Beispiellösungen zu Blatt 116 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

Finde jeweils alle Zahlen x, die die Gleichung

$$a)\quad \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor 2015x\rfloor + \lfloor 2016x\rfloor = 2017 \qquad \text{bzw.}$$
$$b)\quad \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor 2016x\rfloor + \lfloor 2017x\rfloor = 2018$$

erfüllen. Dabei ist $\lfloor x\rfloor$ der *ganzzahlige Anteil* von x, also die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, z. B. $\lfloor 42\rfloor = 42$, $\lfloor \pi\rfloor = 3$, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$.

Lösung:

Um beide Fälle zusammen zu betrachten, wollen wir zunächst allgemein die Funktion
$$f_n(x) = \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor$$
und dazu die Gleichung $f_n(x) = n+1$ für eine gegebene natürliche Zahl n untersuchen. Die erste wichtige Beobachtung ist, dass die Funktion $f_n(x)$ monoton in x wächst, d. h. für $x \geq y$ gilt $f(x) \geq f(y)$. Dies liegt daran, dass $\lfloor x\rfloor$ monoton wächst und die Summe monotoner Funktionen wieder monoton ist.

Weiterhin nimmt f nur ganzzahlige Werte an, besitzt also Sprungstellen und ist in den Bereichen dazwischen konstant. Die Lösungsmenge der Gleichung $f_n(x) = n+1$ wird also ein Intervall sein.

Noch genauer können wir sagen, dass f an der Stelle x genau dann eine Sprungstelle besitzt, wenn eine der Zahlen kx für $1 \leq k \leq n$ eine ganze Zahl ist, wenn also x von der Form $\frac{m}{k}$ für eine ganze Zahl m ist. Dabei muss k nicht eindeutig bestimmt sein, die Anzahl der möglichen Werte für k entspricht der Höhe des Sprungs.

Als Nächstes wollen wir die Größe der Lösung x abschätzen. Aus der Ungleichung $\lfloor x\rfloor \leq x$ (dies folgt direkt aus der Definition) und der Gaußchen Summenformel folgern wir

$$f_n(x) \leq x + 2x + 3x + \ldots + nx = (1+2+\ldots+n)\cdot x = \frac{n(n+1)x}{2}$$

Soll also $f_n(x) = n+1$ gelten, so folgt schon $x \geq \frac{2}{n}$. Andererseits ist stets $\lfloor x\rfloor > x-1$, also folgern wir analog

$$f_n(x) > \frac{n(n+1)x}{2} - n,$$

eine Lösung muss also $x < \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ erfüllen. Dies ist aber für große n etwa $\frac{4}{n}$, also doppelt so groß wie die untere Schranke $\frac{2}{n}$, daher reichen diese Abschätzungen nicht aus, um x exakt zu bestimmen.

Wir weichen daher zunächst auf ein heuristisches Argument aus:
Dazu überlegen wir uns, in welcher Größenordnung wir unsere Lösung x erwarten würden, und untersuchen dann, ob unsere Erwartung korrekt ist.
Das Problem an den Abschätzungen war, dass für jeden der n Summanden eine Differenz von 1 zwischen unterer und oberer Schranke bestand. Für die meisten Werte von x wird aber nicht jedes Mal die untere bzw. die obere Schranke scharf sein.
Es ist vielmehr zu erwarten, dass $\lfloor x \rfloor$ durchschnittlich in der Mitte dieses Intervalls liegt, also etwa von der Größe $x - \frac{1}{2}$ ist. Summieren wir dies wie zuvor auf, erhalten wir eine erwartete Größenordnung von

$$f_n(x) \approx \frac{n(n+1)x}{2} - \frac{n}{2},$$

unsere Lösung sollte also im Bereich $x \approx \frac{2(n+1)+n}{n(n+1)} \approx \frac{3}{n}$ liegen.
In diesem Bereich sind die ersten etwa $\frac{n}{3}$ Summanden in $f_n(x)$ noch 0, die nächsten etwa $\frac{n}{3}$ Summanden sind 1 und die letzten bereits 2.
Um nun die exakten Grenzen zu finden, müssen wir also eine Fallunterscheidung machen, welchen Rest n bei Division durch 3 lässt.

1. Fall: n ist durch 3 teilbar, also $n = 3k$ für ein k. Dann ist $\frac{3}{n} = \frac{1}{k}$. Betrachten wir die einzelnen Summanden in der Definition von $f_n(x)$ für $x = \frac{1}{k}$, so sehen wir, dass für $m = 1, 2, \ldots, k-1$ stets $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor = 0$, für $m = k, k+1, \ldots, 2k-1$ stets $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor = 1$, für $m = 2k, 2k+1, \ldots, 3k-1$ stets $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor = 2$ und schließlich $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = 3$ gilt, also folgt

$$f_n\left(\frac{1}{k}\right) = (k-1) \cdot 0 + k \cdot 1 + k \cdot 2 + 3 = 3k + 3 = n + 2 > n + 1.$$

Mögliche Lösungen für x müssten also $x < \frac{1}{k}$ erfüllen. Andererseits besitzt f_n bei $\frac{1}{k}$ eine Sprungstelle, nach der obigen Untersuchung sogar eine dreifache, da die Funktionen $\lfloor kx \rfloor$, $\lfloor 2kx \rfloor$ und $\lfloor 3kx \rfloor$ hier um 1 größer werden. Umgekehrt bedeutet dies, dass für $x < \frac{1}{k}$ stets $f_n(x) \leq (n+2) - 3 < n+1$ gilt, also gibt es in diesem Fall keine Lösung.
Damit können wir auch schon Aufgabenteil a) beantworten, denn $2016 = 3 \cdot 672$ fällt unter diesen Fall.

2. Fall: n lässt Rest 1 bei Division durch 3, also $n = 3k+1$ für ein k. Dann ist $\frac{3}{n} = \frac{3}{3k+1}$. Betrachten wir jetzt wieder die Definition von $f_n(x)$ für $x = \frac{3}{3k+1}$, so sind die ersten k Summanden gleich 0 (wegen $\frac{3k}{3k+1} < 1$), die nächsten k Summanden sind 1 (wegen $\frac{6k}{3k+1} < 2$), die nächsten k sind 2 (wegen $\frac{9k}{3k+1} < 3$) und der letzte Summand ist $\lfloor \frac{9k+3}{3k+1} \rfloor = 3$. Also folgt

$$f_n(x) = k \cdot 0 + k \cdot 1 + k \cdot 2 + 3 = 3k + 3 = n + 2.$$

Wieder war unsere erwartete Lösung $x = \frac{3}{n}$ also zu groß. Auch in diesem Fall befindet sich bei x eine Sprungstelle, aber diesmal nur eine einfache, denn nur für $m = 3k+1$ ist $3m$ durch $3k+1$ teilbar. Unmittelbar links von $x = \frac{3}{n}$ nimmt f_n also den Wert $n+1$ an, wir haben Lösungen für unsere Gleichung.

Wir müssen nur noch herausfinden, wo die nächstkleinere Sprungstelle liegt. Was ist also die nächstkleinere Zahl der Form $\frac{p}{q}$ für ein $q \leq n$? Insbesondere muss dann $p = q \cdot \frac{p}{q} \leq n \cdot \frac{p}{q} < n \cdot \frac{3}{n} = 3$, also $p \leq 2$ gelten. Wäre $p = 1$, so folgt $q > \frac{n}{3} > k$, also wäre $\frac{p}{q} = \frac{1}{k+1}$ die größtmögliche Zahl. Mit $p = 2$ folgt $q > \frac{2n}{3} > 2k$, also wäre $\frac{p}{q} = \frac{2}{2k+1}$ die größtmögliche Zahl. Man sieht aber leicht, dass $\frac{2}{2k+1} > \frac{1}{k+1}$ gilt und somit die nächste Sprungstelle von f bei $x = \frac{2}{2k+1}$ liegt.
Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Lösungsmenge der Gleichung $f_n(x) = n + 1$ im Fall $n = 3k + 1$ gerade das Intervall $x \in \left[\frac{2}{2k+1}, \frac{3}{3k+1}\right)$ ist. Dabei bedeutet $[a,b)$, dass die Zahl a im Intervall enthalten ist, die Zahl b jedoch nicht (dies entspricht ja auch genau unseren Beobachtungen, dass f_n an den Sprungstellen immer schon den jeweils größeren Wert annimmt).
Im Fall $n = 2017 = 3 \cdot 672 + 1$ ergibt dies die Lösungsmenge $x \in \left[\frac{2}{1345}, \frac{3}{2017}\right) = \left[\frac{6}{4035}, \frac{6}{4034}\right)$.
Damit sind beide Aufgabenteile gelöst. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch erwähnen, dass der Fall $n = 3k + 2$ genauso behandelt werden kann und sich dort die Lösungsmenge $x \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{3}{3k+2}\right)$ ergibt.

Aufgabe 2

Annabell hat zu ihrem Geburtstag genau 18 Freunde eingeladen: Marlene, Jakob, Anna Sophia, Felix, Sebastian, Ines, Andreas, Markus, Emma, Kristoff, Xenia, Lea, Andi, Bella, Selim, Nick, Achim und Sergej. Zum Geburtstagskaffee sollen alle 19 Feiernden an einem runden Tisch sitzen – Annabell natürlich an dem besonders geschmückten Ehrenplatz. Sie möchte ihre Gäste so anordnen, dass für alle Paare von Sitznachbarn gilt: Der Name des links sitzenden Gastes endet mit dem gleichen Buchstaben, mit dem der Name des rechts sitzenden Gastes beginnt.
Wie viele Möglichkeiten hat Annabell für ihre Sitzordnung?

Lösung:
Als Erstes betrachten wir, welche Anfangs- und Endbuchstaben bei den Namen der Gastgeberin und ihren Gästen vorkommen – wobei tatsächlich die gleichen Buchstaben vorhanden sind, was selbstverständlich eine Voraussetzung dafür ist, dass es überhaupt eine Lösung gibt:

Jeweils einmal: B, E, F, I, J, K, L, N, X
Mehrfach: A (fünfmal), M (zweimal), S (dreimal)

Bei allen nur einmalig vorkommenden Buchstaben ist klar, dass die beiden Personen mit diesem Buchstaben nebeneinandersitzen müssen. Daraus ergeben sich schon einmal die folgenden Teil-Sitzordnungs-Ketten:

Annabell – Lea
Marlene – Emma
Sergej – Jakob – Bella
Anna Sophia

Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia
Andi – Ines
Andreas
Markus
Selim
Achim

Hierbei gibt es zwei Ketten, die mit einem M beginnen, und – natürlich – zwei Ketten, die mit einem M enden. Es gibt zwei Möglichkeiten, die beiden M-Verbindungen herzustellen. Diese beiden Möglichkeiten untersuchen wir getrennt:

Fall 1: Es entstehen die Ketten *Selim – Marlene – Emma* und *Achim – Markus*. Dann hat man drei Ketten, die mit einem S beginnen (und mit einem A enden), und drei Ketten, die mit einem S enden (und mit einem A beginnen). Zur Herstellung einer ersten der drei S-Verbindungen hat man drei Möglichkeiten, für die zweite noch zwei, danach ergibt sich die dritte Verbindung. Insgesamt ergeben sich sechs Möglichkeiten für die S-Verbindungen, eine davon ist, als Beispiel:

Andi – Ines – Selim – Marlene – Emma
Andreas – Sergej – Jakob – Bella
Achim – Markus – Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia.

Hat man (auch) die S-Verbindungen hergestellt, hat man fünf Teilketten mit einem A am Anfang und am Ende. Die A-Verbindungen kann man mit diesen Ketten völlig frei wählen. Annabells und damit auch Leas Platz stehen fest, für den Platz rechts von Lea gibt es vier Möglichkeiten; für den Anschluss an das dann folgende schließende A gibt es noch drei Möglichkeiten usw. Im Ganzen gibt es in diesem Fall also $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ Möglichkeiten für die Sitzordnung. Eine davon ist:

Annabell – Lea – Anna Sophia – Andi – Ines – Selim – Marlene – Emma – Andreas – Sergej – Jakob – Bella – Achim – Markus – Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia – (**Annabell**)

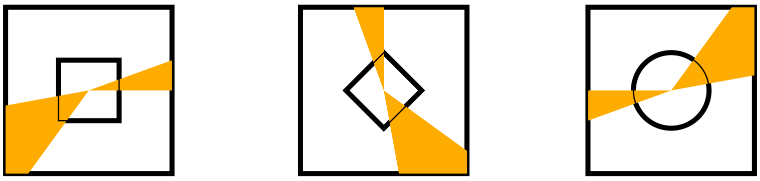
Fall 2: Es entstehen die Ketten *Achim – Marlene – Emma* und *Selim – Markus*. Dann können rechts von Markus nur noch Sergej oder Sebastian sitzen, weil Selim schon links von ihm sitzt. Links von Selim können noch Ines oder Andreas Platz nehmen. Das sind vier Möglichkeiten, die Kette Selim – Markus zu beiden Seiten zu ergänzen. Es verbleiben noch zwei Namen mit einem S, die Namensträger müssen nebeneinandersitzen. Man hat nun noch wie schon im ersten Fall fünf Teilketten mit einem A am Anfang und am Ende, woraus sich wiederum jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten ergeben, insgesamt in diesem Fall also $4 \cdot 24 = 96$ Möglichkeiten. Eine davon ist:

Annabell – Lea – Achim – Marlene – Emma – Andi – Ines – Selim – Markus – Sergej – Jakob – Bella – Anna Sophia – Andreas – Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia – (**Annabell**).

Nimmt man alle Fälle zusammen, ergeben sich damit $144 + 96 = 240$ Möglichkeiten für die Sitzordnung.

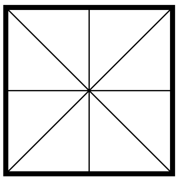
Aufgabe 3

In die Mitte eines quadratischen Hafenbeckens soll ein Leuchtturm gebaut werden, der mit seiner punktförmigen Lichtquelle die Hafenmauer rundum beleuchtet. Für die Form des Leuchtturms gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, wie unten abgebildet. Dabei ist allerdings zu beachten, dass aus Stabilitätsgründen nur die Hälfte des Umfangs des Leuchtturms aus lichtdurchlässigem Material bestehen kann.
Welche der Varianten ist am besten geeignet, um auch so einen möglichst großen Teil der Hafenmauer beleuchten zu können, und wie groß ist dann dieser Anteil?



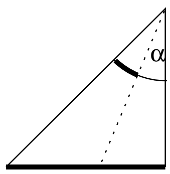
Lösung:

Im ersten Schritt unterteilen wir das Hafenbecken in 8 gleichschenklig-rechtwinklige, kongruente Dreiecke, die durch die Diagonalen und Seitenhalbierenden abgeteilt werden.

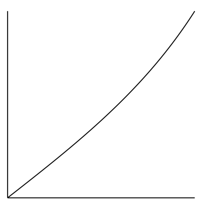


Die erste wichtige Beobachtung ist nun, dass es optimal ist, in jedem der 8 gleich großen Teile der Leuchtturmumrandung das gleiche Muster zu verwenden, insbesondere also in jedem der Achtel jeweils die Hälfte des Leuchtturms zu nutzen. Dies ist anschaulich leicht einzusehen: Würden in den Achteln verschiedene Anteile genutzt, könnte man aus dem stärker genutzten Achtel einen Teil an durchsichtiger Wand herausnehmen und an die entsprechenden Stellen in dem anderen Achtel einbauen – da in dem zweiten Achtel ja weniger genutzt wird, muss es entsprechend freie Stelle geben. Außerdem können wir für zwei Punkte auf der Leuchtturmumrandung vergleichen, wie viel Hafenmauer mit einem sehr kleinen Fenster gleicher Größe in diesem Bereich beleuchtet werden kann. Wird in einem Achtel nun ein Bereich um einen Punkt A benutzt, in einem anderen Achtel aber statt des entsprechenden Bereiches um den Punkt A' ein genauso großer Bereich um den Punkt B und der oben beschriebene Vergleich besagt, dass A „besser“ ist als B, so wäre es offensichtlich besser, B durch A' zu ersetzen.

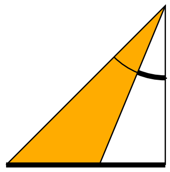
Wir können also unsere Untersuchungen auf eines dieser Achtel beschränken. Angenommen, wir nutzen einen durchgehenden Anteil dieses Achtels x, beginnend bei der Seitenhalbierenden der gesamten Hafenmauer. Dann können wir diesem Wert x einen Anteil $f(x)$ zuordnen, der misst, welcher Teil der Hafenmauer in diesem Achtel beleuchtet wird. So ist stets $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und die Funktion f ist monoton steigend.
Um zu bestimmen, welchen Teil des Leuchtturms wir nutzen sollten, müssen wir den oben beschriebenen Begriff vom Vergleich zweier Bereiche präzisieren. Es stellt sich heraus, dass eine gute mathematische Beschreibung hiervon die Steigung der Funktion $f(x)$ ist, also die Steigung der Tangenten, die wir an diesem Punkt an den Funktionsgraphen legen können (Mathematiker nennen das auch die *Ableitung* der Funktion f und schreiben $f'(x)$).
Denn diese beschreibt, wie viel zusätzliche Hafenmauer wir an diesem Punkt durch einen zusätzlich benutzten (kleinen, aber festen) Teil des Leuchtturms beleuchten können.
Im nächsten Schritt müssen wir also die Funktionen $f(x)$ berechnen. In einem Fall ist das einfach: Ist der Leuchtturm quadratisch und parallel zur Hafenmauer ausgerichtet, gilt $f(x) = x$ nach dem Strahlensatz und die Tangentensteigung ist überall gleich 1 (wir schreiben $f'(x) = 1$). Dies entspricht der anschaulichen Beobachtung, dass es in diesem Fall egal ist, welchen Teil des Leuchtturms wir nutzen, da wir stets die Hälfte der Hafenmauer beleuchten können.
Der nächste Fall ist der runde Leuchtturm. Hier entspricht der Anteil x der Leuchtturmumrandung proportional dem Anteil des Winkels α an 45°:



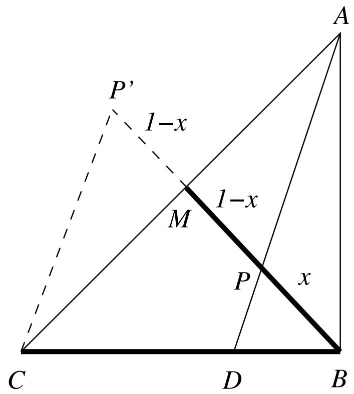
Nach Definition des Tangens erhalten wir $f(x) = \tan(x \cdot 45°)$. Stellen wir diese Funktion graphisch dar, sehen wir, dass f konvex, also nach oben gekrümmt ist, der Graph wird mit größerem x immer steiler.



Wollen wir die Hälfte des Leuchtturms mit der größten Steigung nutzen, so müssen wir die zur Diagonalen des Hafenbeckens, also zur Ecke orientierte Hälfte wählen. Dieser Anteil beginnt bei der Winkelhalbierenden dieses Achtels:



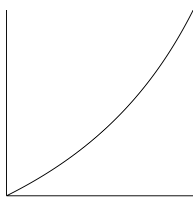
Bekanntlich teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, der maximal beleuchtete Anteil der Hafenmauer liegt hier also bei $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.
Zu guter Letzt kümmern wir uns um den Fall des quadratischen, „schräg“ zum Hafenbecken platzierten Leuchtturms. Hier benötigen wir eine kleine, aber feine geometrische Überlegung zur Berechnung von f:
Zunächst können wir den Leuchtturm „aufblasen“, also zentrisch strecken, ohne die Beleuchtungsverhältnisse zu verändern.
Wir erhalten die folgende geometrische Konstellation, wobei M der Mittelpunkt von AC ist und P der Punkt auf BM mit $\frac{|BP|}{|BM|} = x$. Dann wollen wir $f(x) = \frac{|BD|}{|BC|}$ berechnen.



Dazu sei P' das Bild der Spiegelung von P an M. Aus Symmetriegründen ist dann PC parallel zu AP und also zu PD. Dann können wir den Strahlensatz auf die von B ausgehenden Strahlen BC und BP' mit den parallelen Strecken PD und $P'C$ anwenden und erhalten

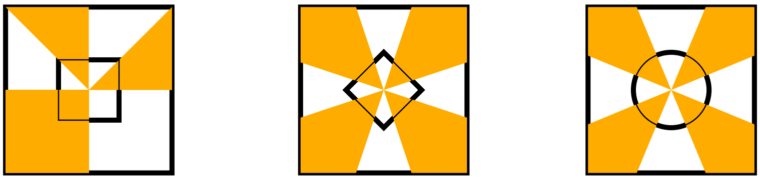
$$f(x) = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BP|}{|BP'|} = \frac{x}{x + 2(1-x)} = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1\,.$$

Auch hier sehen wir also, dass die Steigung des Graphen immer größer wird und wir somit wieder die in Richtung der Diagonalen liegende Hälfte des Leuchtturms wählen.



Dann sehen wir, dass der maximal beleuchtete Teil der Hafenmauer gerade $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ beträgt.
Damit haben wir gezeigt, dass im zuletzt untersuchten Fall der optimale Beleuchtungswert von $\frac{2}{3}$ erzeugt wird, während wir beim runden Leuchtturm nur etwa 58,6 % und beim quadratischen, parallel zur Hafenmauer ausgerichteten Leuchtturm sogar nur die Hälfte der Hafenmauer beleuchten können.

Ein möglicher Leuchtbereich beim ersten und die optimalen Leuchtbereiche bei den beiden anderen Leuchttürmen sehen also wie folgt aus:



Aufgabe 4

Die beiden zweistelligen Zahlen 25 und 76 haben die Eigenschaft, dass ihr Quadrat auf die gleichen zwei Stellen endet wie die Ausgangszahl: $25^2 = 6\underline{25}, 76^2 = 57\underline{76}$. Ihre Summe ist $25 + 76 = 101$.
Zeige, dass es für jede natürliche Zahl m neben den Zahlen 0 und 1 noch genau zwei Zahlen n mit höchstens m Stellen gibt, bei denen die letzten m Stellen von n^2 und n übereinstimmen. Was ist die Summe dieser beiden Zahlen?

Lösung: Es sei m eine natürliche Zahl und n eine Zahl mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann gibt es also eine natürliche Zahl r so, dass

$$n^2 - n = n \cdot (n - 1) = 10^m \cdot r = 2^m \cdot 5^m \cdot r$$

gilt. Die Primfaktoren 2 und 5 müssen also m-fach im Produkt $n \cdot (n - 1)$ vorkommen. Die Zahlen n und $n - 1$ sind aufeinanderfolgend und daher teilerfremd; alle m Faktoren 2 sind also zusammen entweder in n oder in $n-1$ enthalten, entsprechend 5^m. Nun ergeben sich vier Fälle für die Teilbarkeiten. Für jeden Fall gilt: Sind die beiden Teilbarkeitsbedingungen erfüllt, hat man automatisch eine Lösung n gefunden, da die Lösungseigenschaft äquivalent zu der Erfüllung der oben angeführten Gleichung mit einem geeigneten r ist.

Fall 1: $2^m \mid n$ und $5^m \mid n$. („$a \mid b$“ bedeutet: „a teilt b“.) Dann ist n ein Vielfaches von 10^m, und da n kleiner als 10^m sein soll, muss $n = 0$ sein.

Fall 2: $2^m \mid n - 1$ und $5^m \mid n - 1$. Mit derselben Überlegung wie im ersten Fall muss $n - 1 = 0$, also $n = 1$ sein.

Fall 3: $2^m \mid n$ und $5^m \mid n - 1$. Anders gesagt hat n den Rest 1 beim Teilen durch 5^m. Nun ist die Frage, ob es ein solches n mit $0 \leq n < 10^m$ gibt. Wer sich schon ein wenig mit Zahlentheorie auskennt, darf das Stichwort

„Chinesischer Restsatz“ nennen und kennt die Antwort. Wir leiten sie hier gerne vollständig her: Es ist $n = k \cdot 2^m$ mit einem geeigneten $k \geq 0$. Wir betrachten die Reste aller nichtnegativen Zahlen $k \cdot 2^m$, die kleiner als 10^m sind, beim Teilen durch 5^m. Gäbe es zwei verschiedene Zahlen $k_1 \cdot 2^m$ und $k_2 \cdot 2^m$ mit gleichem Rest, dann wäre also $p := |(k_2 - k_1) \cdot 2^m|$ durch 5^m teilbar. Da p auch durch 2^m teilbar ist, ist es dann durch 10^m teilbar. Es ist außerdem $p \neq 0$, sodass $p \geq 10^m$ sein muss. Das steht im Widerspruch dazu, dass die beiden nichtnegativen Zahlen, deren Differenz p ist, kleiner als 10^m sind.
Die Zahlen haben also alle verschiedene Reste. Wegen $5^m \cdot 2^m = 10^m$ und somit $(5^m - 1) \cdot 2^m < 10^m$ gibt es genau 5^m Zahlen der Form $k \cdot 2^m$, die nichtnegativ und kleiner als 10^m sind. Daher kommt jeder mögliche Rest beim Teilen durch 5^m genau einmal vor. Insbesondere gibt es genau ein k so, dass $5^m \mid k \cdot 2^m - 1$ gilt. Für $m = 2$ ist dies das schon genannte Beispiel 76.

Fall 4: $2^m \mid n - 1$ und $5^m \mid n$. Wie im Fall 3 kann gezeigt werden, dass es auch hier genau eine Lösung gibt.

Die Lösungen aus den vier Fällen müssen offensichtlich alle verschieden sein, weil die Teilbarkeiten sich nicht „vertragen“.

Die beiden Lösungen aus den Fällen 3 und 4 exakt anzugeben, ist etwas schwieriger, als ihre Existenz zu zeigen. Allerdings ist offensichtlich, dass man die Zahlen schrittweise finden kann, da die letzten $m - 1$ Ziffern der Zahlen für ein m mit den Ziffern für $m - 1$ übereinstimmen müssen. Mit etwas Probieren geht es also schon ganz gut; und man wird schnell auch noch etwas Systematik beim Finden der jeweils neuen Ziffer entwickeln – das ginge hier aber zu weit.
Jedoch gibt es noch eine weitere schöne Eigenschaft, nach der wir auch fragten: Ist n_1 die Lösung für Fall 3 und n_2 die Lösung aus Fall 4, so ist immer $n_1 + n_2 = 10^m + 1$. Um dies zu beweisen, betrachten wir die Zahl $j := 10^m + 1 - n_1$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} j^2 - j &= (10^m + 1 - n_1)^2 - (10^m + 1 - n_1) \\ &= 10^m(10^m + 2 - 2n_1 - 1) + 1 - 2n_1 + n_1^2 - 1 + n_1 \\ &= n_1^2 - n_1 + 10^m(10^m + 1 - 2n_1) \\ &= 10^m(k + 10^m + 1 - 2n_1) \end{aligned}$$

mit einem geeigneten k. Damit ist auch j eine Lösung der Aufgabe, denn weil n_1 ungleich 0 und 1 ist, ist j kleiner als 10^m, zugleich größer als 1. Es ist $j \neq n_1$, weil sonst $10^m + 1$ durch 2^m teilbar sein müsste. Damit kann j nur noch die Lösung aus Fall 4 sein, $j = n_2$.

Für $m = 10$ lauten die beiden Lösungen:

$$8212890625 \qquad \text{und} \qquad 1787109376.$$

Man nennt solche Zahlen auch *automorphe Zahlen.*