Beispiellösungen zu Blatt 115 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

Um einen besseren Überblick über die Abfahrtszeiten der Straßenbahnen zu bekommen, wünscht sich Annabell eine Uhr als Belohnung für ihr gutes Zeugnis. Weil Annabells Noten leider doch nicht die besten waren, bekommt sie von ihren Eltern nur einen Teil ihres Traums, eine perfekt rotationssymmetrische Uhr mit Minuten- und Stundenzeiger. Das Ziffernblatt gibt es erst zum nächsten Zeugnis. Sie kann also nicht erkennen, wo auf ihrer Uhr oben ist. Am Anfang der Ferien besucht sie ihren Cousin Richard, der nichts für sein Zeugnis bekommen hat. Natürlich verpasst sie dabei ihre Straßenbahn. In einem ausgedehnten Gespräch kommt den beiden jedoch eine Idee, wie Annabell die aktuelle Zeit an ihrer Uhr ablesen kann, wenn sie nur häufig genug auf ihre Uhr schaut. Etwas später am Abend erinnert sich Richard an eine Uhr, die sein Vater von einem leicht verrückten Jugendfreund zur Hochzeit geschenkt bekommen hat. Der einzige Unterschied zu Annabells Uhr ist, dass sich (allein) der Stundenzeiger bei dieser Uhr entgegen dem Uhrzeigersinn bewegt; wieder lässt sich nicht entscheiden, wo an der Uhr oben ist.

Wie genau lässt sich die aktuelle Uhrzeit bestimmen, wenn beide Uhren zur Verfügung stehen? Und unter welchen Bedingungen und wie kann Annabell ohne Hilfe von Richards Uhr die Zeit bestimmen? Dabei darf sie sich keine Stelle auf oder an den Uhren markieren oder sich die Rotation der Uhr zwischen zwei Zeitmessungen merken.

Lösung:

Zunächst betrachten wir den Fall, in dem beide Uhren zur Verfügung stehen. Beide Minutenzeiger laufen mit der gleichen Geschwindigkeit. Hätten die beiden Uhren ein Ziffernblatt, dann würden sich die beiden Minutenzeiger auch immer auf der gleichen Position auf dem Ziffernblatt befinden. Bringen die beiden Freunde nun also gedanklich durch Rotation der Uhren die beiden Minutenzeiger zur Deckung, so ist bei beiden Uhren an der gleichen Stelle oben, da sich die 12 an der gleichen Stelle befinden würde. Nun gilt es, herauszufinden, wo „oben“ ist. Um 12 Uhr sind die Stundenzeiger an der gleichen Stelle und bewegen sich ab diesem Zeitpunkt mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Das heißt, dass sich die 12 immer in ihrer Mitte befinden muss. Ärgerlicherweise ist auf einem Kreis die Mitte von zwei Punkten nicht eindeutig definiert, beide Schnittpunkte des Kreises mit dem Durchmesser, der senkrecht auf der Verbindung der beiden Zeigerspitzen steht, kommen in Frage. Haben wir einmal die Position der „12“ bestimmt, so können wir mithilfe von Annabells Uhr die Stunde und die Minute ablesen. Zunächst scheint es so, als ob wir mit dieser Methode

zwei mögliche Ergebnisse erhalten würden. Bei genauerer Überlegung stellen wir jedoch fest, dass wir eine Information doppelt erhalten: Einerseits gibt uns der Minutenzeiger Auskunft darüber, wie viele Minuten seit der vollen Stunde verstrichen sind, andererseits können wir auch aus der Position des Stundenzeigers zwischen den beiden Stunden ungefähr ablesen, wie viel Zeit seit der letzten vollen Stunde verstrichen ist. Nur wenn diese beiden Informationen übereinstimmen, handelt es sich tatsächlich um eine mögliche Uhrzeit.
Alternativer Lösungsansatz: Das Problem lässt sich auch als eine Anwendung eines stetigen Äquivalents des chinesischen Restsatzes ansehen. Der chinesische Restsatz besagt, dass sich aus den eindeutigen Resten einer Zahl m bezüglich Division durch p und q eindeutig der Rest bezüglich Division durch das kleinste gemeinsame Vielfache von p und q angeben lässt. Wenn wir Annabells Uhr immer so halten, dass der Stundenzeiger nach oben zeigt, dann bewegt sich der Minutenzeiger mit einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{min/h} - 5\,\mathrm{min/h}$. Für eine volle Umdrehung von 60 Minuten benötigt der Zeiger also eine Zeit von $\frac{60 \cdot 60}{55}\,\mathrm{min} = \frac{720}{11}\,\mathrm{min}$. Wir erhalten so etwas wie die aktuelle Uhrzeit modulo $\frac{720}{11}$ Minuten. Analog erhält man aus der anderen Uhr die aktuelle Uhrzeit modulo $\frac{720}{13}$ Minuten. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist in diesem Fall 720 Minuten, was der vollen Zeit von 12 Stunden entspricht. Der chinesische Restsatz sagt uns dementsprechend, dass wir (durch Ausprobieren) eine eindeutige Uhrzeit (modulo 12 Stunden) aus den gegebenen Informationen konstruieren können.
Wenn nun nur Annabells Uhr vorhanden ist, dann kann mit obiger Überlegung der Rest der seit um 12 verstrichenen Minuten bezüglich Division durch 65 bestimmt werden, da sich alle 65 Minuten die beiden Zeiger überlappen. Wenn Annabell nun einmal auf eine echte Uhr schaut und sie diese mit ihrer Uhr abgleicht, kann sie in den nächsten 65 Minuten die Uhrzeit von ihrer Uhr ablesen. Wenn sie sich sicher ist, dass sie mindestens alle 65 Minuten einmal auf die Uhr schaut, dann kann sie die vergangene Zeit zwischen zwei Blicken auf die Uhr jeweils bestimmen, und so auch die absolute Uhrzeit. Dies ist also so, als ob sie eine Uhr nur mit einem Minutenzeiger hätte, der für eine Umdrehung aber 65 Minuten benötigt. Für einen Weg zur Straßenbahn sollte das aber reichen, oder, Annabell?

Aufgabe 2

Der Maulwurf Tom lebt immer noch in New York. Nun ist er zum Geburtstag seines besten Freundes eingeladen. Um nicht dreckig dort anzukommen, gräbt er diesmal nicht, sondern nimmt sich ein Taxi, um von der Kreuzung $(0, 0)$, an der er lebt, zur Kreuzung $(60, 64)$, an der die Feier stattfindet, zu kommen. Zur besseren Unterscheidung sind die Straßenblöcke auf einem Stadtplan schwarz und weiß in einem Schachbrettmuster markiert, wobei der Block mit den Ecken $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ und $(0, 1)$ schwarz ist.
Leider hat Tom einen abergläubischen Taxifahrer erwischt, der sich weigert, jemals so zu fahren, dass sich zu seiner Linken ein schwarzer Block befindet. Er würde also niemals von $(0, 1)$ zu $(0, 0)$ fahren, wohl aber andersherum.

Trotzdem möchte Tom natürlich auf einem möglichst kurzen Weg zur Feier kommen. Wie viele mögliche Wege gibt es dazu?

Lösung:
Offenbar muss der Taxifahrer immer abwechselnd eine Straße in y-Richtung und eine in x-Richtung befahren. Da er insgesamt mindestens 64 Straßen in y-Richtung befahren muss, muss er insgesamt also mindestens 128 Straßen befahren (nach der 127. Straße ist er an einem Punkt mit ungerader x-Koordinate).
Um nun diesen kürzesten Weg auch tatsächlich zu schaffen, muss der Taxifahrer in jedem der 64 Schritte in y-Richtung auch „nach oben" fahren, also so, dass sich die y-Koordinate erhöht. Von den 64 Schritten in x-Richtung seien nun r Schritte nach rechts und $l = 64 - r$ nach links. Dann ist die x-Koordinate nach den 128 Schritten genau $r - l = r - (64 - r) = 2r - 64$. Soll diese gleich 60 sein, muss also $r = 62$ und $l = 2$ gelten.
Von den 64 Schritten in x-Richtung kann sich der Taxifahrer also 2 Schritte beliebig aussuchen, an denen er nach links statt nach rechts fährt. Dafür hat er $\binom{64}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 2016$ Möglichkeiten. Da alle anderen Schritte dadurch eindeutig bestimmt sind, entspricht dies auch der Anzahl der kürzesten Wege.

Aufgabe 3

Der große Zahlen-Zauberer Zacharias begeistert seine Zuschauer mit folgendem Trick:
Er beginnt mit einer n-stelligen Zahl N und schreibt sie ohne ihre erste Ziffer auf eine große Tafel. Darunter schreibt er wieder die Zahl N, diesmal ohne ihre zweite Ziffer. Dies führt er so lange fort, bis auf der Tafel genau n jeweils $(n-1)$-stellige Zahlen stehen. Nun lässt er seinen Zauberstab über der Tafel kreisen und rechnet dabei die Summe der n Zahlen aus.
Ein Raunen geht durch das Publikum: Die Summe ist wieder genau die Zahl N.

Finde die kleinst- und die größtmögliche Zahl N, mit der dieser Trick funktioniert.

Lösung:

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen:
Eine der n Zahlen, die auf der Tafel stehen, besteht genau aus den $n - 1$ letzten Ziffern von N. Die Summe der restlichen $n - 1$ Zahlen auf der Tafel muss also aus der ersten Ziffer von N, diese nennen wir a, gefolgt von $n - 1$ Nullen bestehen, also gleich $a \cdot 10^{n-1}$ sein.
Jede der $n-1$ Zahlen beginnt aber selbst mit der Ziffer a, ist also mindestens gleich $a \cdot 10^{n-2}$. Es muss also die Ungleichung $(n - 1) \cdot a \cdot 10^{n-2} \leq a \cdot 10^{n-1}$ gelten, also $n \leq 11$.
Die größtmögliche Zahl kann also höchstens 11 Stellen haben. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn diese $n - 1$ Zahlen alle gleich $a \cdot 10^9$ sind, wenn also N gleich $a \cdot 10^{10}$ ist. Hier kann a jeden der Werte $1, 2, \ldots, 9$ annehmen. Die größtmögliche Zahl ist also $9 \cdot 10^{10} = 90000000000$.

Umgekehrt ist jede der $n-1$ Zahlen kleiner als $(a+1)\cdot 10^{n-2}$. Es muss also die Ungleichung $(n-1)\cdot(a+1)\cdot 10^{n-2} > a\cdot 10^{n-1}$ gelten. Daraus folgt $n-1 > \frac{10a}{a+1} = 10 - \frac{10}{a+1} \geq 10 - \frac{10}{2} = 5$, also $n > 6$.
Die kleinstmögliche Zahl muss also mindestens 7 Stellen haben. Es bleibt nun herauszufinden, ob es tatsächlich solche siebenstelligen Zahlen gibt und welches die kleinste solche ist.
Dazu bezeichnen wir die Ziffern einer solchen Zahl N mit a, b, c, d, e, f und g, wobei a wie oben die führende Ziffer ist. Es ist also $N = 10^6\cdot a + 10^5\cdot b + 10^4\cdot c + 10^3\cdot d + 10^2\cdot e + 10\cdot f + g$.
Die 7 Zahlen auf der Tafel lassen sich nun in derselben Weise schreiben und wir können die Bedingung in eine einzige Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} N &= 10^6\cdot a + 10^5\cdot b + 10^4\cdot c + 10^3\cdot d + 10^2\cdot e + 10\cdot f + g \\ &= 6\cdot 10^5\cdot a + (10^5 + 5\cdot 10^4)\cdot b + (2\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3)\cdot c \\ &\quad + (3\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2)\cdot d + (4\cdot 10^2 + 2\cdot 10)e + (5\cdot 10 + 1)\cdot f + 6\cdot g \end{aligned}$$

Wir vereinfachen noch die einzelnen Terme und erhalten

$$400000a = 50000b + 14000c + 2300d + 320e + 41f + 5g \tag{1}$$

Es gibt nun zwei verschiedene Ansätze, die Gleichung (1) zu lösen:

1. Lösung („von vorne"): Die linke Seite ist ein Vielfaches von 400000. Die rechte Seite ist eine positive ganze Zahl, höchstens

$$50000\cdot 9 + 14000\cdot 9 + 2300\cdot 9 + 320\cdot 9 + 41\cdot 9 + 5\cdot 9 = 66666\cdot 9 = 599994 < 2\cdot 400000.$$

Also muss $a = 1$ gelten. Umgeformt nach b vereinfacht sich (1) damit zu

$$b = 8 - \frac{14000c + 2300d + 320e + 41f + 5g}{50000} \geq 8 - \frac{16666\cdot 9}{50000} > 5$$

Es muss also $b \geq 6$ gelten. Wäre $b = 6$, so würde durch Auflösen nach c folgen:

$$c = \frac{100000 - 2300d - 320e - 41f - 5g}{14000} \in \left[\frac{100000 - 2666\cdot 9}{14000}, \frac{100000}{14000}\right],$$

also $c = 6$ oder $c = 7$. Wäre $c = 6$, so würde

$$d = \frac{16000 - 320e - 41f - 5g}{2300} \in \left[\frac{16000 - 366\cdot 9}{2300}, \frac{16000}{2300}\right],$$

also $d = 6$ folgen. Dann folgt aber $e = \frac{2200 - 41f - 5g}{320}$. Insbesondere muss der Zähler und damit auch f durch 5 teilbar sein. Also folgt $41f + 5g \in [0, 41\cdot 5 + 5\cdot 9] = [0, 250]$ und damit $e \in \left[\frac{2200-250}{320}, \frac{2200}{320}\right]$, allerdings liegt in diesem Intervall keine ganze Zahl. Wäre $c = 7$, so würde $2000 = 2300d + 320e + 41f + 5g \geq 2300d$ folgen, also $d = 0$ und damit $2000 = 320e + 41f + 5g$, also $e = \frac{2000-41f-5g}{320} \in \left[\frac{2000}{320}, \frac{2000-250}{320}\right]$, also $e = 6$. Dann ergibt sich aber $80 = 41f + 5g$, was offensichtlich keine Lösung der gesuchten Form besitzt.

Damit ist gezeigt, dass es keine Lösung von (1) mit $b = 6$ geben kann, es muss $b \geq 7$ gelten.
Mit $b = 7$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$c = \frac{50000 - 2300d - 320e - 41f - 5g}{14000} \geq \frac{50000 - 2666 \cdot 9}{14000} > 1.$$

Da wir an der kleinstmöglichen Lösung interessiert sind, können wir $c = 2$ annehmen. Dann ergibt sich

$$d = \frac{22000 - 320e - 41f - 5g}{2300} \geq \frac{22000 - 366 \cdot 9}{2300} > 8,$$

also $d = 9$ und damit

$$e = \frac{1300 - 41f - 5g}{320} \geq \frac{1300 - 250}{320} > 3,$$

also $e \geq 4$. Für $e = 4$ ergibt sich $20 = 41f + 5g$, also $f = 0, g = 4$.
Die kleinstmögliche Zahl ist also tatsächlich siebenstellig und lautet $N = 1729404$.

2. Lösung („von hinten"):
Wir wollen ausgehend von der letzten Ziffer sogar alle siebenstelligen Lösungen von (1) bestimmen (dies wäre mit der 1. Methode deutlich aufwändiger). Für die letzte Ziffer gibt es offensichtlich zunächst 10 Möglichkeiten: $0, 1, 2, \ldots, 9$.
Nun können wir den Rest beider Seiten der Gleichung bei Division durch 10 betrachten und erhalten, dass $f + 5g$ durch 10 teilbar sein muss. Zu jeder der 10 Möglichkeiten für g erhalten wir damit genau eine Möglichkeit für f, nämlich entweder 0 oder 5, je nach Parität von g. Das sieht dann so aus:

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
$\frac{41f+5g}{10}$	0	21	1	22	2	23	3	24	4	25

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 100 und erhalten, dass $20e + 41f + 5g$ durch 100 teilbar sein muss. Ist $41f + 5g$ nicht durch 20 teilbar, gibt es also keine Lösung, im anderen Fall gibt es jeweils genau zwei Lösungen für e:

g	0	0	3	3	4	4	7	7	8	8
f	0	0	5	5	0	0	5	5	0	0
e	0	5	4	9	4	9	3	8	3	8
$\frac{320e+41f+5g}{100}$	0	16	15	31	13	29	12	28	10	26

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 1000 und erhalten, dass $300d + 320e + 41f + 5g$ durch 1000 teilbar sein muss. Zu jeder der 10 Möglichkeiten für e, f und g erhalten wir damit genau eine Möglichkeit für d:

g	0	0	3	3	4	4	7	7	8	8
f	0	0	5	5	0	0	5	5	0	0
e	0	5	4	9	4	9	3	8	3	8
d	0	8	5	3	9	7	6	4	0	8
$\frac{2300d+320e+41f+5g}{1000}$	0	20	13	10	22	19	15	12	1	21

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 10000 und erhalten, dass $4000c+2300d+320e+41f+5g$ durch 10000 teilbar sein muss. Ist $2300d+320e+41f+5g$ nicht durch 2000 teilbar, gibt es also keine Lösung, im anderen Fall jeweils genau zwei Lösungen für c:

g	0	0	0	0	3	3	4	4	7	7
f	0	0	0	0	5	5	0	0	5	5
e	0	0	5	5	9	9	4	4	8	8
d	0	0	8	8	3	3	9	9	4	4
c	0	5	0	5	0	5	2	7	2	7
$\frac{14000c+2300d+320e+41f+5g}{10000}$	0	7	2	9	1	8	5	12	4	11

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 100000 und erhalten, dass $50000b+14000c+2300d+320e+41f+5g$ durch 100000 teilbar sein muss. Insbesondere muss $14000c+2300d+320e+41f+5g$ durch 50000 teilbar sein. Dies ist nur in zwei der Spalten der Fall. Hier gibt es jeweils 5 Möglichkeiten für b:

g	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
d	0	0	0	0	0	9	9	9	9	9
c	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2
b	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
$\frac{50000b+14000c+2300d+320e+41f+5g}{100000}$	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5

Der Wert in der letzten Zeile muss nun aber gleich $4a$ sein, insbesondere also ein Vielfaches von 4 (aber ungleich 0). Dies ist nur in zwei Spalten der Fall und ergibt die Lösungen $N = 1800000$ sowie $N = 1729404$.
Mit derselben effizienten Methode findet man dann auch heraus, dass es neben den 2 siebenstelligen und den 9 elfstelligen Zahlen noch genau 9 achtstellige und 21 zehnstellige, interessanterweise jedoch keine neunstelligen Lösungen gibt. Insgesamt kann Zacharias seinen Trick also mit 41 verschiedenen Zahlen vorführen.

Aufgabe 4

Wir mischen einen Stapel mit 2^n Karten wie folgt:
Wir halbieren den Stapel und mischen die Karten aus den beiden Stapeln abwechselnd zusammen, wobei die unterste Karte unten und die oberste Karte

oben bleibt. Zeige, dass die Karten nach n solchen Mischungen wieder in der gleichen Reihenfolge liegen wie zu Beginn.

Lösung:

Wir untersuchen, wie sich die Positionen der Karten durch das Mischen verändern. Die oberste Karte bleibt oben. Die nächste Karte rückt zunächst einen Platz nach unten, dann 2 weitere, dann 4 weitere und so weiter.
Nummerieren wir die Positionen also von oben beginnend mit $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ durch und nennen $f(n)$ die Position der Karte an Position n nach einem Mischen, so gilt $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 4, f(4) = 8, \ldots$
Natürlich gilt auch $f(3) = 6$. Allgemein sieht man, dass für alle $k < 2^{n-1}$, also für alle Karten aus dem oberen Stapel, stets $f(k) = 2k$ gilt. Für die Karten aus dem unteren Stapel, also für $k \geq 2^{n-1}$, gilt $f(k) = 2^n - 1 - 2(2^n - 1 - k) = 2k - (2^n - 1)$.
Betrachten wir die Positionen der Karten also modulo $2^n - 1$, so gilt stets $f(k) \equiv 2k \mod (2^n - 1)$. Werden die Karten n-mal gemischt, so wird f genau n-mal angewendet, dadurch wird k auf $2^n \cdot k \equiv k + (2^n - 1) \cdot k \equiv k \mod (2^n - 1)$, also auf sich selbst, abgebildet. Bis auf die oberste und unterste Position entspricht aber jedem Rest modulo $(2^n - 1)$ eine eindeutige Position im Kartenstapel (dem Rest 0 werden zwei Positionen zugeordnet).
Da die erste und die letzte Karte aber stets an ihrem Platz bleiben, folgern wir, dass nach n Mischungen tatsächlich alle Karten an derselben Position liegen wie zu Beginn.
Übrigens gibt es auch keinen früheren Zeitpunkt, an dem dies der Fall ist, da die Positionen der zweiten Karte, also $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$, alle paarweise verschieden sind.