Beispiellösungen zu Blatt 115 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Anton spielt mit seinem Großvater oft Karten. Das Spielblatt besteht dabei wie üblich aus 32 Karten. Anfangs mischt Anton den Kartenstapel, indem er jedes Mal die 4 oberen Karten nimmt und sie oben auf einen neuen Stapel legt. Ist der alte Stapel leer, fängt er mit dem neuen Stapel wieder von vorne an. Nachdem er dies einige Male gemacht hat, stellt er fest, dass die Karten wieder in der gleichen Reihenfolge liegen wie zu Beginn. Wie oft muss Anton mindestens gemischt haben?
Um mit einem möglichst gut gemischten Blatt zu spielen, schlägt sein Großvater vor, abwechselnd 3 und 5 Karten zu nehmen. Warum werden die Karten damit besser gemischt und wie viele Schritte dauert es nun, bis die Karten wieder wie zu Beginn angeordnet sind?

Lösung:

Wir unterteilen den Stapel in 8 Blöcke aus 4 Karten, diese bleiben bei der ersten Mischmethode stets erhalten. Nachdem Anton 8 Mal gemischt hat, liegen also dieselben Viererblöcke auf dem Stapel, aber genau in umgekehrter Reihenfolge. Mischt er nun weitere 8 Mal, so dreht sich die Reihenfolge wieder um und die Karten liegen wieder wie zu Beginn. Anton muss also mindestens 16 Mal gemischt haben. (Wenn man betrachtet, wie oft der gesamte Stapel durchgemischt wurde, zählt man zwei Durchmischungen.)

Bei der zweiten Mischmethode bleiben die Viererblöcke nun nicht mehr erhalten, aber noch die 4 Achterblöcke. Deren Reihenfolge dreht sich wie oben nach 8 Mischungen um und ist nach 16 Mischungen wieder wie zu Beginn.
Nun müssen wir noch untersuchen, wie sich die Reihenfolge der Karten innerhalb eines Achterblocks verändert:
Nummerieren wie die Karten eines Blocks mit $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, so liegen die Karten nach einer Mischung dieses Blocks (nachdem Anton also einmal 3 und einmal 5 Karten von ihm genommen hat) in der Reihenfolge $(4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3)$. Identifizieren wie die 9. mit der 1. Position, die 10. mit der 2. usw., so verschiebt eine solche Mischung also einfach alle Karten um 5 Positionen. Da 5 teilerfremd zu 8 ist, ergibt sich erst nach 8 solchen Mischungen wieder die ursprüngliche Reihenfolge, also nach 16 einzelnen Mischungen dieses Blocks und somit insgesamt 64 Mischungen. (Beziehungsweise 8 Stapel-Durchmischungen.) Da dies ein Vielfaches von 16 ist, ist nach obiger Überlegung auch die Reihenfolge der Blöcke danach wieder wie zu Beginn.
Antons Großvater hat also erkannt, dass eine kleine Veränderung der Mischmethode zu einer deutlichen Erhöhung der „Mischperiode“ und auch zu einem deutlich chaotischeren (und somit besser gemischten) Ergebnis in den Zwischenschritten führen kann.

Aufgabe 2

Mit Zahlenkarten hat der zahlenvernarrte Adalbert seine zwei vierstelligen teilerfremden Lieblingszahlen an einem Regal befestigt. Dummerweise kommt Chlodwig in Adalberts Abwesenheit an das Regal und vier der Zahlenkarten fallen zu Boden. Dies sind die Karten mit den Ziffern $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ und $\boxed{5}$, während auf Adalberts Regal mit den verbliebenen Zahlenkarten noch die Anordnungen $\boxed{3}\boxed{}\boxed{}\boxed{0}$ und $\boxed{6}\boxed{9}\boxed{}\boxed{}$ zu erkennen sind. Was sind seine Lieblingszahlen?

Lösung:

Wir versuchen, Adalberts Lieblingszahlen Schritt für Schritt zu rekonstruieren. Weil die letzte Stelle der einen Zahl eine 0 ist, ist diese Zahl durch 10, also sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar. Aufgrund der Teilerfremdheit darf Adalberts andere Lieblingszahl also durch keine dieser beiden Zahlen teilbar sein. Dies ist äquivalent dazu, dass die letzte Ziffer der anderen Lieblingszahl weder durch 5 noch durch 2 teilbar sein darf. Da von den am Boden liegenden Zahlen 2 und 4 gerade sind und 5 durch 5 teilbar ist, ist die letzte mögliche Ziffer eine 1.

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Falls also die dritte Ziffer von $69X1$ bei Division durch 3 einen Rest von 2 lässt, dann ist die Zahl durch 3 teilbar, weil $6+9+2+1 = 18 = 3\cdot 6$ ist. Aber auch die andere Zahl wäre durch 3 teilbar, weil $3+4+5+0 = 12 = 3\cdot 4$ ist. Dabei ist es egal, ob wir 5 oder 2 schreiben, weil beide den gleichen Rest bei Division durch 3 lassen. Somit muss die eine Lieblingszahl 6941 lauten. Nun müssen wir uns für die andere Zahl nur noch zwischen 3250 und 3520 entscheiden. Durch Ausprobieren erhalten wir, dass sowohl 3520 als auch 6941 durch 11 teilbar sind. Dementsprechend wissen wir, dass Adalbert die (tatsächlich teilerfremden) Lieblingszahlen $3250 = 2\cdot 5^3\cdot 13$ und $6941 = 11\cdot 631$ hat. Schöne Zahlen, oder?

Aufgabe 3

Um einen besseren Überblick über die Abfahrtszeiten der Straßenbahnen zu bekommen, wünscht sich Annabell eine Uhr als Belohnung für ihr gutes Zeugnis. Weil Annabells Noten leider doch nicht die besten waren, bekommt sie von ihren Eltern nur einen Teil ihres Traums, eine perfekt rotationssymmetrische Uhr mit Minuten- und Stundenzeiger. Das Ziffernblatt gibt es erst zum nächsten Zeugnis. Sie kann also nicht erkennen, wo auf ihrer Uhr oben ist. Am Anfang der Ferien besucht sie ihren Cousin Richard, der nichts für sein Zeugnis bekommen hat. Natürlich verpasst sie dabei ihre Straßenbahn. In einem ausgedehnten Gespräch kommt den beiden jedoch eine Idee, wie Annabell die aktuelle Zeit an ihrer Uhr ablesen kann, wenn sie nur häufig genug auf ihre Uhr schaut. Etwas später am Abend erinnert sich Richard an eine Uhr, die sein Vater von einem leicht verrückten Jugendfreund zur Hochzeit geschenkt bekommen hat. Der einzige Unterschied zu Annabells Uhr ist, dass sich (allein) der Stundenzeiger bei dieser Uhr entgegen dem Uhrzeigersinn bewegt; wieder lässt sich nicht entscheiden, wo an der Uhr oben ist.

Wie genau lässt sich die aktuelle Uhrzeit bestimmen, wenn beide Uhren zur Verfügung stehen? Dabei dürfen sie sich keine Stelle auf oder an den Uhren markieren oder sich die Rotation der Uhren zwischen zwei Zeitmessungen merken.

Lösung:

Versuchen wir einmal, uns in die Welt der Uhren hineinzudenken. Beide Minutenzeiger laufen mit der gleichen Geschwindigkeit. Hätten die beiden Uhren ein Ziffernblatt, dann würden sich die beiden Minutenzeiger auch immer auf der gleichen Position auf dem Ziffernblatt befinden. Bringen die beiden Freunde nun also gedanklich durch Rotation der Uhren die beiden Minutenzeiger zur Deckung, so ist bei beiden Uhren an der gleichen Stelle oben, da sich die 12 an der gleichen Stelle befinden würde. Nun gilt es, herauszufinden, wo „oben“ ist. Um 12 Uhr sind die Stundenzeiger an der gleichen Stelle und bewegen sich ab diesem Zeitpunkt mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Das heißt, dass sich die 12 immer in ihrer Mitte befinden muss. Ärgerlicherweise ist auf einem Kreis die Mitte von zwei Punkten nicht eindeutig definiert, beide Schnittpunkte des Kreises mit dem Durchmesser, der senkrecht auf der Verbindung der beiden Zeigerspitzen steht, kommen in Frage. Haben wir einmal die Position der „12“ bestimmt, so können wir mithilfe von Annabells Uhr die Stunde und die Minute ablesen. Zunächst scheint es so, als ob wir mit dieser Methode zwei mögliche Ergebnisse erhalten würden. Bei genauerer Überlegung stellen wir jedoch fest, dass wir eine Information doppelt erhalten: Einerseits gibt uns der Minutenzeiger Auskunft darüber, wie viele Minuten seit der vollen Stunde verstrichen sind, andererseits können wir auch aus der Position des Stundenzeigers zwischen den beiden Stunden ungefähr ablesen, wie viel Zeit seit der letzten vollen Stunde verstrichen ist. Nur wenn diese beiden Informationen übereinstimmen, handelt es sich tatsächlich um eine mögliche Uhrzeit. Für den Stundenzeiger beschreibt eine Drehung um 180° einen Unterschied von sechs Stunden, die Anzahl der verstrichenen Minuten seit einer vollen Stunde bleibt also konstant. Für den Minutenzeiger bedeutet diese Drehung jedoch einen Unterschied von 30 Minuten. Dementsprechend kann nur einer der beiden gegenüberliegenden Punkte für die Position der 12 in Betracht kommen und Annabell und Richard können auf diese Weise die Uhrzeit ablesen.

Aufgabe 4

Der große Zahlen-Zauberer Zacharias begeistert seine Zuschauer mit folgendem Trick:
Er beginnt mit einer n-stelligen Zahl N und schreibt sie ohne ihre erste Ziffer auf eine große Tafel. Darunter schreibt er wieder die Zahl N, diesmal ohne ihre zweite Ziffer. Dies führt er so lange fort, bis auf der Tafel genau n jeweils $(n-1)$-stellige Zahlen stehen. Nun lässt er seinen Zauberstab über der Tafel kreisen und rechnet dabei die Summe der n Zahlen aus.
Ein Raunen geht durch das Publikum: Die Summe ist wieder genau die Zahl N.

Finde die kleinst- und die größtmögliche Zahl N, mit der dieser Trick funktioniert.

Lösung:

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen:
Eine der n Zahlen, die auf der Tafel stehen, besteht genau aus den $n-1$ letzten Ziffern von N. Die Summe der restlichen $n-1$ Zahlen auf der Tafel muss also aus der ersten Ziffer von N, diese nennen wir a, gefolgt von $n-1$ Nullen bestehen, also gleich $a \cdot 10^{n-1}$ sein.
Jede der $n-1$ Zahlen beginnt aber selbst mit der Ziffer a, ist also mindestens gleich $a \cdot 10^{n-2}$. Es muss also die Ungleichung $(n-1) \cdot a \cdot 10^{n-2} \leq a \cdot 10^{n-1}$ gelten, also $n \leq 11$.
Die größtmögliche Zahl kann also höchstens 11 Stellen haben. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn diese $n-1$ Zahlen alle gleich $a \cdot 10^9$ sind, wenn also N gleich $a \cdot 10^{10}$ ist. Hier kann a jeden der Werte $1, 2, \ldots, 9$ annehmen. Die größtmögliche Zahl ist also $9 \cdot 10^{10} = 90000000000$.

Umgekehrt ist jede der $n-1$ Zahlen kleiner als $(a+1) \cdot 10^{n-2}$. Es muss also die Ungleichung $(n-1) \cdot (a+1) \cdot 10^{n-2} > a \cdot 10^{n-1}$ gelten. Daraus folgt $n-1 > \frac{10a}{a+1} = 10 - \frac{10}{a+1} \geq 10 - \frac{10}{2} = 5$, also $n > 6$.
Die kleinstmögliche Zahl muss also mindestens 7 Stellen haben. Es bleibt nun herauszufinden, ob es tatsächlich solche siebenstelligen Zahlen gibt und welches die kleinste solche ist.
Dazu bezeichnen wir die Ziffern einer solchen Zahl N mit a, b, c, d, e, f und g, wobei a wie oben die führende Ziffer ist. Es ist also $N = 10^6 \cdot a + 10^5 \cdot b + 10^4 \cdot c + 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot e + 10 \cdot f + g$.
Die 7 Zahlen auf der Tafel lassen sich nun in derselben Weise schreiben und wir können die Bedingung in eine einzige Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} N &= 10^6 \cdot a + 10^5 \cdot b + 10^4 \cdot c + 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot e + 10 \cdot f + g \\ &= 6 \cdot 10^5 \cdot a + (10^5 + 5 \cdot 10^4) \cdot b + (2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3) \cdot c \\ &\quad + (3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2) \cdot d + (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10)e + (5 \cdot 10 + 1) \cdot f + 6 \cdot g \end{aligned}$$

Wir vereinfachen noch die einzelnen Terme und erhalten

$$400000a = 50000b + 14000c + 2300d + 320e + 41f + 5g \tag{1}$$

Es gibt nun zwei verschiedene Ansätze, die Gleichung (1) zu lösen:

1. Lösung („von vorne“): Die linke Seite ist ein Vielfaches von 400000. Die rechte Seite ist eine positive ganze Zahl, höchstens

$$50000 \cdot 9 + 14000 \cdot 9 + 2300 \cdot 9 + 320 \cdot 9 + 41 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 66666 \cdot 9 = 599994 < 2 \cdot 400000.$$

Also muss $a = 1$ gelten. Umgeformt nach b vereinfacht sich (1) damit zu

$$b = 8 - \frac{14000c + 2300d + 320e + 41f + 5g}{50000} \geq 8 - \frac{16666 \cdot 9}{50000} > 5$$

Es muss also $b \geq 6$ gelten. Wäre $b = 6$, so würde durch Auflösen nach c folgen:

$$c = \frac{100000 - 2300d - 320e - 41f - 5g}{14000} \in \left[\frac{100000 - 2666 \cdot 9}{14000}, \frac{100000}{14000}\right],$$

also $c = 6$ oder $c = 7$. Wäre $c = 6$, so würde

$$d = \frac{16000 - 320e - 41f - 5g}{2300} \in \left[\frac{16000 - 366 \cdot 9}{2300}, \frac{16000}{2300}\right],$$

also $d = 6$ folgen. Dann folgt aber $e = \frac{2200-41f-5g}{320}$. Insbesondere muss der Zähler und damit auch f durch 5 teilbar sein. Also folgt $41f + 5g \in [0, 41 \cdot 5 + 5 \cdot 9] = [0, 250]$ und damit $e \in \left[\frac{2200-250}{320}, \frac{2200}{320}\right]$, allerdings liegt in diesem Intervall keine ganze Zahl. Wäre $c = 7$, so würde $2000 = 2300d + 320e + 41f + 5g \geq 2300d$ folgen, also $d = 0$ und damit $2000 = 320e + 41f + 5g$, also $e = \frac{2000-41f-5g}{320} \in \left[\frac{2000}{320}, \frac{2000-250}{320}\right]$, also $e = 6$. Dann ergibt sich aber $80 = 41f + 5g$, was offensichtlich keine Lösung der gesuchten Form besitzt. Damit ist gezeigt, dass es keine Lösung von (1) mit $b = 6$ geben kann, es muss $b \geq 7$ gelten.
Mit $b = 7$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$c = \frac{50000 - 2300d - 320e - 41f - 5g}{14000} \geq \frac{50000 - 2666 \cdot 9}{14000} > 1.$$

Da wir an der kleinstmöglichen Lösung interessiert sind, können wir $c = 2$ annehmen. Dann ergibt sich

$$d = \frac{22000 - 320e - 41f - 5g}{2300} \geq \frac{22000 - 366 \cdot 9}{2300} > 8,$$

also $d = 9$ und damit

$$e = \frac{1300 - 41f - 5g}{320} \geq \frac{1300 - 250}{320} > 3,$$

also $e \geq 4$. Für $e = 4$ ergibt sich $20 = 41f + 5g$, also $f = 0, g = 4$.
Die kleinstmögliche Zahl ist also tatsächlich siebenstellig und lautet $N = 1729404$.

2. Lösung („von hinten“):
Wir wollen ausgehend von der letzten Ziffer sogar alle siebenstelligen Lösungen von (1) bestimmen (dies wäre mit der 1. Methode deutlich aufwändiger). Für die letzte Ziffer gibt es offensichtlich zunächst 10 Möglichkeiten: $0, 1, 2, \ldots, 9$.
Nun können wir den Rest beider Seiten der Gleichung bei Division durch 10 betrachten und erhalten, dass $f + 5g$ durch 10 teilbar sein muss. Zu jeder der 10 Möglichkeiten für g erhalten wir damit genau eine Möglichkeit für f, nämlich entweder 0 oder 5, je nach Parität von g. Das sieht dann so aus:

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
$\frac{41f+5g}{10}$	0	21	1	22	2	23	3	24	4	25

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 100 und erhalten, dass $20e + 41f + 5g$ durch 100 teilbar sein muss. Ist $41f + 5g$ nicht durch 20 teilbar, gibt es also keine Lösung, im anderen Fall gibt es jeweils genau zwei Lösungen für e:

g	0	0	3	3	4	4	7	7	8	8
f	0	0	5	5	0	0	5	5	0	0
e	0	5	4	9	4	9	3	8	3	8
$\frac{320e+41f+5g}{100}$	0	16	15	31	13	29	12	28	10	26

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 1000 und erhalten, dass $300d + 320e + 41f + 5g$ durch 1000 teilbar sein muss. Zu jeder der 10 Möglichkeiten für e, f und g erhalten wir damit genau eine Möglichkeit für d:

g	0	0	3	3	4	4	7	7	8	8
f	0	0	5	5	0	0	5	5	0	0
e	0	5	4	9	4	9	3	8	3	8
d	0	8	5	3	9	7	6	4	0	8
$\frac{2300d+320e+41f+5g}{1000}$	0	20	13	10	22	19	15	12	1	21

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 10000 und erhalten, dass $4000c+2300d+320e+41f+5g$ durch 10000 teilbar sein muss. Ist $2300d+320e+41f+5g$ nicht durch 2000 teilbar, gibt es also keine Lösung, im anderen Fall jeweils genau zwei Lösungen für c:

g	0	0	0	0	3	3	4	4	7	7
f	0	0	0	0	5	5	0	0	5	5
e	0	0	5	5	9	9	4	4	8	8
d	0	0	8	8	3	3	9	9	4	4
c	0	5	0	5	0	5	2	7	2	7
$\frac{14000c+2300d+320e+41f+5g}{10000}$	0	7	2	9	1	8	5	12	4	11

Nun betrachten wir den Rest beider Seiten bei Division durch 100000 und erhalten, dass $50000b+14000c+2300d+320e+41f+5g$ durch 100000 teilbar sein muss. Insbesondere muss $14000c + 2300d + 320e + 41f + 5g$ durch 50000 teilbar sein. Dies ist nur in zwei der Spalten der Fall. Hier gibt es jeweils 5 Möglichkeiten für b:

g	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
d	0	0	0	0	0	9	9	9	9	9
c	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2
b	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
$\frac{50000b+14000c+2300d+320e+41f+5g}{100000}$	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5

Der Wert in der letzten Zeile muss nun aber gleich $4a$ sein, insbesondere also ein Vielfaches von 4 (aber ungleich 0). Dies ist nur in zwei Spalten der Fall und ergibt die Lösungen $N = 1800000$ sowie $N = 1729404$.
Mit derselben effizienten Methode findet man dann auch heraus, dass es neben den 2 siebenstelligen und den 9 elfstelligen Zahlen noch genau 9 achtstellige und 21 zehnstellige, interessanterweise jedoch keine neunstelligen Lösungen gibt. Insgesamt kann Zacharias seinen Trick also mit 41 verschiedenen Zahlen vorführen.