Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 111 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Oma Schusselig hat die vierstellige PIN von ihrem Handy vergessen.
Die erste Ziffer der PIN ist das Dreifache der zweiten Ziffer und die zweite Ziffer ist dreimal so groß wie die dritte Ziffer. Außerdem ist die Summe aller vier Ziffern 15. Wie lautet die PIN zu Oma Schusseligs Handy?

Lösung: Wir wissen, dass die erste Ziffer der PIN dreimal so groß ist wie die zweite Ziffer, die wiederum das Dreifache der dritten Ziffer ist. Somit ist die erste Ziffer das Neunfache der dritten Ziffer und dementsprechend durch 9 teilbar. Da die einzelnen Ziffern im Bereich von 0 bis 9 liegen müssen, bleibt für die erste Ziffer nur noch die 0 oder die 9 übrig. Falls die erste Ziffer 0 wäre, müsste die zweite und damit auch die dritte Ziffer auch 0 sein. Dies wäre nicht nur eine leicht zu knackende PIN, die Summe aller Ziffern wäre nun nur noch die letzte Ziffer, welche nicht 15 sein kann. Also ist die erste Ziffer der PIN eine 9, die zweite Ziffer eine 3 und die dritte Ziffer eine 1. Die Summe der ersten drei Ziffern beträgt $9+3+1 = 13$, dementsprechend muss die letzte Ziffer eine 2 sein. Oma Schusselig kann nun mit der PIN 9312 ihr Handy entsperren und glücklich ihren Enkeln eine SMS schreiben.

Aufgabe 2

In einem Stall hocken einige Kaninchen und einige Hühner. Wir wissen, dass insgesamt 100 Beine und 35 Tierköpfe im Stall sind.
Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner sind in dem Stall?

Lösung:

Nennen wir die Anzahl der Kaninchen K und die Anzahl der Hühner H. Wir wollen nun versuchen, die Aufgabenstellung in Gleichungen umzuformulieren. Unter der einleuchtenden Annahme, dass jedes Kaninchen und jedes Huhn genau einen Kopf hat, erhalten wir für die Anzahl der Tierköpfe:

$$H + K = 35$$

Nun zählen wir die Anzahl aller Beine. Ein handelsübliches Huhn verfügt über zwei Beine. Die Kaninchen sind in dieser Hinsicht luxuriöser ausgestattet und kommen auf je vier Beine. Somit erhalten wir für die Gesamtanzahl der Beine:

$$2H + 4K = 100$$

Jetzt haben wir ein lineares Gleichungssystem. Um die Anzahl der Kaninchen zu erhalten, multiplizieren wir die obere Gleichung mit 2 und ziehen sie von der unteren Gleichung ab:

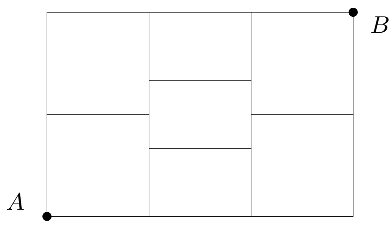
$$2H + 4K - 2H - 2K = 100 - 2 \cdot 35$$

$$2K = 30$$

Wir teilen die Gleichung durch 2 und wissen, dass 15 glückliche Kaninchen im Stall herumhoppeln. Durch Einsetzen in die erste Gleichung sehen wir nun, dass die Kaninchen durch $35 - 15 = 20$ gackernde hin und her laufende Hühner gestört werden.

Aufgabe 3

Zu sehen ist hier eine Straßenkarte. Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es?



Lösung:

Ein kürzester Weg von A nach B darf nur nach oben oder nach rechts gehen. Wir betrachten nun die horizontalen Wegabschnitte. Jeder kürzeste Weg besitzt davon drei verschiedene. Wir sehen, dass die horizontalen Wegabschnitte innerhalb eines Weges von links nach rechts nicht absinken dürfen. Für den ersten Weg nach rechts gibt es drei verschiedene Höhen. Wird der oberste Weg genommen, muss sich auch der restliche Weg auf der Oberkante des Rechteckes abspielen. Dafür gibt es also eine Möglichkeit. Wird für den ersten Abschnitt der mittelhohe Weg gewählt, dann verbleiben für den zweiten Abschnitt zwei mögliche Höhen. In beiden Fällen muss jedoch beim dritten Abschnitt der oberste Weg gewählt werden, es ergeben sich weitere 2 Möglichkeiten. Falls nun der unterste Weg im ersten Abschnitt gewählt wird, verbleiben beim zweiten Abschnitt 4 verschiedene Möglichkeiten. Werden die obersten beiden Wege gewählt, muss beim dritten Abschnitt auch der höchste Weg gewählt werden. Dies sind also 2 neue Möglichkeiten. Wird im zweiten Abschnitt der zweitunterste Weg gewählt, verbleiben 2 Möglichkeiten des dritten Wegabschnittes. Wird auch beim zweiten Abschnitt jedoch der unterste Weg eingeschlagen, dann verbleiben für die dritten Abschnitt 3 Möglichkeiten. Insgesamt kommen wir also auf $1 + 2 + 2 + 2 + 3$ kürzeste Wege. Etwas eleganter kann man diesen Beweis aufschreiben, indem man die Symmetrie der Anordnung ausnutzt und zunächst nur den zweiten Abschnitt betrachtet. Dies überlassen wir jedoch dem interessierten Leser!

Aufgabe 4

Carl Friedrich liebt das Wurzelziehen und schreibt einen langen ineinandergeschachtelten Wurzelausdruck an die Tafel:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}$$

Der Ausdruck enthält dabei genau 111 Einsen.
Zeige, dass der Wert des Wurzelausdrucks kleiner als 2 ist.

Lösung:
Wir nennen a_n die so konstruierte Zahl, welche genau n Einsen enthält. Der in der Aufgabe definierte Ausdruck ist also a_{111}. Wir zeigen nun mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass $a_n < 2$ für alle natürlichen Zahlen n gilt. Dazu müssen wir zunächst $a_1 < 2$ zeigen. Nach Definition ist aber $a_1 = 1$, also ist dies erfüllt. Nun nehmen wir an, wir hätten schon $a_n < 2$ für ein bestimmtes n gezeigt, und wollen $a_{n+1} < 2$ beweisen. Man sieht nun leicht, dass nach Konstruktion $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} < \sqrt{4} = 2$ gilt. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und also $a_n < 2$ für alle n gezeigt, insbesondere auch für $n = 111$.

Bemerkung: Mit derselben Methode lässt sich zeigen, dass $a_n < \ell$ ist, wobei $\ell = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$ die positive Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$ ist (diese Zahl ist auch als der Goldene Schnitt bekannt). Außerdem kann man sich überlegen, dass $a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$ gilt und sich aus $a_n > a_{n-1}$ auch $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n$ ergibt und somit induktiv folgt, dass $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ gilt, die Folge ist also streng monoton steigend. Da die Folge also monoton und beschränkt ($a_n < \ell$) ist, *konvergiert* sie. Dies bedeutet im Wesentlichen: Es gibt eine Zahl L, so dass die Folge beliebig nahe an L herankommt. Diese Zahl muss nun $L = \sqrt{1+L}$ erfüllen, außerdem muss $L > 0$ gelten, es folgt also $L = \ell$.
Analog kann man eine Folge b_n definieren, bei der in den Wurzelausdrücken nun Zweien statt Einsen stehen. Dann folgt aus den entsprechenden Überlegungen, dass stets $b_n < 2$ gilt und diese Folge auch gegen 2 konvergiert. Es gilt also

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2.$$