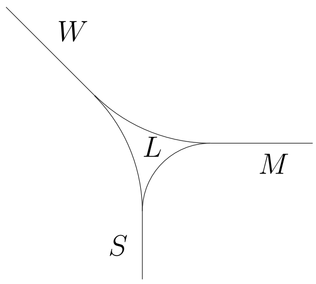
μathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 111

Aufgabe 1

Ludwigshafen hat einen Bahnhof in Dreiecksform. Markus, Sabine und Wilhelm beobachten den Zugverkehr auf den drei Zulaufstrecken von Mannheim, Schifferstadt und Worms. Markus zählt 202 Züge, Sabine 150 und Wilhelm 118. An diesem Tag beginnt oder endet kein Zug in Ludwigshafen.



Wie viele Züge sind auf jeder der Seiten des Bahnhofs-Dreiecks durchgefahren?

Lösung:

Wir bezeichnen die Anzahl der zwischen Mannheim und Worms verkehrenden Züge mit s, die Anzahl der zwischen Mannheim und Schifferstadt verkehrenden Züge mit w und die zwischen Schifferstadt und Worms verkehrenden Züge mit m. Weiterhin bezeichnen wir die Anzahl der gezählten Züge jeweils mit dem Anfangsbuchstaben der Zählerin oder des Zählers. Wir erhalten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} m + s &= W\,, \\ s + w &= M\,, \\ m + w &= S\,. \end{aligned}$$

Durch Addition der ersten beiden Gleichungen und Subtraktion der dritten Gleichung folgt dann der Reihe nach:

$$\begin{aligned} 2s &= W + M - S\,, \\ s &= \frac{W + M - S}{2}\,, \\ s &= \frac{118 + 202 - 150}{2}\,, \\ s &= 85\,. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$w = \frac{M + S - W}{2} = 117$$

sowie

$$m = \frac{W + S - M}{2} = 33\,.$$

Somit waren an diesem Tag 33 Züge zwischen Worms und Schifferstadt, 85 Züge zwischen Mannheim und Worms sowie 117 Züge zwischen Mannheim und Schifferstadt unterwegs. Da die Aufgabenstellung die Existenz einer Lösung voraussetzt und nur je ein Wert als möglich übrig bleibt, ist keine Probe nötig.

Aufgabe 2

Zeige, dass es keine positiven ganzen Zahlen x, y, z gibt, die die Gleichung

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2$$

erfüllen.

Lösung:

Angenommen, es würden Lösungen in den positiven ganzen Zahlen existieren. Dann existiert auch mindestens eine Lösung mit minimalem x. Sei diese Lösung (x, y, z). Dann gilt:

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2 \,.$$

Wir betrachten den Rest der Gleichung bei Division durch 3, bezeichnet als modulo 3:

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \mod 3 \,.$$

Modulo 3 lassen Quadratzahlen nur die Reste 0 und 1. Dies lässt sich leicht durch Ausprobieren prüfen. Dementsprechend müssen sowohl x^2 als auch y^2 den Rest 0 modulo 3 lassen. Da 3 eine Primzahl ist, sind auch x und y durch 3 teilbar. Sei $x = 3x'$ und $y = 3y'$. Dann gilt:

$$9(x')^2 + 90(y')^2 = 3z^2$$

Wir teilen durch 3 und betrachten die Gleichung wieder modulo 3:

$$0 \equiv z^2 \mod 3 \,.$$

Somit ist z^2 und damit auch z durch 3 teilbar. Wir schreiben $z = 3z'$ und erhalten aus der ursprünglichen Gleichung:

$$9(x')^2 + 90(y')^2 = 27(z')^2 \,.$$

Nach Division durch 9 erhalten wir die ursprüngliche Gleichung in (x', y', z'), die somit auch Lösungen der Gleichung sind. Dies widerspricht unserer Annahme, x minimal gewählt zu haben, weil $x' = \frac{x}{3} < x$ gilt, da $x > 0$ ist. Dies ist also ein Widerspruch und es kann gar keine Lösungen in den positiven ganzen Zahlen geben.

Wie kommt man auf so einen Beweis? Beim Spielen mit der Ausgangsgleichung und mit Modulorechnung findet man die benutzten Teilbarkeiten von x und y durch 3 heraus. Führt man diesen Gedanken etwas weiter, kann man auch zeigen, dass z durch 3 teilbar sein muss und kommt wieder am Anfang heraus. Nun muss nur noch das ungute Gefühl, das man dabei hat, formalisiert werden. Dieser Beweis funktioniert nicht ohne Weiteres mit rationalen Zahlen. Warum?

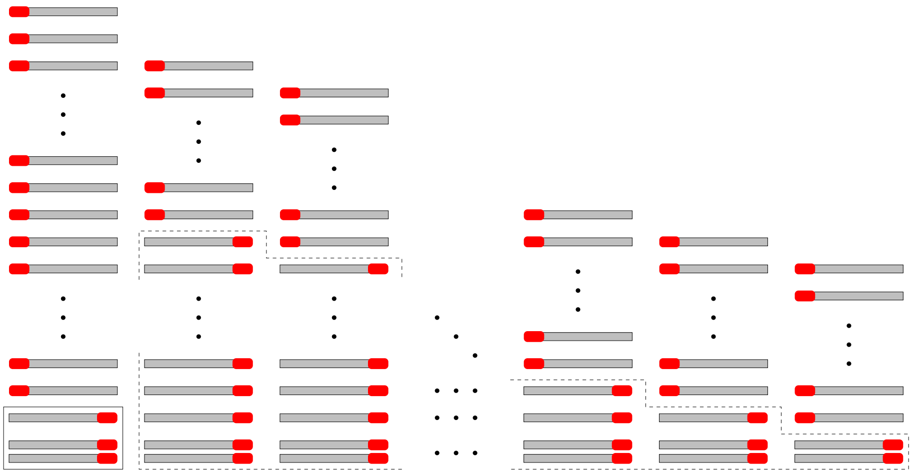
Aufgabe 3

Jakob und Oskar spielen ein Spiel: Auf dem Tisch liegen 1111 Streichhölzer als Vorrat.
Ein Spielzug besteht darin, entweder einen bestehenden Streichholzhaufen um ein Hölzchen aus dem Vorrat zu vergrößern oder einen neuen Haufen mit zwei Hölzchen aus dem Vorrat anzufangen. Dabei dürfen aber nie zwei Haufen gleich groß sein. Zu Beginn ist noch kein Haufen vorhanden.
Die Spieler ziehen abwechselnd, Jakob beginnt. Es verliert, wer keinen Zug mehr ausführen kann. Welcher Spieler kann bei geeigneter Spielweise seinen Sieg erzwingen?

Lösung:

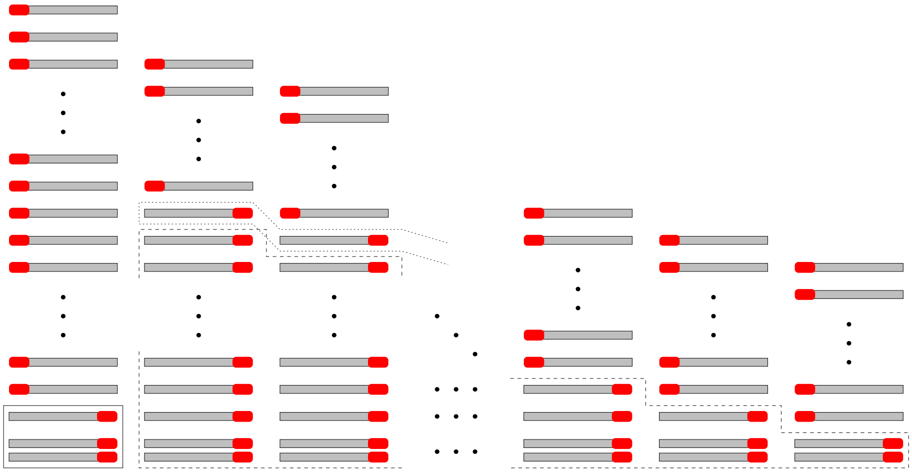
Zunächst legen wir die Streichholzhaufen geordnet hin: Wir fangen links mit dem ersten Haufen an, alle weiteren fügen wir rechts an. Die Bedingung, dass nie zwei Haufen gleich groß sein dürfen, sorgt zusammen mit der Regel, dass nach den ersten zwei Hölzchen jeder Haufen immer nur um ein Hölzchen wachsen kann, dafür, dass die Haufen von links nach rechts immer kleiner werden und sich das auch nie ändern kann.
Wir arbeiten uns mit ein paar Vorüberlegungen zur Lösung hin. Die ersten beiden Züge des Spiels sind vorbestimmt: Jakob eröffnet den ersten Haufen mit zwei Streichhölzern; Oskar muss im zweiten Zug (also seinem ersten) diesen Haufen um ein Holz vergrößern.
In jedem Zug eines Spielers werden ein oder zwei Hölzchen verbraucht; zwei Hölzchen genau dann, wenn ein neuer Haufen eröffnet wird. Den ersten Haufen um ein Hölzchen zu vergrößern, ist immer möglich, daher endet das Spiel genau dann, wenn der Vorrat verbraucht ist. Würde in jedem Zug nur ein Hölzchen verbaut, wäre von Anfang an klar, welcher Mitspieler gewinnt. Jeder Zug, in dem zwei Hölzchen benutzt werden, kehrt, vordergründig betrachtet, die Gewinnaussichten um. Oder anders gesagt: Über die Anzahl der eröffneten Streichholzhaufen wird bestimmt, wer am Ende den letzten Zug machen kann. Eine Gewinnstrategie muss also in irgendeiner Weise diese Anzahl kontrollieren.
Dazu kann man sich dann überlegen, dass es Zugmöglichkeiten gibt, die dem Aufbau neuer Haufen dienen – nämlich alles, was für einen (minimalen) dreiecksförmigen Aufbau der Haufen eingesetzt wird. Züge, die einen Haufen über eine gewisse (noch zu bestimmende) Größe hinaus vergrößern, sind nicht für die Erhöhung der Haufenzahl nutzbar. Eine Beobachtung ist nun, dass jeder Spieler – wenn er will – dafür sorgen kann, dass ab dem zweiten (kontrolliert von Jakob über den dritten Zug) oder dritten (Oskar) Zug jedes Paar von Zügen von (zuerst) seinem Gegner und von ihm selbst je genau einen Zug der ersten und einen der zweiten Art enthält. Das führt dann zu einer genau kontrollierten Anzahl an Streichholzhaufen, woraus sich der Spieler ergibt, der

gewinnen wird. Derjenige Spieler, der mit dieser Strategie gewinnen wird, wird sie daher anwenden. (Um ganz genau zu sein: Jakob hat im dritten Zug noch eine zusätzliche Wahlfreiheit.)
Um das Prinzip klarzumachen, sei zunächst angenommen, dass nicht 1111, sondern 1091 Streichhölzer zu Beginn auf dem Tisch liegen.
Dazu betrachten wir das folgende Legebild für mögliche Streichholzpositionen.



Die ersten beiden Züge sind zwingend, die Lage der Streichhölzer aus diesen Zügen ist durchgehend umrahmt.
Ein dreieckiger Bereich mit einer Breite von 32 Haufen – von 33 bis 2 Hölzern Höhe – ist gestrichelt umrahmt, in ihm zeigen die Köpfe der Streichhölzer nach rechts. Diese Positionen seien *wertvolle* Positionen genannt. Alle anderen Positionen seien *zweifelhaft* genannt.
Solange der wertvolle Bereich nicht vollständig gefüllt ist, kann Oskar nun ab dem vierten Zug so ziehen, dass in dem vorangehenden Zug von Jakob und in seinem Zug je ein Holz wertvoll und ein Holz zweifelhaft abgelegt werden, indem er genau die andere Zugart als Jakob wählt. (Eigentlich haben auch die ersten $3 + 31$ Hölzer im ersten Haufen eine aufbauende, also wertvolle Funktion; jedoch müssen nach der Zugstrategie die ersten 31 zweifelhaften Hölzer zwingend an diese Positionen gelegt werden, was dafür sorgt, dass der Aufbau im ersten Haufen automatisch vorangeht; und die Beschreibung der Lösung wird durch die gezeigte Einteilung deutlich vereinfacht.)
Der wertvolle Bereich umfasst $33 + 32 + 31 + \ldots + 3 + 2 = \frac{33 \cdot 34}{2} - 1 = 560$ Hölzer und wird mit $560 - 32 = 528$ Zügen gefüllt, wobei erst der letzte dieser Züge den Haufen Nummer 33 eröffnet. Nach der beschriebenen Strategie ist das entweder im 529. Zug von Jakob oder von Oskar der Fall. In seinem 529. Zug verbaut Oskar somit das $(2 + 1 + 560 + 528 =)$1091-te Streichholz (entweder im Doppelpack mit dem 1090. Holz zur Eröffnung des 33. Haufens oder auf einem zweifelhaften Platz) und damit das letzte. Somit gewinnt er.

Laut Aufgabenstellung liegen nun aber 1111 Streichhölzer im Vorrat. Auch hierbei kann Oskar gewinnen. Er zeichnet dazu zehn weitere Streichhölzer als wertvoll aus; dazu kann er zum Beispiel auf den Haufen 2 bis 11 je ein weiteres Streichholz nehmen – so sei es – oder zehn Stück auf Haufen 2.



Damit geht seine Strategie zweimal zehn Züge länger auf; bis dorthin, also bis zum 539. Zug von Oskar, werden zwanzig Hölzer mehr verbraucht, das sind dann genau die vorhandenen 1111 Streichhölzer.
Auch hier kann der 34. Haufen nicht eröffnet werden. Denn entweder wird der 33. Haufen erst im letzten Doppelzug eröffnet; dann kann ihn höchstens noch Oskar um ein Streichholz erhöhen, womit aber das Ende erreicht ist; oder der 33. Haufen wird früher eröffnet; dann müssen die noch fehlenden wertvollen Streichhölzer aber unter den zehn neu gewählten Hölzern sein; damit wird das neu gewählte wertvolle Streichholz auf Haufen Nummer 11 als letztes wertvolles Streichholz gelegt, womit vor Oskars letztem Zug die Haufen 12 bis 33 nur aus wertvollen Hölzern bestehen können. Damit fehlt die Grundlage, Haufen 34 zu beginnen.
Somit kann Oskar den Sieg erzwingen.

Eine etwas allgemeinere Betrachtung zeigt, dass sich bei wachsender Streichholzzahl im Vorrat Jakob und Oskar fast immer abwechseln in der Möglichkeit, den Sieg zu erzwingen. Immer dann, wenn durch die Strategie die Eröffnung eines weiteren Haufens möglich wird, kann jedoch Jakob bei zwei Anzahlen hintereinander gewinnen; das liegt letztlich daran, dass er mit dem dritten Zug die erste Wahlmöglichkeit hat. Im Bereich von 1090 bis 1156 Streichhölzern werden nach der Strategie 33 Haufen gebaut; bei allen geraden Anzahlen gewinnt Jakob, bei allen ungeraden Oskar.

Aufgabe 4

Zeige, dass die Ungleichung

$$\sqrt{1+\sqrt{2^{2014}+\sqrt{3^{2014}+\sqrt{4^{2014}+\sqrt{\ldots+\sqrt{n^{2014}}}}}}} < \sqrt{1+\sqrt{2^{2015}}}$$

für jedes n gilt.

Lösung:

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 3$. Zunächst erhalten wir durch einfache Umformungen die äquivalente Behauptung

$$3^{2014} + \sqrt{4^{2014} + \sqrt{\ldots + \sqrt{n^{2014}}}} < 4^{2014}\,.$$

Um dies zu beweisen, zeigen wir eine etwas allgemeinere Aussage. Dazu definieren wir $f(k) = k^{2014} + \sqrt{(k+1)^{2014} + \sqrt{\ldots + \sqrt{n^{2014}}}}$ für $3 \leq k \leq n$.
Wir behaupten nun, dass stets $f(k) < (k+1)^{2014}$ gilt (für $k = 3$ ist dies genau die Behauptung). Dies beweisen wir mit einer Art *unvollständiger Induktion* über k, d. h. wir zeigen die Ungleichung für $k = n$ und folgern aus der Gültigkeit für k auch die Gültigkeit für $k - 1$.
Für $k = n$ gilt

$$f(k) = f(n) = n^{2014} < (n+1)^{2014}.$$

Nun nehmen wir an, dass $f(k) < (k+1)^{2014}$ für ein k gilt. Dann folgt

$$f(k-1) = (k-1)^{2014} + \sqrt{f(k)} < (k-1)^{2014} + (k+1)^{1007}.$$

Es genügt nun also, $(k-1)^{2014} + (k+1)^{1007} \leq k^{2014}$ zu zeigen. Es gilt aber

$$\begin{aligned} k^{2014} &= (k^2)^{1007} \\ &= ((k-1)^2 + (2k-1))^{1007} \\ &\geq ((k-1)^2)^{1007} + (2k-1)^{1007} \\ &\geq (k-1)^{2014} + (k+1)^{1007}, \end{aligned}$$

wobei der Zwischenschritt aus der allgemeinen Ungleichung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \geq a^n + b^n$$

für $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ folgt.
Damit ist auch der Schritt von k auf $k-1$ bewiesen und also $f(k) < (k+1)^{2014}$ für alle $k \geq 3$ gezeigt. Für $k = 3$ folgt die Behauptung.

Wie kommt man nun auf diesen Beweis? Es ist schließlich zunächst nicht klar, woher die Abschätzung $f(k) < (k+1)^{2014}$ kommt und warum ausgerechnet damit der Induktionsschritt so gut funktioniert.
Nun, bei der Lösungsfindung wurde natürlich umgekehrt vorgegangen: Wir nehmen an, dass die Aussage falsch und also $f(3) > 4^{2014}$ wäre, und stellen dann fest, dass die Werte $f(4), f(5), \ldots$ sehr groß wären und schließlich $f(n)$ viel zu groß wäre. Nun muss man nur noch einen geeigneten Term $g(k)$ derart finden, dass $g(3) = 4^{2014}$ und $g(n) > f(n) = n^{2014}$ gelten und aus $f(3) > g(3)$ auch $f(4) > g(4)$ und schließlich $f(k) > g(k)$ für alle k folgen würde. Da es sich insgesamt um eine recht schwache Abschätzung handelt, ist die Wahl hier nicht eindeutig. Der Term $g(k) = (k+1)^{2014}$ wurde nun gerade so gewählt, dass der Beweis des Induktionsschrittes möglichst leicht geht. Wer mag, kann zur Übung einmal den Beweis mit $g(k) = (k-1)^{4028}$ versuchen.