Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 113 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Bei einem Handballturnier treten in der 1. Runde acht Mannschaften in vier K.-o.-Spielen gegeneinander an, in der nächsten Runde gibt es noch zwei K.-o.-Spiele und dann ein Finale. Mattias und Niklas wissen, dass ihre Mannschaften unschlagbar sind – es sei denn, sie treffen direkt aufeinander. Nun überlegen sie, ob es wahrscheinlicher ist, dass ihre Teams erst im Finale aufeinandertreffen, oder ob es wahrscheinlicher ist, dass sie schon vorher gegeneinander antreten. Was meinst du?

Lösung:

Wir betrachten den Spielplan des Turniers, nachdem dieses abgeschlossen ist. Im Finale stehen zwei Mannschaften. Aufgrund der Symmetrie des Spielplans haben je vier Mannschaften die Chance auf den Einzug in das Finale über das erste bzw. über das zweite Halbfinale. Angenommen, Mattias' Lieblingsmannschaft müsste aufgrund des (zumindest im Nachhinein) bekannten Spielplans über das erste Halbfinale in das Finale einziehen, damit die Mannschaft um den Titel kämpfen kann. Nun kommt ein Traumfinale genau dann zustande, wenn Niklas' Lieblingsmannschaft über das zweite Halbfinale einzieht. Für die Einordnung dieser Mannschaft in den Spielplan gibt es, da ein Platz bereits von Mattias' Mannschaft belegt wird, noch sieben Möglichkeiten. Jede dieser Möglichkeiten ist gleich wahrscheinlich und vier der Möglichkeiten führen zu einer Teilnahme am zweiten Halbfinale. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Traumfinale der beiden handballbegeisterten Jungen ergibt, $\frac{4}{7}$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{7}$ treffen die Mannschaften schon zu einem früheren Zeitpunkt aufeinander.

Aufgabe 2

Annabell besucht regelmäßig ihre Freundin Emma mit der Straßenbahn. Sie wohnt einen Kilometer von der nächsten Straßenbahnhaltestelle entfernt und kommt beim Gehen auf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $5\,\mathrm{km/h}$. Rennt sie jedoch, bewegt sich das sportliche Mädchen mit $15\,\mathrm{km/h}$ fort. Beim Verlassen des Hauses vergisst sie immer, auf die Uhr zu schauen. Sie weiß nur, dass die Straßenbahnen alle 15 Minuten fahren. Ob und wann eine Straßenbahn fährt, kann sie erst beim Erreichen der Haltestelle überprüfen. Wie viel früher kommt sie im Durchschnitt bei ihrer Freundin an, wenn sie einen bestimmten Anteil des Weges läuft?

Lösung:

Sei k der Anteil der Wegstrecke, den Annabell laufend zurücklegt. Sie läuft also eine Strecke von $k\,\mathrm{km}$ und geht eine Strecke von $(1-k)\,\mathrm{km}$. Aufgrund des ehernen Gesetzes $t = \frac{s}{v}$ braucht sie dafür insgesamt eine Zeit von

$$\begin{aligned} t &= k \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{15\,\mathrm{km/h}} + (1-k) \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{km/h}} \\ t &= k \cdot 4\,\mathrm{min} + (1-k) \cdot 12\,\mathrm{min} \\ t &= 12\,\mathrm{min} - k \cdot 8\,\mathrm{min}\,. \end{aligned}$$

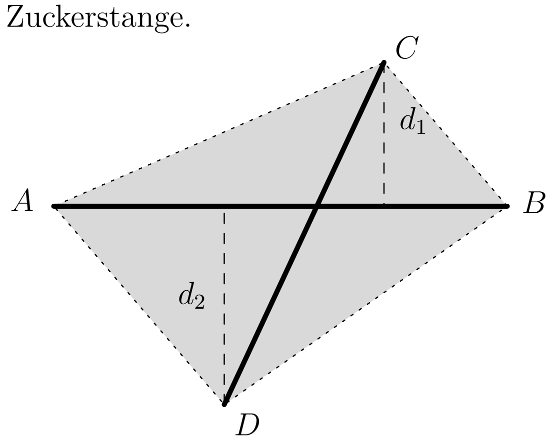
Geht sie den gesamten Weg (also $k = 0$), so braucht sie 12 Minuten. Somit spart sie durch Laufen eine Zeit von $k \cdot 8\,\mathrm{min}$. Da sie beim Ankommen an der Straßenbahnhaltestelle nichts über die Ankunftszeit der letzten Straßenbahn weiß, weiß sie nur, dass die nächste Straßenbahn innerhalb der kommenden 15 Minuten fahren wird. Die Ankunftszeit ist dabei gleichmäßig zufällig verteilt, für zwei gleich lange Zeitintervalle innerhalb der nächsten 15 Minuten sind also auch die Wahrscheinlichkeiten, dass die Straßenbahn innerhalb dieses Intervalls fährt, gleich groß. Diese Konstellation ergibt sich für jede beliebige Ankunftszeit Annabells an der Haltestelle. Ab dort ist die erwartete Restreisezeit also immer dieselbe. Somit wird Annabell erwartungsgemäß auch $k \cdot 8\,\mathrm{min}$ früher bei Emma ankommen.

Aufgabe 3

Zu Emmas 15. Geburtstag gibt es eine große Torte. Natürlich darf sie sich als Erste ein Stück nehmen. Dazu legt sie eine 5 cm lange Lakritzstange und eine 6 cm lange Zuckerstange auf die Torte, wobei die Stangen sich kreuzen sollen. Das von den vier Eckpunkten aufgespannte Stück bekommt sie dann auf den Teller. Wie muss sie die Leckereien platzieren, damit das Stück möglichst groß wird?

Lösung:

Wir nehmen zunächst an, dass Emma sich bereits je einen Punkt auf beiden Stangen ausgesucht hat, an dem diese sich kreuzen sollen. Nun wollen wir herausfinden, in welchem Winkel sie die Stangen zueinander legen sollte, um ein möglichst großes Stück zu erhalten.
Dazu betrachten wir die Konstellation in der Ebene und bezeichnen mit A und B die Endpunkte der Zuckerstange, mit C und D die der Lakritzstange sowie mit S den Kreuzungspunkt. Weiterhin seien d_1 und d_2 die Abstände von C bzw. D zur Zuckerstange.



Dann ist die Fläche des Kuchenstücks gleich $\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot 6\,\text{cm}$ für das Stück zwischen A, B und C und $\frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot 6\,\text{cm}$ für das Stück zwischen A, B und D, insgesamt also $F = \frac{1}{2} \cdot (d_1 + d_2) \cdot 6\,\text{cm} = (d_1 + d_2) \cdot 3\,\text{cm}$.
Nun ist aber das Lot die kürzeste Verbindung eines Punkts mit einer Geraden, insbesondere gilt also $d_1 \leq |CS|$ und $d_2 \leq |DS|$. Damit folgt

$$F \leq (|CS| + |DS|) \cdot 3\,\text{cm} = |CD| \cdot 3\,\text{cm} = 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^2.$$

Der Gleichheitsfall tritt dabei genau dann ein, wenn CS bzw. DS schon das Lot ist, wenn also die beiden Stangen senkrecht zueinander liegen.
Damit ist gezeigt, dass unabhängig von der Auswahl des Kreuzungspunktes das Stück höchstens $15\,\text{cm}^2$ groß wird. Dies kann Emma erreichen, indem sie die Stangen (bei beliebigem Kreuzungspunkt) senkrecht zueinander legt – vorausgesetzt, der Kuchen ist groß genug.

Aufgabe 4

Nach dem Kuchenessen gehen Emma und ihre 17 Gäste, darunter sechs Jungen, gemeinsam ins Kino. Dazu haben sie eine ganze Reihe mit 18 Plätzen reserviert. Wie viele Sitzreihenfolgen gibt es nun, bei denen jedes Mädchen neben mindestens einem Jungen sitzt?

Lösung:

Da jeder der Jungen höchstens zwei Nachbarn hat, haben die 6 Jungen zusammen höchstens 12 Nachbarn. Soll nun jedes der 12 Mädchen neben mindestens einem Jungen sitzen, so muss also jeder Junge zwischen zwei Mädchen sitzen und jedes Mädchen neben genau einem Jungen. Damit muss am Rand ein Mädchen sitzen, danach kann nur ein Junge kommen, danach zwei Mädchen, dann wieder ein Junge usw.
Es gibt also nur eine Möglichkeit, die 18 Plätze auf Mädchen und Jungen zu verteilen, wenn man dabei nur auf das Geschlecht achtet. Nun gibt es aber noch verschiedene Möglichkeiten, die 6 Jungen auf die 6 „Jungenplätze“ und die 12 Mädchen auf die 12 „Mädchenplätze“ zu verteilen.
Dazu die folgende Überlegung: Die Jungen stellen sich in einer Reihe auf. Nun sucht sich der erste von ihnen einen der 6 Plätze aus, dafür hat er 6 Möglichkeiten. Der zweite hat dann noch 5, der dritte noch 4 Möglichkeiten usw. Insgesamt haben die Jungen also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, sich auf die 6 Plätze zu verteilen. Genauso überlegen wir uns, dass die Mädchen $12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten haben, ihre 12 Plätze zu besetzen.
Solche Produkte von der Form $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (wobei n eine positive ganze Zahl ist) kommen in der Mathematik (vor allem beim Abzählen von Dingen) oft vor, deshalb haben sich die Mathematiker dafür eine Abkürzung ausgedacht: Sie schreiben $n!$ (und sagen: n *Fakultät*).
Insgesamt ergeben sich also $12! \cdot 6! = 344\,881\,152\,000$ Möglichkeiten.