenn $4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ ist. Dies ist genau für den Radius $r = 3$ beziehungsweise für den Durchmesser

$$d = 6$$

der Fall. Für den Würfel gilt Gleichheit genau dann, wenn $6a^2 = a^3$ gilt, also genau dann, wenn

$$a = 6$$

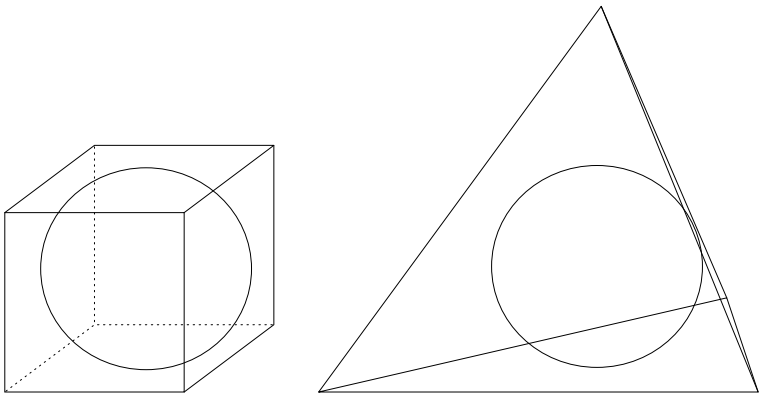
ist. Folglich lässt sich eine Kugel mit ausgeglichenem Verhältnis von Volumen und Oberfläche genau in einen Würfel mit ebenso ausgeglichenem Verhältnis hineinlegen.

Für das Tetraeder gilt Gleichheit der beiden Maßzahlen genau dann, wenn

$$b = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6}$$

gilt. Auch in ein Tetraeder lässt sich eine Inkugel einbeschreiben, die genau die vier Seitenmittelpunkte berührt. Diese hat allgemein den Durchmesser $d' = 2\frac{\sqrt{6}}{12}b$. Für unser spezielles Tetraeder hat auch sie dann – erstaunlich, wie das manchmal in der Mathematik ist – den Durchmesser

$$d' = 2\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot 6\sqrt{6} = 6\,.$$



Aufgabe 3

Es seien a, b und c positive ganze Zahlen mit der Eigenschaft

$$a^2 + b^2 + c^2 = 201300002014\,.$$

Zeige, dass $n = a \cdot b \cdot c$ durch wenigstens eine der Zahlen $8, 12, 18$ oder 27 teilbar ist, aber nicht durch alle.

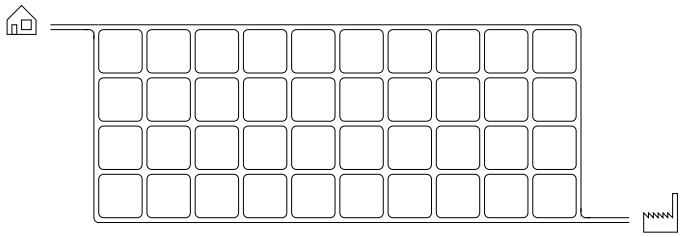
Lösung:

Wir betrachten die Gleichung einmal modulo 2^i und einmal modulo 3^j, das heißt bezüglich der Reste beim Teilen durch geeignete Potenzen von 2 bzw. 3. Wir beginnen modulo 3.
Wegen $(3\cdot a)^2 = 9\cdot a^2$ und $(3\cdot a\pm 1)^2 = 9\cdot a^2 \pm 2\cdot 3\cdot a + 1$ lässt jede Quadratzahl beim Teilen durch 3 den Rest 0 oder 1. Die Quersumme von 201300002014 ist $13 = 4 \cdot 3 + 1$, daher lässt die Summe der drei Quadratzahlen den Rest 1 beim Teilen durch 3. Dies lässt sich nur erreichen, wenn genau eine der drei Quadratzahlen den Rest 1 und die anderen beiden den Rest 0 haben. Und das wiederum heißt, dass genau zwei der Zahlen a, b und c durch 3 teilbar sind. Damit ist n in jedem Fall durch 9 teilbar.
Bezüglich der Primfaktoren 2 betrachten wir die Quadratsumme modulo 8. Gerade Quadratzahlen können einen Rest 0 oder 4 modulo 8 haben. Wegen $(4 \cdot b \pm 1)^2 = 16 \cdot b^2 \pm 8 \cdot b + 1$ lässt jede ungerade Quadratzahl den Rest

1 modulo 8. Die Zahl 201300002014 lässt beim Teilen durch 8 den Rest 6. Damit gibt es auch hier nur genau eine Möglichkeit, die (Nicht-)Teilbarkeiten bezüglich 2 auf die drei Zahlen a, b und c zu verteilen: Zwei der Zahlen müssen ungerade und eine gerade sein.
Das Quadrat der geraden Zahl muss nun aber den Rest 4 modulo 8 lassen. Damit darf die gerade Zahl nicht durch 4 teilbar sein, weil dann deren Quadrat durch 8 teilbar wäre. Somit kommt in dem Produkt $n = a \cdot b \cdot c$ genau ein Primfaktor 2 vor.
Folglich ist n nicht durch 8 und nicht durch $12 = 4 \cdot 3$ teilbar. Es ist aber in jedem Fall durch $18 = 2 \cdot 9$ teilbar.

Aufgabe 4

In Neu-Buxtehude wird Firmenchef Tischbein jeden Morgen von seinem Chauffeur Variabulo auf einem kürzestmöglichen Weg von der Villa in der Nordwestecke der Stadt zur Fabrik in der Südostecke gefahren.

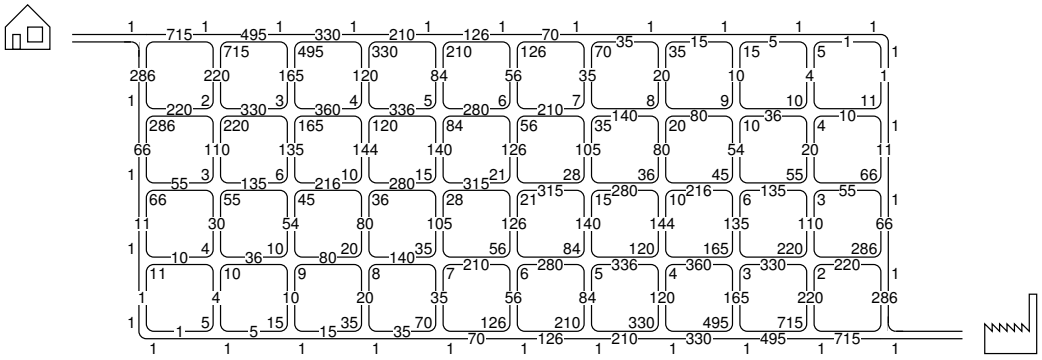


Variabulo fährt dabei immer wieder einen anderen Weg – er hat schließlich $\binom{14}{4} = 1001$ verschiedene Möglichkeiten. Und erst wenn er alle einmal gefahren ist, fährt er eine Route zum zweiten Mal.
Tischbein ist das dann doch zu viel Abwechslung. Er könnte seinen Chauffeur entweder bitten, einen bestimmten Straßenabschnitt zwischen zwei Kreuzungen nicht mehr zu benutzen, oder er könnte ihn bitten, pro Fahrt nur noch höchstens siebenmal abzubiegen. Welche Maßnahme zeigt größere Wirkung?

Lösung:

Wir betrachten die beiden Möglichkeiten getrennt voneinander.
Möglichkeit 1: Tischbein bittet, einen bestimmten Straßenabschnitt nicht mehr zu benutzen. Herauszufinden ist, wie viele (kürzeste) Fahrtrouten dadurch ausgeschlossen werden. Anders gesagt müssen wir bestimmen, wie viele Fahrtrouten jeweils über einen bestimmten Abschnitt gehen.
Dazu markieren wir jede Kreuzung oder Ecke links oben mit der Anzahl an Möglichkeiten, ihn von der Villa aus zu erreichen. Diese Anzahl ist an der Kreuzung in der n-ten Spalte von links (Westen), beginnend mit $n = 0$, und in der k-ten Zeile von oben (Norden), ebenfalls beginnend mit $k = 0$, genau der Binomialkoeffizient $\binom{n+k}{k}$. Denn von den $n+k$ Straßenabschnitten bis zur gewählten Ecke (unter Auslassung der Zufahrt zur Villa) muss der Chauffeur genau k nach unten fahren, aber er kann frei auswählen, welche k der $n + k$ Abschnitte es sein sollen.

Ebenso schreiben wir an jede Ecke unten rechts die Anzahl an Möglichkeiten, sie von der Fabrik aus zu erreichen. Dabei ergeben sich offenbar dieselben Zahlen, nur von der Fabrik aus gesehen.
Die Anzahl an Fahrtrouten über einen Straßenabschnitt ist dann das Produkt der Anzahl an Wegen von der Villa aus am linken oder oberen Ende des Abschnittes mit der Anzahl an Wegen von der Fabrik aus am rechten oder unteren Ende des Abschnittes. Diese Zahl haben wir jeweils auf die Abschnitte geschrieben.



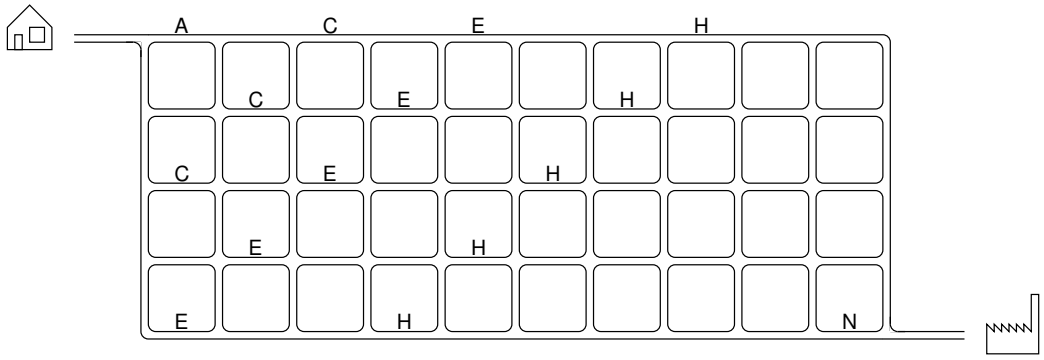
Nun ist einfach abzulesen, dass das Auslassen des geradeaus direkt vor der Villa oder vor der Firma liegenden Abschnittes am meisten Routen verbietet, und zwar 715 Routen.

Möglichkeit 2: Tischbein beschränkt die Zahl der Abbiegevorgänge auf höchstens sieben.
Jedes Abbiegen führt von einem waagerechten (west-östlichen) Straßenstück in ein senkrechtes (nord-südliches) oder umgekehrt. Da Anfang und Ende der Route beide waagerecht verlaufen, muss die Anzahl der Abbiegevorgänge gerade sein, und wir können auf sinnvolle Weise Paare bilden. Mit jedem Paar von Abbiegevorgängen fährt Variabulo mindestens eine Straße weiter nach unten; daher kann es überhaupt nur höchstens vier solche Paare geben. Wenn Variabulo nur noch höchstens siebenmal abbiegen darf, dann sind also genau die Möglichkeiten ausgeschlossen, dass er achtmal abbiegt. (Exakt siebenmal kann er nicht abbiegen, aber das ist ohne Bedeutung.) Die Anzahl dieser Möglichkeiten werden wir nun bestimmen.
Bei allen Routen mit achtmaligem Abbiegen folgt also auf jedes senkrechte Straßenstück zwingend ein waagerechter Abschnitt, wobei dieser gegebenenfalls auch die Einfahrt zur Fabrik sein kann. – Wir stellen eine Fahrtroute durch eine Folge aus den Buchstaben W und S dar, die für je einen waagerechten bzw. senkrechten Straßenabschnitt stehen. Die Zufahrt von der Villa wird nicht dargestellt, aber die Einfahrt zur Fabrik. Eine Fahrtroute besteht daher aus 15 Buchstaben, von denen der letzte immer ein W ist. Ohne eine Bedingung an die Abbiegeanzahl kann man die Buchstabenfolge aus 4 Buchstaben S und 11 Buchstaben W frei zusammensetzen unter Beachtung dessen, dass der letzte Buchstabe ein W ist. Es reicht dann also, nur 14 Buchstaben zu betrachten.

Im Fall achtmaligen Abbiegens setzt sich die Buchstabenfolge aus 4 Doppelbuchstaben SW und 7 Buchstaben W zusammen. Wir benötigen also die Anzahl an Möglichkeiten, aus diesen Bausteinen eine 15-stellige Folge zusammenzusetzen. (Bemerkung: Weil wir die S in Paare mit W gepackt haben, ist sichergestellt, dass der letzte Buchstabe ein W ist. Es ist aber dennoch nötig, hier den fünfzehnten Buchstaben mit zu betrachten.) Diese Anzahl ist $\binom{4+7}{4} = 330$.

Herr Tischbein wird sich folglich dafür entscheiden, seinem Chauffeur die Benutzung eines der oben benannten Straßenabschnitte zu untersagen. Es verbleiben ihm dann nur noch $1001 - 715 = 286$ Fahrtrouten.

Lösungsvarianten. Möglichkeit 1 der Beschränkung durch Herrn Tischbein: Statt das Sperren nur eines Straßenabschnitts zu betrachten, fassen wir einige Sperrungen zusammen. Und zwar betrachten wir zuerst die Situation, dass alle waagerechten Straßenabschnitte auf einer Diagonalen von Südwest nach Nordost gesperrt werden. Im folgenden Bild sind beispielhaft einige dieser Diagonalen dadurch dargestellt, dass die betroffenen Straßenabschnitte mit dem gleichen Buchstaben gekennzeichnet sind.



Werden alle Straßenabschnitte mit einem festen gleichen Buchstaben gesperrt, zum Beispiel alle E-Abschnitte, so bedeutet das nichts anderes, als dass im Beispiel der fünfte Straßenabschnitt der Route ein senkrechter sein muss. Stellt man einen Weg von Variabulo wie oben beschrieben durch eine Buchstabenfolge aus W und S dar, so werden also alle Möglichkeiten ausgeschlossen, die an einer bestimmten Stelle ein W haben. Da für das Verteilen der vier S dann noch 13 Positionen zur Verfügung stehen, werden $\binom{13}{4} = 715$ Varianten ausgeschlossen.
Bei allen Buchstaben außer A und N werden diese 715 Varianten aber auf mehrere Abschnitte verteilt. Das Sperren eines einzelnen Abschnittes schließt dann also weniger als 715 Routen aus, denn es gibt über jeden Abschnitt gültige Fahrtrouten. Im Falle der Buchstaben A und N jedoch verlaufen alle 715 Varianten über nur einen Abschnitt.

Ganz ähnlich gehen wir beim Sperren eines senkrechten Abschnittes vor. Auf jeder Diagonalen liegen dann $\binom{13}{3} = 286$ Varianten. Das sind weniger als beim Sperren waagerechter Abschnitte.

Somit ist bei Möglichkeit 1 ein Ausschluss von bis zu 715 Varianten möglich.

Möglichkeit 2 der Beschränkung durch Herrn Tischbein (diese schöne Lösungsidee entstammt den Einsendungen unserer Teilnehmer H. P. und B. S.): Wie oben überlegen wir uns, dass genau die Routen ausgeschlossen werden, bei denen achtmal abgebogen wird. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass in jedem senkrecht verlaufenden Routenabschnitt immer nur genau ein Straßenabschnitt gefahren wird, also immer nur bis zur nächsten Kreuzung. Offensichtlich gilt auch die Umkehrung dieser Überlegung.
Daher ist die Angabe einer Fahrtroute äquivalent zur Auswahl von genau 4 der 11 senkrechten Straßen„spalten“, in denen dann senkrechte Routenabschnitte liegen sollen. Die Anzahl der Möglichkeiten dieser Auswahl ist $\binom{11}{4} = 330$.