Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 116 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Wir bilden eine Zahlenfolge wie folgt:
Beginnend mit der 1 addieren wir jeweils die Anzahl der Stellen der vorangegangenen Zahl. Auf z. B. die Zahl 103 folgt also $103 + 3 = 106$, da 103 drei Stellen hat.
a) Zeige, dass die Zahl 2016 in dieser Folge vorkommt.
b) Was ist die kleinste Zehnerpotenz, die nicht in der Folge vorkommt?
Hinweis: Zehnerpotenzen sind genau die Zahlen, die mit der Ziffer 1 *anfangen und dann nur Nullen enthalten, also die Zahlen* $1, 10, 100, 1000, \ldots$

Lösung:

a) Wir beginnen mit der Zahl 1. Bis die erste zweistellige Zahl erreicht wird, addieren wir jeweils 1 zu der vorherigen Zahl. Bei der ersten zweistelligen Zahl 10 fehlen 90 zur ersten dreistelligen Zahl 100. Nachdem wir also 45-mal 2 addiert haben, erreichen wir die 100. Ab jetzt wird in jedem Schritt eine 3 addiert. Da die Differenz der ersten vierstelligen Zahl, 1000, und 100 den Wert 900 hat und da 900 durch 3 teilbar ist, sind wir nach 300 weiteren Schritten bei 1000 angekommen. Nun wird in jedem Schritt 4 addiert. Da auch 2016 vierstellig und $2016 - 1000 = 4 \cdot 254$ ist, können wir nach 254 weiteren Schritten die gewünschte Zahl 2016 erreichen – insgesamt also nach $9 + 45 + 300 + 254 = 608$ Schritten.

b) Wir bemerken, dass die erste n-stellige Zahl immer eine Zehnerpotenz mit $n - 1$ Nullen, also 10^{n-1} bzw. eine 1 mit $n - 1$ Nullen dahinter, ist. Offensichtlich wird die 1 in unserer Folge abgedeckt. Von der ersten n-stelligen Zahl in unserer Folge bis zur ersten $(n+1)$-stelligen Zahl addieren wir in jedem Schritt n. Solange die erste n-stellige Zahl tatsächlich eine Zehnerpotenz, also 10^{n-1}, ist, müssen wir bis zur ersten $(n + 1)$-stelligen Zahl eine Differenz von mindestens $10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$ überwinden. Dies ist eine 9 mit genau so vielen Nullen dahinter, wie die kleinere Zehnerpotenz Nullen hatte. Wenn die Zahl, die wir in jedem Schritt zu der Folge addieren, diese Differenz teilt, dann wird auch die größere Zehnerpotenz erreicht. So wird die 10 erreicht, weil $9 = 9 \cdot 1$ ist, die 100 wird erreicht, weil $90 = 45 \cdot 2$ ist, die 1000 wird erreicht, weil $900 = 300 \cdot 3$ ist, die 10.000 wird erreicht, weil $9000 = 2250 \cdot 4$ ist, die 100.000 wird erreicht, weil $90.000 = 18.000 \cdot 5$ ist, und die 1.000.000 wird errreicht, weil $900.000 = 150.000 \cdot 6$ ist. Anschließend wird die 10.000.000 jedoch nicht mehr erreicht, da die Differenz zur vorherigen Zehnerpotenz nicht durch 7 teilbar ist. 7 wird jedoch in jedem Schritt zu dem vorigen Folgenglied addiert. (Genaues Nachrechnen ergibt, dass in unserer Folge nach der Zahl 9.999.998 als erste 8-stellige Zahl die Zahl 10.000.005 entsteht.)

Dieses Ergebnis lässt sich auch ohne viel Rechnerei bestimmen, wenn man herausfindet, dass die Primfaktoren von $9 \cdot 10^n$ höchstens 2, 3 und 5 sind. Weiterhin teilen alle natürlichen Zahlen bis 6 bereits 90, also auch alle Vielfachen von 90. Dagegen ist die 7 in keiner der untersuchten Differenzen als Primfaktor vorhanden, muss also zu Problemen führen. Deswegen ist 10^7 auch die erste Zehnerpotenz, die nicht in der Folge vorkommt.

Aufgabe 2

Emma hat zu ihrem 16. Geburtstag genau 16 Freunde eingeladen: Marlene, Jakob, Anna Sophia, Felix, Sebastian, Ines, Andreas, Annabell, Kristoff, Xenia, Lea, Andi, Bella, Nick, Achim und Sergej. Zum Geburtstagskaffee sollen alle 17 Feiernden an einem runden Tisch sitzen – Emma natürlich an dem besonders geschmückten Ehrenplatz. Sie möchte ihre Gäste so anordnen, dass für alle Paare von Sitznachbarn gilt: Der Name des links sitzenden Gastes endet mit dem gleichen Buchstaben, mit dem der Name des rechts sitzenden Gastes beginnt.
Wie viele Möglichkeiten hat Emma für ihre Sitzordnung?

Lösung:

Als Erstes betrachten wir, welche Anfangs- und Endbuchstaben bei den Namen der Gastgeberin und ihren Gästen vorkommen – wobei tatsächlich die gleichen Buchstaben vorhanden sind, was selbstverständlich eine Voraussetzung dafür ist, dass es überhaupt eine Lösung gibt:

Jeweils einmal: B, E, F, I, J, K, L, M, N, X
Mehrfach: A (fünfmal), S (zweimal)

Bei allen nur einmalig vorkommenden Buchstaben ist klar, dass die beiden Personen mit diesem Buchstaben nebeneinandersitzen müssen. Daraus ergeben sich schon einmal die folgenden Teil-Sitzordnungs-Ketten:

Achim – Marlene – **Emma**
Sergej – Jakob – Bella
Anna Sophia
Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia
Andi – Ines
Andreas
Annabell – Lea

Hierbei gibt es zwei Ketten, die mit einem S beginnen (und mit einem A enden), und – natürlich – zwei Ketten, die mit einem S enden (und mit einem A beginnen). Es gibt zwei Möglichkeiten, die beiden S-Verbindungen herzustellen. Als Beispiel ergibt die eine Möglichkeit die Teilketten

Andi – Ines – Sergej – Jakob – Bella
und
Andreas – Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia.

In jedem Fall entstehen zwei Ketten, die sowohl mit einem A beginnen als auch enden. Insgesamt hat man dann also nur noch fünf Ketten mit einem A am Anfang und am Ende. Die A-Verbindungen kann man mit diesen Ketten völlig frei wählen. Emmas Platz steht fest, für den Platz rechts von ihr gibt es vier Möglichkeiten; für den Anschluss an das dann folgende schließende A gibt es noch drei Möglichkeiten usw. Im Ganzen gibt es also $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten für die Sitzordnung. Eine davon ist:

> **Emma** – Anna Sophia – Andi – Ines – Sergej – Jakob – Bella – Andreas – Sebastian – Nick – Kristoff – Felix – Xenia – Annabell – Lea – Achim – Marlene – (**Emma**)

Aufgabe 3

Finde alle natürlichen Zahlen n, die die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = 116$$

erfüllen. Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ der *ganzzahlige Anteil* einer Zahl x, also die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Zum Beispiel ist $\lfloor 42 \rfloor = 42$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ und $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Was passiert, wenn wir 116 durch 117 ersetzen?

Lösung:

Wir untersuchen zunächst die Eigenschaften von $\lfloor x \rfloor$. Diese Funktion wird auch Gaußklammer genannt; man kann auch einfach von der Abrundungsfunktion sprechen. Einerseits erhält man nie ein geringeres Ergebnis, wenn man statt einer gegebenen eine größere Zahl abrundet. Aus $x \geq y$ folgt also stets $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor$, man sagt auch: $\lfloor x \rfloor$ ist *monoton* (wachsend). Andererseits wird eine Zahl durch das Abrunden nie größer, es gilt also $\lfloor x \rfloor \leq x$. Weiterhin bleiben natürliche Zahlen gleich, wenn man sie abrundet, und allgemein ist die Differenz von x und $\lfloor x \rfloor$ immer kleiner als 1. Die beiden Zahlen sind demnach ähnlich groß. Um ein Gefühl für die Größenordnung von n zu bekommen, bietet es sich also erst einmal an, die Gleichung ohne die Gaußklammern zu lösen. Wir erhalten:

$$\frac{n'}{1} + \frac{n'}{2} + \frac{n'}{3} + \frac{n'}{6} = 2n' = 116.$$

Nach Division durch 2 erhalten wir also $n' = 58$. Setzen wir diese Lösung in unseren ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir:

$$\left\lfloor \frac{58}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{58}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{58}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{58}{6} \right\rfloor = 58 + 29 + 19 + 9 = 115.$$

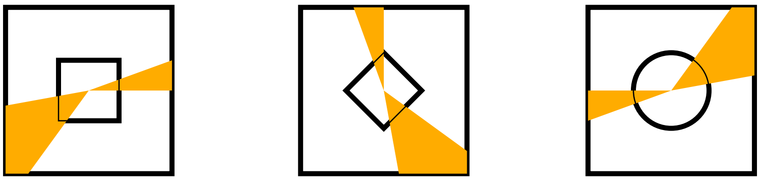
Wir benötigen also ein größeres n und versuchen es nun mit 59:

$$\left\lfloor \frac{59}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{59}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{59}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{59}{6} \right\rfloor = 59 + 29 + 19 + 9 = 116.$$

Somit ist $n = 59$ eine Lösung. Die nächstgrößere Zahl $n = 60$ ist jedoch im Gegensatz zu $n = 59$ durch 6 und damit auch durch 2 und 3 teilbar. Deshalb ist $\lfloor \frac{60}{1} \rfloor + \lfloor \frac{60}{2} \rfloor + \lfloor \frac{60}{3} \rfloor + \lfloor \frac{60}{6} \rfloor = 60 + 30 + 20 + 10 = 120$ größer als 117. Da die betrachtete Funktion monoton ist, gibt es kein n, das die Gleichung mit der 117 erfüllt.

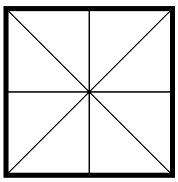
Aufgabe 4

In die Mitte eines quadratischen Hafenbeckens soll ein Leuchtturm gebaut werden, der mit seiner punktförmigen Lichtquelle die Hafenmauer rundum beleuchtet. Für die Form des Leuchtturms gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, wie unten abgebildet. Dabei ist allerdings zu beachten, dass aus Stabilitätsgründen nur die Hälfte des Umfangs des Leuchtturms aus lichtdurchlässigem Material bestehen kann.
Welche der Varianten ist am besten geeignet, um auch so einen möglichst großen Teil der Hafenmauer beleuchten zu können, und wie groß ist dann dieser Anteil?



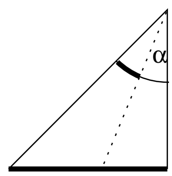
Lösung:

Im ersten Schritt unterteilen wir das Hafenbecken in 8 gleichschenklig-rechtwinklige, kongruente Dreiecke, die durch die Diagonalen und Seitenhalbierenden abgeteilt werden.

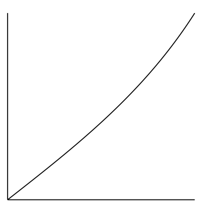


Die erste wichtige Beobachtung ist nun, dass es optimal ist, in jedem der 8 gleich großen Teile der Leuchtturmumrandung das gleiche Muster zu verwenden, insbesondere also in jedem der Achtel jeweils die Hälfte des Leuchtturms zu nutzen. Dies ist anschaulich leicht einzusehen: Würden in den Achteln verschiedene Anteile genutzt, könnte man aus dem stärker genutzten Achtel einen Teil an durchsichtiger Wand herausnehmen und an die entsprechenden Stellen in dem anderen Achtel einbauen – da in dem zweiten Achtel ja weniger genutzt wird, muss es entsprechend freie Stelle geben. Außerdem können wir für zwei Punkte auf der Leuchtturmumrandung vergleichen, wie viel Hafenmauer mit einem sehr kleinen Fenster gleicher Größe in diesem Bereich beleuchtet werden kann. Wird in einem Achtel nun ein Bereich um einen Punkt A benutzt, in einem anderen Achtel aber statt des entsprechenden

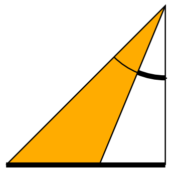
Bereiches um den Punkt A' ein genauso großer Bereich um den Punkt B und der oben beschriebene Vergleich besagt, dass A „besser“ ist als B, so wäre es offensichtlich besser, B durch A' zu ersetzen.
Wir können also unsere Untersuchungen auf eines dieser Achtel beschränken.
Angenommen, wir nutzen einen durchgehenden Anteil dieses Achtels x, beginnend bei der Seitenhalbierenden der gesamten Hafenmauer. Dann können wir diesem Wert x einen Anteil $f(x)$ zuordnen, der misst, welcher Teil der Hafenmauer in diesem Achtel beleuchtet wird. So ist stets $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und die Funktion f ist monoton steigend.
Um zu bestimmen, welchen Teil des Leuchtturms wir nutzen sollten, müssen wir den oben beschriebenen Begriff vom Vergleich zweier Bereiche präzisieren. Es stellt sich heraus, dass eine gute mathematische Beschreibung hiervon die Steigung der Funktion $f(x)$ ist, also die Steigung der Tangenten, die wir an diesem Punkt an den Funktionsgraphen legen können (Mathematiker nennen das auch die *Ableitung* der Funktion f und schreiben $f'(x)$).
Denn diese beschreibt, wie viel zusätzliche Hafenmauer wir an diesem Punkt durch einen zusätzlich benutzten (kleinen, aber festen) Teil des Leuchtturms beleuchten können.
Im nächsten Schritt müssen wir also die Funktionen $f(x)$ berechnen. In einem Fall ist das einfach: Ist der Leuchtturm quadratisch und parallel zur Hafenmauer ausgerichtet, gilt $f(x) = x$ nach dem Strahlensatz und die Tangentensteigung ist überall gleich 1 (wir schreiben $f'(x) = 1$). Dies entspricht der anschaulichen Beobachtung, dass es in diesem Fall egal ist, welchen Teil des Leuchtturms wir nutzen, da wir stets die Hälfte der Hafenmauer beleuchten können.
Der nächste Fall ist der runde Leuchtturm. Hier entspricht der Anteil x der Leuchtturmumrandung proportional dem Anteil des Winkels α an 45°:



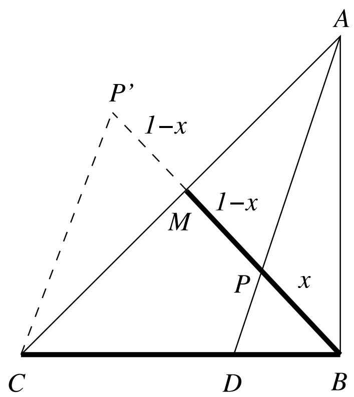
Nach Definition des Tangens erhalten wir $f(x) = \tan(x \cdot 45°)$. Stellen wir diese Funktion graphisch dar, sehen wir, dass f konvex, also nach oben gekrümmt ist, der Graph wird mit größerem x immer steiler.



Wollen wir die Hälfte des Leuchtturms mit der größten Steigung nutzen, so müssen wir die zur Diagonalen des Hafenbeckens, also zur Ecke orientierte Hälfte wählen. Dieser Anteil beginnt bei der Winkelhalbierenden dieses Achtels:



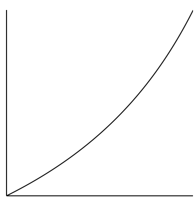
Bekanntlich teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, der maximal beleuchtete Anteil der Hafenmauer liegt hier also bei $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.
Zu guter Letzt kümmern wir uns um den Fall des quadratischen, „schräg“ zum Hafenbecken platzierten Leuchtturms. Hier benötigen wir eine kleine, aber feine geometrische Überlegung zur Berechnung von f:
Zunächst können wir den Leuchtturm „aufblasen“, also zentrisch strecken, ohne die Beleuchtungsverhältnisse zu verändern.
Wir erhalten die folgende geometrische Konstellation, wobei M der Mittelpunkt von AC ist und P der Punkt auf BM mit $\frac{|BP|}{|BM|} = x$. Dann wollen wir $f(x) = \frac{|BD|}{|BC|}$ berechnen.



Dazu sei P' das Bild der Spiegelung von P an M. Aus Symmetriegründen ist dann PC parallel zu AP und also zu PD. Dann können wir den Strahlensatz auf die von B ausgehenden Strahlen BC und BP' mit den parallelen Strecken PD und $P'C$ anwenden und erhalten

$$f(x) = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BP|}{|BP'|} = \frac{x}{x + 2(1-x)} = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1\,.$$

Auch hier sehen wir also, dass die Steigung des Graphen immer größer wird und wir somit wieder die in Richtung der Diagonalen liegende Hälfte des Leuchtturms wählen.



Dann sehen wir, dass der maximal beleuchtete Teil der Hafenmauer gerade $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ beträgt.
Damit haben wir gezeigt, dass im zuletzt untersuchten Fall der optimale Beleuchtungswert von $\frac{2}{3}$ erzeugt wird, während wir beim runden Leuchtturm nur etwa 58,6 % und beim quadratischen, parallel zur Hafenmauer ausgerichteten Leuchtturm sogar nur die Hälfte der Hafenmauer beleuchten können.

Ein möglicher Leuchtbereich beim ersten und die optimalen Leuchtbereiche bei den beiden anderen Leuchttürmen sehen also wie folgt aus: