Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 113 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

Im DFB-Pokal treffen in der 1. Runde 64 Mannschaften in 32 K.-o.-Spielen aufeinander, in jeder weiteren Runde halbiert sich die Anzahl der Mannschaften. Dabei nehmen wir an, dass die Paarungen der K.-o.-Spiele in jeder Runde zufällig ausgelost werden. Thomas und Pep wissen: Ihre Lieblingsmannschaften sind im Pokal unschlagbar – es sei denn, sie treffen direkt aufeinander. Nun überlegen sie, ob es wahrscheinlicher ist, dass ihre Teams erst im Finale aufeinandertreffen, oder ob es wahrscheinlicher ist, dass sie schon vorher gegeneinander antreten. Was meinst du?

Lösung:

Zunächst betrachten wir die beiden Halbfinalpartien. Im Anschluss an das Turnier sehen wir, dass aufgrund der Auslosung je 32 Mannschaften die Chance hatten, an einer der beiden Halbfinalpartien teilzunehmen. Die andere Hälfte der Mannschaften hätte es nur zu einer Qualifikation für das andere Halbfinalspiel schaffen können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass Thomas' Mannschaft T die Chance hatte, am ersten Halbfinalspiel teilzunehmen. Neben T gibt es noch 31 andere Mannschaften, die auch um einen Platz in diesem Halbfinale kämpften. Falls Peps Mannschaft P zu diesen 31 Mannschaften gehört, dann treffen T und P spätestens im Halbfinale aufeinander, es kommt also zu keinem Finale zwischen den beiden „Supermannschaften“. Falls andererseits Peps Mannschaft zu den 32 Mannschaften gehört, die um einen Einzug in das andere Halbfinale spielen, dann werden sowohl T als auch P alle ihre Spiele bis zum Finale gewinnen und dort als Titelanwärter zur Begeisterung der Zuschauer antreten. Da die Auslosung der Mannschaften gleichverteilt zufällig erfolgt, ist die Wahrscheinlichkeit von einem gemeinsamen Finale mit $\frac{32}{63}$ leicht größer als die Wahrscheinlichkeit auf ein früheres Aufeinandertreffen mit $\frac{31}{63}$.

Lösungsvariante. Wir können den Verlauf des Turniers auch vorwärts betrachten, Runde für Runde. Jeder einzelne Schritt ist dann einfacher nachzuvollziehen – dafür muss man jeden Schritt einzeln machen.
In der ersten Runde sind 64 Mannschaften beteiligt, eine davon ist die Lieblingsmannschaft von Pep. Ihr wird eine der 63 anderen Mannschaften zugelost. In 62 dieser 63 Möglichkeiten ist das nicht Thomas' Mannschaft, so dass dann beide Mannschaften weiterkommen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist folglich $\frac{62}{63}$.
In der zweiten Runde sind es noch 32 Mannschaften; in 30 von 31 Fällen trifft Peps Mannschaft nicht auf Thomas' Mannschaft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Mannschaften in die dritte Runde kommen, *unter der*

Voraussetzung, dass sie beide in die zweite Runde gekommen waren, ist somit $\frac{30}{31}$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass beide Mannschaften in die dritte Runde kommen, ist also $\frac{62}{63} \cdot \frac{30}{31} = \frac{2 \cdot 30}{63} = \frac{60}{63}$.
Führen wie diese Überlegungen bis ins Halbfinale fort, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass beide Mannschaften ins Finale kommen:

$$\begin{aligned} &\frac{62}{63} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \\ =& \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{63} \\ =& \frac{32}{63}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Nachdem am Abend des 20. April (wohlgemerkt deutlich nach Einsendeschluss) feststand, dass es zum dritten Mal innerhalb von fünf Jahren dieselbe Paarung im Endspiel des DFB-Pokals geben wird, scheint auch die F.A.Z. auf die praktische Relevanz der hier untersuchten Fragestellung aufmerksam geworden zu sein.
Mit einer der obigen Lösung ähnlichen Rechnung wurde dort die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis ermittelt – unter der Überschrift „Vom Mathematik-Lehrer bestätigt“. Den vollständigen Artikel findet man hier: www.faz.net/-gtl-8g6cz.

Aufgabe 2

Annabell besucht regelmäßig ihren Freund Konstantin mit der Straßenbahn. Sie wohnt einen Kilometer von der nächsten Straßenbahnhaltestelle entfernt und kommt beim Gehen auf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 5 km/h. Rennt sie jedoch, bewegt sich das sportliche Mädchen mit 15 km/h fort. Beim Verlassen des Hauses vergisst sie immer, auf die Uhr zu schauen. Sie weiß nur, dass die Straßenbahnen alle 15 Minuten fahren. Ob und wann eine Straßenbahn fährt, kann sie erst beim Erreichen der Haltestelle überprüfen. Wie viel früher kommt sie im Durchschnitt bei ihrem Freund an, wenn sie einen bestimmten Anteil des Weges läuft?

Lösung:

Sei k der Anteil der Wegstrecke, den Annabell laufend zurücklegt. Sie läuft also eine Strecke von k km und geht eine Strecke von $(1-k)$ km. Aufgrund des ehernen Gesetzes $t = \frac{s}{v}$ braucht sie dafür insgesamt eine Zeit von

$$\begin{aligned} t &= k \cdot \frac{1\,\text{km}}{15\,\text{km/h}} + (1-k) \cdot \frac{1\,\text{km}}{5\,\text{km/h}} \\ t &= k \cdot 4\,\text{min} + (1-k) \cdot 12\,\text{min} \\ t &= 12\,\text{min} - k \cdot 8\,\text{min}\,. \end{aligned}$$

Geht sie den gesamten Weg, so gilt $k = 0$. Dann gilt $t = 12\,\text{min}$. Somit spart sie durch Laufen eine Zeit von $k \cdot 8$ min. Da sie beim Ankommen an der

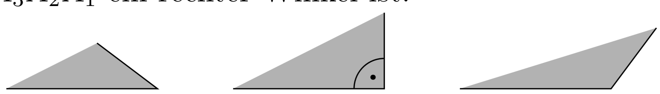
Straßenbahnhaltestelle nichts über die Ankunftszeit der letzten Straßenbahn weiß, weiß sie nur, dass die nächste Straßenbahn innerhalb der kommenden 15 Minuten fahren wird. Die Ankunftszeit ist dabei gleichmäßig zufällig verteilt, für zwei gleich lange Zeitintervalle innerhalb der nächsten 15 Minuten sind also auch die Wahrscheinlichkeiten, dass die Straßenbahn innerhalb dieses Intervalls fährt, gleich groß. Diese Konstellation ergibt sich für jede beliebige Ankunftszeit Annabells an der Haltestelle. Ab dort ist die erwartete Restreisezeit also immer dieselbe. Somit wird Annabell erwartungsgemäß auch $k \cdot 8$ min früher bei Konstantin ankommen.

Aufgabe 3

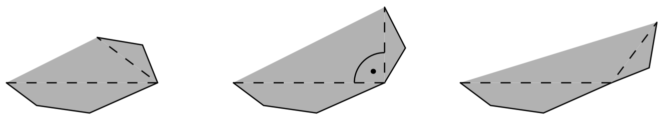
Eine *Gelenkschlange* besteht aus Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wobei die einzelnen Abstände $|A_1A_2|, |A_2A_3|, \ldots, |A_{n-1}A_n|$ fest, die Winkel zwischen den einzelnen Strecken jedoch variabel sind (insbesondere ist der Abstand $|A_1A_n|$ nicht fest).
Wie muss eine solche Gelenkschlange geformt werden, damit der Flächeninhalt des Polygons $A_1A_2 \cdots A_n$ maximal wird?

Lösung:

Im Folgenden nehmen wir an, dass tatsächlich ein Maximum existiert und dieses auch in einer Konstellation erreicht wird, in der die Gelenkschlange sich nicht kreuzt und die von ihr aufgespannte Fläche konvex ist (also, kurz gesagt, die Schlange immer in die gleiche Richtung gekrümmt ist).
Dies ist intuitiv klar, ein formaler Beweis ist allerdings etwas mühsam.
Zunächst untersuchen wir den Fall $n = 3$. Ist h der Abstand von A_3 zu A_1A_2, so gilt für den Flächeninhalt F des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bekanntlich: $F = \frac{|A_1A_2| \cdot h}{2}$. Da $|A_1A_2|$ fest ist, müssen wir nur untersuchen, wann h maximal wird.
Es gilt aber offensichtlich $h \leq |A_2A_3|$ und also $F \leq \frac{|A_1A_2| \cdot |A_2A_3|}{2}$ mit Gleichheit, wenn $\angle A_3A_2A_1$ ein rechter Winkel ist.



Nun sei $n \geq 3$ beliebig und wir betrachten einen der Punkte A_k mit $2 \leq k \leq n-1$. Wir wollen untersuchen, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn wir den Winkel bei A_k verändern, die anderen Winkel aber gleich lassen. Der Flächeninhalt F setzt sich dann zusammen aus der Fläche F_1 des Polygons $A_1A_2 \ldots A_k$, der Fläche F_2 des Dreiecks $A_1A_kA_n$ und der Fläche F_3 des Polygons $A_kA_{k+1} \ldots A_n$. Da wir nur den Winkel bei A_k verändern, bleiben F_1 und F_3 konstant. Da nun aber $|A_1A_k|$ und $|A_kA_n|$ auch konstant sind, können wir den oben untersuchten Fall $n = 3$ anwenden und erhalten, dass F_2 maximal wird, falls $\angle A_nA_kA_1$ ein rechter Winkel ist.



Wenden wir dieses Resultat für alle k mit $2 \leq k \leq n-1$ an, erhalten wir, dass der Flächeninhalt von $A_1A_2 \ldots A_n$ maximal wird, falls $\angle A_nA_kA_1$ für alle solchen k ein rechter Winkel ist.
Nach dem Satz von Thales ist dies genau dann der Fall, wenn die Punkte $A_2, \ldots, A_{n-1}$ auf dem Halbkreis mit Durchmesser A_1A_n liegen.

Aufgabe 4

Wir betrachten Wörter der Länge k, die nur aus den Buchstaben B, E, I und N bestehen. Wie viele von ihnen enthalten genauso oft B wie I?

Lösung:

Zunächst sei uns ein Wort zum Begriff „Wort" erlaubt. Im mathematischen Sinne ist ein *Wort* schlichtweg eine Aneinanderreihung von Zeichen. Ob solch ein Wort eine Bedeutung im Sinne der deutschen Sprache hat, ist dabei egal. So war auch unsere Aufgabe gemeint – wir hätten das vielleicht deutlicher schreiben sollen.

Sei zunächst W die Menge aller Wörter der Länge k, die nur aus diesen 4 Buchstaben bestehen. Sei weiterhin C die Menge aller Binärcodes der Länge $2k$, also Folgen, die nur aus Nullen und Einsen bestehen. Da W und C gleich viele Elemente haben (nämlich beide 4^k), können wir eine Bijektion, also eine eineindeutige Abbildung, zwischen den beiden Mengen finden. Wir können also jedes Wort aus W durch eine binäre Folge der Länge $2k$ kodieren. Dies geht zum Beispiel, indem wir jedem Buchstaben einen zweistelligen Binärcode zuordnen, also stellen wir etwa B durch 00, E durch 01, I durch 11 und N durch 10 dar. Für $k = 3$ entspricht dann etwa das Wort NIE dem Code 101101.
Natürlich hätten wir hier auch eine beliebige andere Kodierung, also eine andere Zuordnung zu den Buchstaben wählen können, aber es wird sich gleich zeigen, dass diese spezielle Wahl uns beim Lösen der Aufgabe nützlich ist.
Nun betrachten wir nämlich die Menge W' aller erlaubten Wörter, also die Teilmenge von W, deren Größe wir bestimmen wollen. Mithilfe unserer Bijektion können wir stattdessen die Größe der Menge C' bestimmen, die aus den entsprechenden Binärcodes der erlaubten Wörter besteht.
Und hier zeigt sich, warum die Wahl der Kodierung oben so geschickt war: Denn die Nebenbedingung, dass genauso oft B wie I vorkommen soll, „übersetzt" sich direkt in die Bedingung, dass im entsprechenden Binärcode genau k Einsen und k Nullen auftauchen.
Die Menge C' enthält also genau die Binärcodes der Länge $2k$, die aus k Nullen und k Einsen bestehen. Wir müssen daher von den $2k$ möglichen Stellen genau k für die Einsen aussuchen. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür wird – hoffentlich bekanntermaßen – durch den Binomialkoeffizienten $\binom{2k}{k}$ angegeben, es gibt daher genau $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ Wörter der Länge k mit den gesuchten Eigenschaften.