athematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 112 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Bei einem Turnier spielen 4 Fußballmannschaften so, dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielt. (Es gibt also kein Hin- und Rückspiel.) Angenommen, keine Mannschaft gewinnt alle ihre Spiele und es gibt kein Unentschieden. Zeige, dass es dann drei Mannschaften A, B, C gibt, für die gilt: A gewinnt gegen B, B gewinnt gegen C, und C gewinnt gegen A.

Lösung:

Wir betrachten drei Mannschaften A, B und C. Wenn jede Mannschaft in den Spielen untereinander genau einmal gewinnt, dann erfüllen die Mannschaften die Bedingung aus der Aufgabenstellung. Falls dem nicht so ist, gibt es eine Mannschaft, die zweimal gewinnt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies A. Da A laut Aufgabenstellung nicht alle Spiele gewinnt, muss A gegen D verlieren. Da wiederum D nicht alle Spiele gewinnen darf, muss D gegen B oder C verlieren. O.B.d.A. sei dies B. Dann gewinnt A gegen B, B gegen D und D gegen A. Dies entspricht der Forderung aus der Aufgabenstellung.

Man kann diese Lösung ohne großen Aufwand auf ein Turnier mit beliebig vielen Mannschaften verallgemeinern.
Wie auch in der Sportwelt interessieren wir uns für die Mannschaften mit den meisten Siegen. Eine dieser Mannschaften sei A. Da keine Mannschaft alle ihre Spiele gewinnt, muss es eine Mannschaft geben, gegen die A (vielleicht erst in der Verlängerung) verloren hat. Sei eine dieser Mannschaften C. Wenn nun C gegen alle Mannschaften gewinnen würde, gegen die A auch gewonnen hat, dann hätte die trickreiche Mannschaft C einen Sieg mehr als A. Dies widerspricht jedoch der Wahl von A. Sei eine dieser Mannschaften, die gegen A verlieren, aber gegen C gewinnen, B. Diese 3 Mannschaften erfüllen die Bedingungen aus der Aufgabenstellung.

Bei dieser Lösung war es wichtig, die Freiheit bei der Wahl einer der Mannschaft so zu nutzen, dass die Wahl der anderen beiden Mannschaften möglichst leicht fällt. Wir haben dies getan, indem wir A als eine der siegreichsten Mannschaft ausgewählt haben. Vorsicht ist jedoch geboten, da wir nicht annehmen können, dass A in dieser Hinsicht einzigartig ist.

Aufgabe 2

Es sei $r \geq 2$ und $s \geq 2$. Zeige, dass dann $rs \geq r + s$ ist.

Lösung:

Zunächst nehmen wir an, dass $r \geq s$ gilt. Dann folgt $r + s \leq 2r \leq rs$ aus der Voraussetzung $s \geq 2$. Im Fall $s \geq r$ geht der Beweis genauso.

Alternativ können wir zu beiden Seiten der Ungleichung $1 - r - s$ addieren und erhalten die äquivalente Behauptung $rs - r - s + 1 \geq 1$. Die linke Seite lässt sich aber als $(r-1)(s-1)$ schreiben. Nun sieht man direkt, dass die Behauptung stimmt, da beide Faktoren und somit auch das Produkt nach Voraussetzung mindestens 1 sind.

Aufgabe 3

Seien a, b reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass ihre Summe nicht-negativ ist, also $a + b \geq 0$ gilt. Zeige, dass dann

$$ax + by \geq ax^2 + by^2$$

für alle Paare (x, y) gilt, für die $x > 0$, $y > 0$ ist und $x + y = 1$ gilt.

Lösung:

Da die linke Seite ein Polynom in x und y vom Grad 2 und die rechte Seite vom Grad 3 ist, bietet es sich an, die linke Seite mit $x + y$ zu multiplizieren (man sagt auch: homogenisieren). Da nach Voraussetzung $x + y = 1$ gilt, ändert dies nichts am Wahrheitsgehalt. Nun ist aber

$$(ax + by)(x + y) = ax^2 + by^2 + (a + b)xy$$

und wegen $a + b \geq 0$ und $x, y > 0$ folgt nun

$$ax + by = (ax + by)(x + y) = ax^2 + by^2 + (a + b)xy \geq ax^2 + by^2,$$

also genau die Behauptung.

Aufgabe 4

Im Hof des Obstbauern stehen 3 Körbe mit Äpfeln und Birnen. Jeder Korb enthält sowohl Äpfel als auch Birnen, ihre Anzahl muss jedoch nicht übereinstimmen. Ist es möglich, 2 Körbe so zu wählen, dass diese mehr als 50 % aller Äpfel und mehr als 50 % aller Birnen enthalten?

Lösung:

Es ist in der Tat möglich, zwei Körbe wie angegeben auszuwählen. Dazu wählen wir einen der Körbe mit den meisten Äpfeln und einen der Körbe mit den meisten Birnen. (In vielen Fällen gibt es jeweils nur einen Korb, der den Beschreibungen genügt.) Falls die meisten Äpfel und die meisten Birnen in demselben Korb sind, nehmen wir einen beliebigen Korb zu unserer

Auswahl hinzu. Wir machen nun einen geschickten indirekten Beweis. Angenommen, die zwei Körbe zusammen hätten maximal 50 % der Äpfel oder maximal 50 % der Birnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Birnen die kritischen Früchte. Dann muss der dritte Korb mindestens 50 % der Birnen enthalten. Da einer der ausgewählten Körbe jedoch die meisten Birnen enthält, enthält er auch mindestens so viele Birnen wie der dritte Korb. Dementsprechend müssten beide Körbe die Hälfte aller Birnen enthalten. Dann wiederum würde der andere ausgewählte Korb jedoch gar keine Birnen enthalten. Dies steht im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Somit ist es unmöglich, dass in den beiden ausgewählten Körben nicht mehr als 50 % der Birnen enthalten sind. Analog folgt die Bedingung für die Äpfel. Guten Appetit, Obst ist gesund!