Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

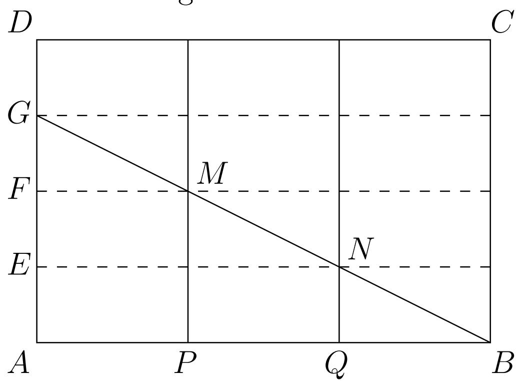
Beispiellösungen zu Blatt 114 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

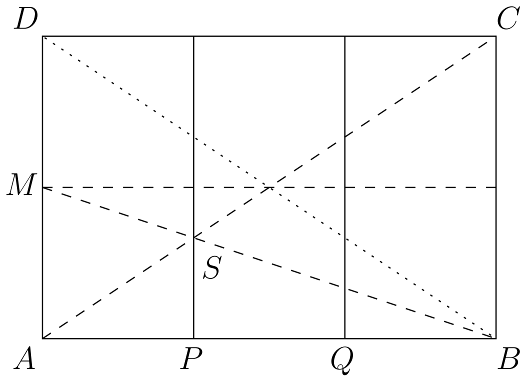
Indem wir ein Blatt Papier zweimal falten, können wir eine seiner Seiten vierteln. Um einen Brief zu verschicken, möchten wir aber oft wissen, wo ein Drittel der Seitenlänge liegt. Ist es ebenfalls möglich, dies exakt und ohne Abmessen herauszufinden?
Zusatzfrage: Da ein stark zerknickter Briefbogen zwar für das mathematische Auge interessant, für den praktischen Gebrauch jedoch ungeeignet ist, suchen wir nach einer Konstruktion, die mit möglichst wenigen Knicken auskommt.

Lösung:

1. Lösung: Wir nutzen aus, dass wir bereits wissen, wie man Seiten vierteln kann. Durch zweimaliges Halbieren entlang der langen Seite teilen wir die kurze Seite AD in vier gleich große Teile, die durch die Punkte E, F und G voneinander getrennt werden. Hier gibt es einen Teil, den wir bereits gedrittelt haben, nämlich die Strecke AG. Dies möchten wir nun auf die Seite AB übertragen. Dazu falten wir zunächst die Kante BG. Diese wird nun nach dem Strahlensatz durch die bereits gefalteten Parallelen zu AB durch E und F mit den Schnittpunkten M und N ebenfalls gedrittelt. Schließlich falten wir die Parallelen zu AD durch M und N und erhalten durch erneute Anwendung des Strahlensatzes eine Drittelung der Seite AB durch die Punkte P und Q.



2. Lösung: Wir halbieren zunächst die Seite AD und erhalten den Mittelpunkt M. Dann falten wir die Diagonale AC und die Strecke BM. Diese schneiden sich im Punkt S. Nun falten wir parallel zu AD durch S und erhalten den Punkt P auf AB. Dabei kommt gleichzeitig A auf der Strecke PB auf einem Punkt Q zu liegen. An der Kante, die im einmal gefalteten Zustand von den Ecken A und D gebildet wird, können wir das Blatt parallel dazu durch Q falten.



Wir behaupten nun, dass P und Q die Seite AB dritteln. Nach dem Strahlensatz genügt es dafür zu zeigen, dass S die Strecke BM im Verhältnis $2 : 1$ teilt.

Dies lässt sich nun z. B. mit einer erneuten Anwendung des Strahlensatzes beweisen: Denn die Strecken BM und AC schneiden sich in S, AM und BC sind parallel und BC ist doppelt so lang wie AM, folglich ist auch BS doppelt so lang wie SM.

Ein alternativer Beweis, auf den uns unser Teilnehmer Achim aufmerksam gemacht hat, nutzt ein wenig Wissen über Seitenhalbierenden: Dazu betrachten wir das Dreieck ABD. Die Strecke BM ist eine Seitenhalbierende und auch die Diagonale AC halbiert die Diagonale BD, denn sie treffen sich gerade im Mittelpunkt des Rechtecks. Damit ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABD und bekanntlich teilt dieser die Seitenhalbierenden gerade im Verhältnis $2 : 1$. Damit ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 2

Der Maulwurf Tom lebt in New York City auf bzw. unter einer Straßenkreuzung, und zwar in einem Bereich, wo die Straßen ein exaktes Quadratgitter bilden. Daher werden die Straßenkreuzungen einfach durch ein Paar ganzzahliger Koordinaten beschrieben. Tom lebt unter dem Punkt $O = (0, 0)$. Nun möchte er sich mit einem Freund treffen, der unter einer anderen Straßenkreuzung $K = (r, s)$ lebt. Damit keiner auf den anderen warten muss, ist unter Maulwürfen das folgende Verfahren üblich: Sie machen sich gleichzeitig auf den Weg, das heißt, sie graben sich erst genügend tief hinunter und treffen sich dann an einem Ort, der gleich weit von O und K entfernt ist.

Gerne graben sich die Freunde auch mal nach oben durch und schauen kurz auf die dortige Straßenkreuzung – wenn denn dort überhaupt eine ist. Unter welchen Umständen (also: bei welchen Eigenschaften von r und s) ist es möglich, dass sich die beiden Freunde unter einer Straßenkreuzung treffen?

Lösung:
Angenommen, es gibt einen solchen Ort, der gleich weit von O und K entfernt ist, also einen Punkt $P = (x, y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x und y so, dass $|OP| = |PK|$ ist. Nach dem Satz des Pythagoras ist $|OP|^2 = x^2 + y^2$ und $|PK|^2 = (x - r)^2 + (y - s)^2$. Die Bedingung ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} & & x^2 + y^2 &= (x-r)^2 + (y-s)^2 \\ &\Leftrightarrow & x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2xr - 2ys + r^2 + s^2 \\ &\Leftrightarrow & 2(xr + ys) &= r^2 + s^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Damit es überhaupt einen solchen Punkt P geben kann, muss somit $r^2 + s^2$ gerade sein. Allerdings ist r^2 bzw. s^2 genau dann gerade, wenn r bzw. s gerade ist, daher muss auch $r + s$ gerade sein.
Wir haben also eine notwendige Bedingung dafür gefunden, dass es zu einem Treffen der Freunde kommen kann. Nun müssen wir uns noch überlegen, dass diese Bedingung schon hinreichend ist.
Seien nun r, s ganze Zahlen so, dass $r + s$ gerade ist. Wir suchen $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass Gleichung (1) gilt. Wir würden gerne $x = \frac{r}{2}$ und $y = \frac{s}{2}$ setzen, dies funktioniert aber nur, falls r und s beide gerade sind. Eine allgemeine Konstruktion, die auch funktioniert, falls r und s beide ungerade sind, ist $x = \frac{r-s}{2}, y = \frac{r+s}{2}$.
Da r und s dieselbe Parität haben, sind die Zahlen $r-s$ und $r+s$ beide gerade und die so konstruierten x, y somit tatsächlich ganze Zahlen. Weiterhin ist

$$2(xr + ys) = r(r - s) + s(r + s) = r^2 + s^2,$$

also ist Gleichung (1) tatsächlich erfüllt.
Damit ist gezeigt, dass die beiden Freunde sich genau dann auf die gewünschte Weise treffen können, wenn r und s dieselbe Parität haben.

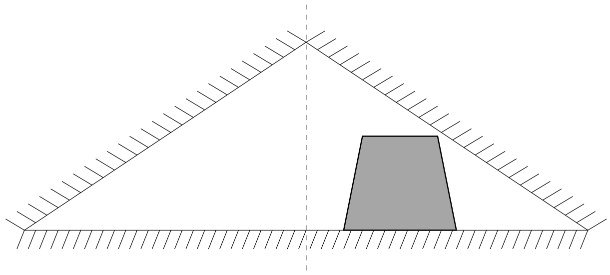
Alternative Herleitung von Gleichung (1)*:*
Der geometrische Ort der Punkte, die von O und K gleich weit entfernt sind, ist bekanntlich die Mittelsenkrechte, also die Gerade, die durch den Mittelpunkt von OK, $\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, geht und senkrecht auf OK steht.
Mithilfe der zueinander ähnlichen Steigungsdreiecke kann man sich nun überlegen, dass diese Mittelsenkrechte die Geradensteigung $-\frac{r}{s}$ haben muss.
Die Punkte auf der Mittelsenkrechten werden also durch die Gleichung

$$\begin{aligned} & & -\frac{r}{s} = \frac{y - \frac{s}{2}}{x - \frac{r}{2}} &= \frac{2y - s}{2x - r} \\ &\Leftrightarrow & r(2x - r) &= s(s - 2y) \\ &\Leftrightarrow & 2(xr + ys) &= r^2 + s^2 \end{aligned}$$

beschrieben, womit wir also ebenfalls Gleichung (1) erhalten haben und ab hier wie oben argumentieren können.
Die Fälle, in denen einer der Terme im Nenner null wird, wurden hier ausgelassen, sie bereiten aber keine Schwierigkeiten.

Aufgabe 3

Traudels Trapez-Transportgesellschaft hat nur Lastwagen mit symmetrisch-trapezförmigem Querschnitt. Diese sollen durch einen Tunnel fahren, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Fläche von $48\,\mathrm{m}^2$ ist. Dabei dürfen sie natürlich nur auf der rechten Hälfte fahren. Wie groß ist der maximale Querschnitt eines solchen Lastwagens?



Lösung:

Wir betrachten einen Lastwagen mit maximalem Querschnitt. Der Einfachheit halber sprechen wir allerdings direkt von einem Trapez – es handelt sich ja doch eher um eine Mathematik-Aufgabe ...

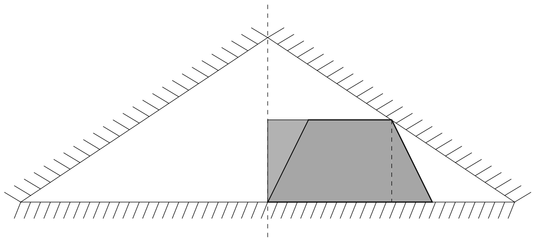
Falls das Trapez nicht die Mittellinie des Tunnels berührt, können wir es nach links verschieben, bis es die Mittellinie berührt. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ein Trapez maximalen Querschnitts die Mittellinie berührt.

Wenn der obere linke Eckpunkt des Trapezes die Mittellinie berührt, der untere linke aber nicht, dann ist es aufgrund der Geometrie des Tunnels möglich, die untere Seite des Trapezes auf die gleiche Breite wie die obere zu bringen. Damit wird das Trapez sogar echt größer. Wir können also voraussetzen, dass das Trapez unten nicht weniger breit ist als oben.

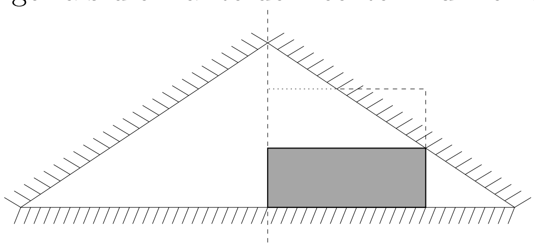
Wenn schließlich der obere rechte Eckpunkt des Trapezes nicht die schräge Seite des erlaubten Querschnitts-Dreiecks berührt, dann ist es möglich, das gesamte Trapez von der Mittellinie des Tunnels aus nach rechts zu verbreitern, indem die beiden parallelen Seiten länger gemacht werden. Auch dabei vergrößert sich die Fläche.

Hieraus und aus der ersten Beobachtung ergibt sich, dass ein Trapez maximaler Größe in jedem Fall den Fußpunkt der Tunnel-Mittellinie berühren muss.

Ein (erlaubtes) Trapez maximaler Fläche hat also einen Eckpunkt links unten an der Mittellinie und den rechten oberen Eckpunkt an der schrägen Tunnelwand. Wir stellen außerdem fest, dass jedes solche Trapez genauso groß ist wie das Rechteck, das zu dieser Menge an Trapezen gehört. Dies ist leicht einzusehen, indem man rechts das „überstehende“ Dreieck abschneidet und gespiegelt an der linken Seite wieder anfügt.

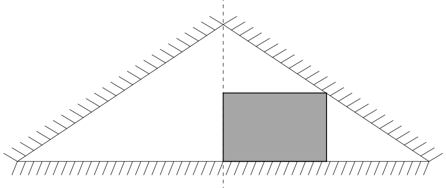


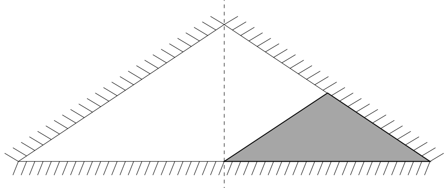
Im Folgenden können wir also annehmen, dass unser Trapez ein Rechteck ist. Nehmen wir nun an, dass der rechte obere Eckpunkt die Tunnelwand unterhalb ihrer Mitte berührt. Das dreieckige Stück des Tunnelquerschnitts rechts vom Lastwagen drehen wir um den Berührpunkt um 180°, wir klappen es also sozusagen oben auf den Tunnel. Insbesondere kommt auch die ehemals rechte Spitze des Dreiecks auf dem Inneren der Tunnelkante zu liegen. Setzt man die waagerechte Kante des Anhängsels bis zur Tunnelmitte fort (gepunktete Linie in der folgenden Abbildung), so ergibt sich damit ein Rechteck, das genauso groß wie der Lastwagen ist. Da oberhalb dieses Rechtecks noch weiterer Tunnelquerschnitt liegt, ergibt sich, dass der Lastwagen in diesem Fall weniger als die Hälfte der rechten Tunnelhälfte ausfüllt.



Genau entsprechend ergibt sich diese Feststellung, wenn der Berührpunkt oberhalb der Mitte liegt – dann klappen wir das obere Dreieck des rechten freien Tunnelquerschnitts nach rechts unten.
Wenn hingegen der Berührpunkt genau in der Mitte liegt, dann ist sowohl die Höhe des Rechtecks halb so groß wie die Höhe des Tunnels als auch die Breite des Rechtecks halb so breit wie die rechte Tunelhälfte. Daher ist jedes der beiden freien Dreiecke des rechten Tunnelquerschnitts genau halb so groß wie das Rechteck, weil die beiden Seitenlängen am rechten Winkel genauso groß wie die Seitenlängen des Rechtecks sind. In diesem Fall füllt der Lastwagen also genau die Hälfte der rechten Tunnelhälfte aus, was somit das Maximum darstellt.
Da der Tunnel im Querschnitt $48\,\mathrm{m}^2$ groß ist, hat der Lastwagen dann ein Viertel dieses Querschnitts, also $12\,\mathrm{m}^2$.

Die Form des Lastwagens ist dabei variabel zwischen einem Rechteck und einem gleichschenkligen Dreieck. Dabei gehört das Dreieck als Grenzfall nicht zur Lösungsmenge, weil es kein nicht-entartetes Trapez ist.





Aufgabe 4

Konstantin möchte seine Freundin Annabell, die auf der anderen Seite der Stadt wohnt, mit der Straßenbahn besuchen. Er wohnt 1 km von der Haltestelle entfernt und geht mit 4 km/h. Leider hat er vor Aufregung den Fahrplan der Straßenbahnlinie vergessen, nur noch an den Takt von 15 Minuten kann er sich entsinnen. Auf seinem Weg zur Straßenbahn sieht er, wenn die Straßenbahn in die von ihm gewünschte Richtung abfährt, er sie also nicht mehr erreicht. Nun fragt er sich, ob und wo auf dem Weg es sich lohnt, mit einer Geschwindigkeit von 8 km/h zu rennen. Hat er einmal angefangen zu rennen, so hört er erst wieder auf, wenn er die Haltestelle erreicht hat oder wenn er die Straßenbahn abfahren sieht. Er weiß jedoch, dass er für jede gerannte Minute bei Annabell 2 Minuten verschnaufen muss, ehe sie anfangen können, gemeinsam zu spielen. Natürlich möchte er den Weg so zurücklegen, dass er die Aussicht hat, möglichst viel nutzbare Zeit bei Annabell zu gewinnen. Mathematisch präziser ausgedrückt: Er möchte den *Erwartungswert* der mit Annabell nutzbaren Zeit maximieren. Wo auf seinem Weg sollte er dazu mit dem Rennen anfangen?

Lösung:

Zunächst betrachten wir Konstantins Plan, um zu Annabell zu gelangen. Am Anfang wird er eine Zeit t mit Gehen verbringen. Sieht er währenddessen die Straßenbahn wegfahren, wird er auch den restlichen Weg gehen, er weiß ja, dass er den gesamten Weg von einem Kilometer in 15 Minuten zurücklegen kann. Da die Straßenbahnen auch in einem Takt von 15 Minuten fahren, wird er die nächste Straßenbahn ganz sicher erreichen. Ist die Straßenbahn in dieser Zeit noch nicht weggefahren, so fängt er an zu rennen. Da er, wenn die Straßenbahn noch zu erreichen ist, bis zu diesem Punkt keine zusätzlichen Informationen erhält, wird er auch immer nach der gleichen Zeit anfangen zu rennen. Nun wird er laut Aufgabenstellung so lange rennen, bis er entweder die Haltestelle erreicht hat (Konstantin ist glücklich) oder bis die Straßenbahn ohne ihn weggefahren ist (Konstantin ist traurig). Im ersten Fall wird er noch die „frühe Straßenbahn“ erreichen, im anderen Fall wird er den restlichen Weg gehen und die nächste Straßenbahn nehmen. Wenn er die frühere Straßenbahn schafft, macht er genau 15 Minuten gut. Theoretisch wäre es auch möglich, dass Konstantin die Straßenbahn nach 15 Minuten Gehen genau erreicht. Da das Zeitintervall, in dem die Straßenbahn für diesen Fall kommen müsste, die Länge 0 besitzt, tritt dieser Fall mit Wahrscheinlichkeit 0 auf und muss nicht weiter betrachtet werden.

Um über die zeitlichen Vor- und Nachteile für Konstantin Buch führen zu können, führen wir ein *Zeitkonto* ein:

Zu Beginn ist der Kontostand 0 Minuten. Für jede gerannte Minute werden von seinem Konto 2 Minuten abgezogen (also genau die Zeit, die er dafür bei Annabell verschnaufen muss); bekommt er die Straßenbahn in den ersten 15 Minuten, bekommt er dafür 15 Minuten gutgeschrieben.

Zunächst wollen wir den Fall betrachten, dass Konstantin die Straßenbahn bis zum Zeitpunkt t, an dem er mit Rennen beginnen möchte, nicht sieht.

Am Anfang seiner kleinen Expedition wusste Konstantin, dass die Straßenbahn irgendwann (gleichverteilt) in den nächsten 15 Minuten kommen wird. Ist sie nach t Minuten immer noch nicht gekommen, so wird sie innerhalb der nächsten $15-t$ Minuten kommen, wobei jedes gleich lange Zeitintervall gleich wahrscheinlich ist. Für die verbleibende Strecke würde er im Gehen $15 - t$ Minuten brauchen; da er beim Rennen jedoch doppelt so schnell ist, braucht er nur $\frac{15-t}{2}$ Minuten. Falls die Straßenbahn demnach in den ersten $\frac{15-t}{2}$ Minuten nach Beginn des Endspurtes kommt, wird er sie nicht bekommen; kommt sie in der zweiten Hälfte der $15 - t$ Minuten an, so erreicht Konstantin sie. Da die Zeitintervalle für den Erfolg und den Fehlschlag von Konstantins Plan gleich lang sind, erreicht er die Straßenbahn, unter der Voraussetzung, dass er einmal mit Rennen angefangen hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Falls er die Straßenbahn wegfahren sieht, so hat er im Durchschnitt von seinen maximal $\frac{15-t}{2}$ Minuten des Rennens die Hälfte hinter sich, er verliert durch sein Rennen also im Durchschnitt

$$\frac{15-t}{2\cdot 2}\cdot 2\,\mathrm{min} = \frac{15-t}{2}\,\mathrm{min}$$

von seinem Zeitkonto. Im anderen Fall mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erreicht er die Straßenbahn und bekommt dadurch 15 Minuten gutgeschrieben. Da er jedoch die vollen $\frac{15-t}{2}$ Minuten rennt, werden davon wieder $15 - t$ Minuten abgezogen. In diesem Fall gewinnt er also im Durchschnitt

$$(15-(15-t))\ \mathrm{min} = t\,\mathrm{min}\,.$$

Bisher haben wir unter der Voraussetzung gearbeitet, dass die Straßenbahn nicht in den ersten t Minuten abfährt. Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{15-t}{15}$. Falls die Straßenbahn bereits in den ersten t Minuten abfährt, ändert sich der Kontostand nicht. Somit hat er durch seinen Plan durchschnittlich

$$\frac{15-t}{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot\frac{15-t}{2}\right) = \frac{1}{20}\,(15-t)\,(t-5)$$

Minuten auf seinem Zeitkonto gewonnen. Die Veränderung des Kontostands entspricht aber genau der Zeit, die er zusätzlich mit Annabell zur Verfügung hat im Vergleich dazu, dass er sich keine Gedanken über einen Sprint macht und immer nur gehend zur Haltestelle gelangt.

Der rechte Term der letzten Formel beschreibt eine Parabel mit den Nullstellen 15 und 5. Aufgrund der Symmetrie wird das Maximum einer Parabel in der Mitte der Nullstellen, also bei $t = 10$ angenommen. Demnach sollte Konstantin nach 10 Minuten des Gehens anfangen zu rennen, falls bis dahin die Straßenbahn noch nicht abgefahren ist. Dadurch macht er im Durchschnitt 1,25 Minuten gut.