Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 117 (ab Klasse 9)

Aufgabe 1

Wir beginnen mit einer beliebigen dreistelligen Zahl, bei der die erste und letzte Ziffer nicht gleich sind. Dazu bilden wir die ebenfalls dreistellige Zahl, die die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, und ziehen die kleinere der beiden von der größeren ab. Diesen Schritt wiederholen wir. Erhalten wir eine zweistellige Zahl als Ergebnis, wird diese durch eine 0 zu einer dreistelligen Zahl ergänzt.
Zum Beispiel bilden wir aus der 435 die Zahl 534 und nach einem Schritt die Differenz $534-435 = 99$. Im nächsten Schritt bilden wir daraus die Zahl 990 und erhalten als Ergebnis nach zwei Schritten die Differenz $990 - 99 = 891$.

a) Zeige, dass das Ergebnis nach zwei Schritten immer ungerade ist.

b) Zeige, dass das Ergebnis nach 117 Schritten identisch mit dem Ergebnis nach 2017 Schritten ist.

Lösung:

Die erste wichtige Beobachtung ist, dass das Ergebnis bereits nach einem Schritt (und damit nach beliebig vielen Schritten) stets durch 99 teilbar ist. Dies lässt sich wie folgt begründen: Sind die Ziffern der Ausgangszahl mit a, b, c bezeichnet, so ist diese Zahl gleich $100a+10b+c$. Die aus den gleichen Ziffern in umgekehrter Reihenfolge gebildete Zahl ist dann $100c + 10b + a$, ihre Differenz ist also $|(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)| = 99|a - c|$ und damit durch 99 teilbar.
Andererseits ist das Ergebnis nach dem ersten Schritt nie 0, denn sonst müsste $a = c$ sein, was nach Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde.
Nach dem 1. Schritt ist das Ergebnis also eine der Zahlen 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891 und 990. Da auch bei jeder dieser Zahlen die erste Ziffer ungleich der letzten Ziffer ist, können wir das gleiche Argument wie oben anwenden und folgern, dass nach beliebig vielen Schritten das Ergebnis stets eine dieser Zahlen ist.

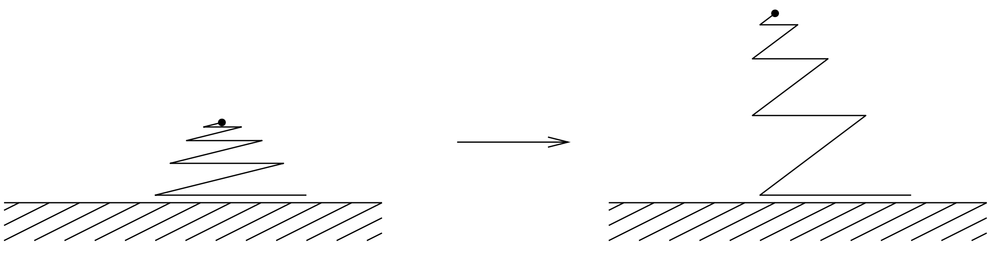
Um Teil a) zu zeigen, kann man nun also einfach für jede dieser 10 Zahlen den Schritt anwenden und überprüfen, ob das Ergebnis ungerade ist.
Wenn man etwas geschickter vorgehen will oder verstehen will, „warum“ das funktioniert, kann man sich Folgendes überlegen: Das Ergebnis nach einem weiteren Schritt wäre genau dann gerade, wenn beide voneinander abzuziehenden Zahlen den gleichen Rest beim Teilen durch 2 lassen. Das ist aber bekanntlich genau dann der Fall, wenn die jeweils letzten Ziffern den gleichen Rest beim Teilen durch 2 lassen. Diese beiden Ziffern sind aber gerade die erste und die letzte Ziffer der ursprünglichen Zahl. In der Liste

dieser 10 Zahlen taucht nun keine Zahl auf, bei der diese beiden Ziffern den gleichen Rest lassen.
Warum ist das so? Beim Bilden der Differenz entsteht als mittlere Ziffer immer eine 9, weil zum einen die beiden Zehnerziffern gleich sind, an der Einerstelle aber eine größere von einer kleineren Ziffer abgezogen wird. Die Quersumme der Differenz ist durch 9 teilbar, aber nicht der Maximalwert 27 und auch nicht 9, weil schon die Zehnerziffer eine 9 ist. Also ist die Quersumme aller dieser Zahlen 18, und da die mittlere Ziffer immer 9 ist, ist die Summe der ersten und letzten Ziffer ebenfalls immer gleich 9, insbesondere ungerade, also müssen die beiden Ziffern verschiedene Reste beim Teilen durch 2 lassen!

Damit ist Teil a) gezeigt und wir können unsere Liste der möglichen Ergebnisse ab dem 2. Schritt einschränken auf 099, 297, 495, 693 und 891.
Nun rechnet man aber einfach nach, dass wir von 099 in einem Schritt zur 891, im nächsten Schritt zur 693, dann zur 297, dann zur 495 und dann wieder zur 099 kommen. Genauso kommt man, wenn man bei einer anderen der 5 Zahlen startet, nach 5 Schritten wieder bei der Ausgangszahl an. Die Folge wird also bei beliebigem Startwert ab dem 2. Schritt periodisch mit Periodenlänge 5. Da $2017 - 117 = 1900$ durch 5 teilbar ist, sind die beiden Ergebnisse nach 117 und nach 2017 Schritten damit gleich.

Aufgabe 2

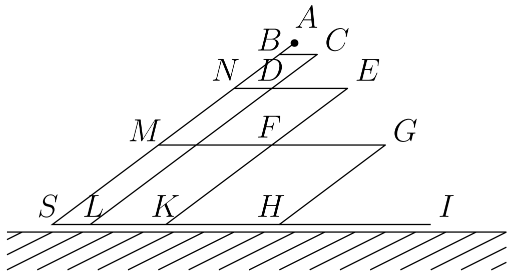
Markus hat ein Faltblatt in seinen Händen, das im zusammengelegten Zustand im Zick-Zack-Verfahren mehrfach gefaltet ist. Die Teilblätter sind dabei unterschiedlich breit: Das n-te Blatt ist immer n-mal so breit wie das erste Teilblatt. Insgesamt gibt es acht Teilblätter. Andreas will das Faltblatt in besonderer Weise aufklappen: Das letzte (gleich achte) Teilblatt soll fest auf dem Tisch liegen bleiben; das zweite, vierte und sechste Teilblatt sollen immer zur Tischfläche, also zum letzten Teilblatt parallel sein und das erste, dritte, fünfte und siebte Teilblatt sollen ebenfalls parallel zueinander sein – vergleiche die Abbildung, auf der die Situation von der vorderen Seite betrachtet wird:



Markus fasst das Faltblatt mit seinem linken Daumen an der vorderen unteren Ecke des ersten Teilblattes an. Welche Bahn beschreibt der Daumen, wenn er auf die beschriebene Art das Faltblatt komplett auffaltet?

Lösung:

Wir betrachten die Situation weiterhin von der (Vorder-)Seite und beschriften die Eckpunkte der Faltblattkanten mit den Buchstaben A bis I. Der Daumen befindet sich immer am Punkt A. Außerdem verlängern wir alle acht Strecken über die Punkte B, D, F und H hinaus. Dabei entstehen einige weitere Schnittpunkte, siehe Abbildung. Insbesondere ist S der Schnittpunkt der Geraden (AB) und (HI).



Da die Teilblätter des Faltblatts abwechselnd parallel zueinander sein sollen, ergibt sich beispielsweise ein Parallelogramm $KHGF$. Die Strecke KH ist also genauso lang wie FG. Ebenso ist – unabhängig vom Grad der Auffaltung des Faltblattes – immer $|LK| = |DE|$ und $|SL| = |BC|$. Es ist also S immer am gleichen Ort zu finden, denn es ist $|SH| = |SL| + |LK| + |KH| = |BC| + |DE| + |FG| (= 12 \cdot |AB|)$.
Ebenso gilt unabhängig von der Position von A die Gleichheit $|SA| = |SM| + |MN| + |NB| + |BA| = |HG| + |FE| + |DC| + |BA| = 16 \cdot |AB|$. Das bedeutet in der Summe nichts anderes, als dass beim Auffalten der Daumen eine Halbkreisbahn um den Punkt S mit Radius $|SA| = 16 \cdot |AB|$ beschreibt.

Aufgabe 3

Konstantin ist zu Besuch bei der Familie seiner Tante Anne und seines Onkels Baldur. Während die beiden Erwachsenen den Kuchen und die Schlagsahne vorbereiten, unterhält sich Konstantin mit seiner Cousine Clara und seinem Cousin David.
Clara, die sich einen Spaß daraus zu machen scheint, Konstantin mit mathematischen Rätseln auf die Probe zu stellen, erzählt ihm: „Wenn man das Alter meiner Mutter verdoppelt und zu dem Dreifachen des Alters meines Vaters addiert, erhält man die Summe aus dem Siebenfachen meines Alters und dem Achtfachen des Alters meines Bruders. Noch viel bemerkenswerter ist jedoch, dass meine Mutter exakt die gleiche Zeit vor meinem Vater geboren ist wie mein Bruder nach mir.“
Kurz bevor es den Kuchen gibt, fügt sie noch hinzu: „Und wenn man zum Produkt des Alters meiner Eltern 962 addiert, so ist dies nicht größer als das Fünffache des Produkts des Alters von David und mir, zu dem man das 60-Fache meines Alters und das 64-Fache des Alters von David addiert hat.“

Kann Konstantin mit diesen Informationen herausfinden, wie alt die Mitglieder der Familie seines Onkels sind?

Lösung:

Bezeichnen wir Annes Alter mit a, Baldurs Alter mit b, Claras Alter mit c und Davids Alter mit d. Wir können Claras Angaben in folgende Gleichungen umwandeln:

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 7c + 8d\,, \\ a - b &= c - d \end{aligned}$$

sowie

$$ab + 962 \leq 5cd + 60c + 64d\,.$$

Normalerweise benötigt man zur Bestimmung von vier Unbekannten (in diesem Fall den vier verschiedenen Alterszahlen) auch vier Gleichungen. Gegeben sind jedoch nur drei Beziehungen zwischen den Variablen, von denen sogar eine nur eine Ungleichung ist. Wir müssen uns also einen Trick einfallen lassen. Zunächst wollen wir das Alter der Eltern in Abhängigkeit von dem Alter ihrer Kinder angeben. Dazu addieren wir das Dreifache der zweiten Gleichung zu der ersten Gleichung und erhalten $5a = 10c + 5d$ bzw. $a = 2c + d$. Analog erhalten wir durch Subtraktion des Zweifachen der zweiten Gleichung von der ersten Gleichung $5b = 5c + 10d$ bzw. $b = c + 2d$. Dies setzen wir in die dritte Beziehung ein und erhalten:

$$(2c + d)(c + 2d) + 962 \leq 5cd + 60c + 64d\,.$$

Wir multiplizieren aus und bringen alle Terme auf die linke Seite:

$$2c^2 + 2d^2 + 5cd + 962 - 5cd - 60c - 64d \leq 0\,.$$

Dies lässt sich zu zwei Quadraten zusammenfassen:

$$2(c - 15)^2 + 2(d - 16)^2 \leq 0\,.$$

Nun können wir auch den benötigten Trick anwenden: Damit die linke Seite der Gleichung kleiner oder gleich 0 sein kann, müssen beide Summanden 0 sein, da die Quadrate nicht negativ sein können. Es folgt also $(c - 15)^2 = 0$ sowie $(d - 16)^2 = 0$ und damit $c = 15$ und $d = 16$. Setzen wir dies in die bereits gefundenen Formeln für a und b ein, erhalten wir $a = 2 \cdot 15 + 16 = 46$ und $b = 15 + 2 \cdot 16 = 47$. Eine Probe bestätigt diese Ergebnisse.
Hinweis: Wir erkennen, dass Baldur und David jeweils ein Jahr älter als Anne und Clara sind. Auch wenn die Aufgabenstellung mathematisch korrekt gestellt war, hätte vielleicht „Noch viel bemerkenswerter ist jedoch, dass meine Mutter exakt die gleiche Zeit *nach* meinem Vater geboren ist wie mein Bruder *vor* mir“ eine schönere Formulierung des Aufgabentextes dargestellt.

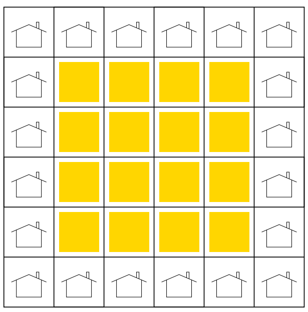
Aufgabe 4

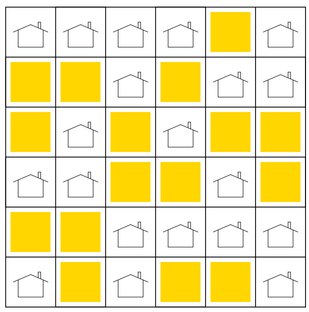
Im Meer wurde eine Insel aufgeschüttet, um dort eine Feriensiedlung zu errichten. Die bebaubare Grundfläche besteht aus einem Quadrat von $n \times n$

Grundstücken. Natürlich möchte jeder, der auf der Insel seinen Urlaub verbringt, einen Blick zum Meer haben. Von jedem Ferienhaus muss also in eine der vier Richtungen der Blick frei und nicht durch andere Häuser verdeckt sein.
Wie viele Häuser können unter diesen Bedingungen auf der Insel gebaut werden?
Zusatzfrage: Das Bauunternehmen expandiert und möchte jetzt ein würfelförmiges Weltraumhotel der Seitenlänge n für Weltraumtouristen errichten. Wie viele Wohneinheiten (Würfel der Seitenlänge 1 in dem Raster des Hotels) können in diesem Fall gebaut werden, wenn jeder Urlauber in mindestens eine der sechs Richtungen den freien Blick in die Tiefe des Alls genießen können soll?

Lösung:

Eine einfache Möglichkeit, die gewünschte Bedingung zu erfüllen, ist es, nur die Randgrundstücke der Insel zu bebauen. Mit dieser Methode können $4n-4$ Häuser errichtet werden (n Häuser auf jeder der 4 Seiten, aber die 4 Ecken werden doppelt gezählt). Tatsächlich können in dieser Konstellation auch keine weiteren Häuser gebaut werden, da der Seeblick von einem beliebigen Punkt im Inneren der Insel durch die vorhandene Bebauung verdeckt ist. Es besteht also Grund zur Hoffnung, dass $4n - 4$ die gesuchte Maximalzahl ist. Doch wie beweist man das? Immerhin ist die oben beschriebene Bebauung nicht die einzige Möglichkeit, diese Zahl zu erreichen, wie das folgende Bild zeigt:





Eine erste Idee, die viele von euch hatten, ist es, ein Haus im Inneren der Insel entlang der Sichtachse von diesem Haus zum Meer an den Strand zu schieben. Dies würde man so lange wiederholen, bis alle Häuser am Strand stehen und es damit höchstens $4n - 4$ Häuser geben kann. Um diese Idee in einen ordentlichen Beweis umzuformen, muss man aber bei der logischen Struktur etwas aufpassen (Was ist die „Startlösung“? Wie wird „geschoben“? Warum wird durch das Schieben niemandem „die Sicht versperrt“?). Die eleganteste Version scheint die folgende zu sein:
Wir gehen von einer beliebigen Bebauung der Insel aus, die die Bedingung erfüllt. Dann wollen wir zeigen, dass es höchstens $4n - 4$ Ferienhäuser gibt. Dazu können wir uns vorstellen, dass zu jedem Haus ein Strandkorb auf einem der $4n - 4$ Strandgrundstücke aufgestellt wird. Zu einem Haus, welches

bereits am Strand, also auf dem Rand oder einer Ecke der Insel steht, soll der Strandkorb natürlich direkt auf dem gleichen Grundstück aufgestellt werden, auf dem auch das Haus steht. Für die Häuser im Inneren der Insel wollen wir den Platz für den Strandkorb zumindest so auswählen, dass dieses Strandstück vom Haus aus sichtbar ist. So hat man stets alles unter Kontrolle.
Da wir annehmen, dass die Bedingung erfüllt ist, gibt es tatsächlich zu jedem Haus ein solches von dort aus sichtbares Strandgrundstück. Natürlich kann es auch mehrere geben, in diesem Fall suchen wir uns unter den möglichen Grundstücken ein beliebiges aus.

Unpraktisch wäre es nun allerdings, wenn die Bewohner zweier verschiedener Häuser auf demselben Grundstück ihren Strandkorb aufstellen wollen, da kann es schnell mal zum Streit kommen. Doch kann dieser Fall überhaupt eintreten? Da auf jedem Grundstück nur höchstens ein Haus steht, müsste dann eines der beiden betroffenen Häuser im Inneren der Insel stehen. Nach Voraussetzung sieht man von dort aus aber in Richtung des Strandkorbs das Meer, insbesondere kann auf dem Grundstück mit den Strandkörben kein weiteres Haus stehen. Dann müssen aber beide betroffenen Häuser im Inselinneren stehen und beide müssen auf derselben Linie wie die Strandkörbe stehen und jeweils freie Sicht auf diese haben, was natürlich nicht möglich ist, da eines der beiden dem anderen stets die Sicht versperren wird.

Wir haben also Glück gehabt und können garantieren, dass jedes Haus seinen Strandkorb auf einem eigenen Strandgrundstück aufstellen kann. Insbesondere kann es dann aber nur höchstens so viele Strandkörbe wie Strandgrundstücke geben, also höchstens $4n - 4$.
Da zu jedem Haus genau ein Strandkorb gehört, haben wir damit auch gezeigt, dass es höchstens $4n - 4$ Häuser auf der Insel geben kann.
Das Schöne an diesem Beweis ist auch, dass er sich (bis auf die Geschichte ...) fast wörtlich auf den dreidimensionalen Fall überträgt: Hier ordnen wir jeder Wohneinheit einen Platz an der Außenseite der Raumstation zu, davon gibt es aber nur $n^3 - (n-2)^3 = 6n^2 - 12n + 8$.

Bemerkung: Wir haben also eine Abbildung von der Menge der Häuser in die Menge der Strandgrundstücke konstruiert. Dann haben wir gezeigt, dass diese *injektiv* ist, also verschiedene Häuser auch auf verschiedene Grundstücke abbildet, und daraus gefolgert, dass die eine Menge mindestens so groß sein muss wie die andere.

Eine Variante des Arguments ist die folgende: Wir ordnen jedem Grundstück im Inneren der Insel nach der folgenden Vorschrift ein unbebautes Grundstück zu: Ist das Grundstück selbst unbebaut, ordnen wir es sich selbst zu. Ist es bebaut, ordnen wir ihm ein von dort aus sichtbares Strandgrundstück zu, welches dann wiederum nicht bebaut sein kann. Wie oben überlegt man sich leicht, dass auch diese Abbildung injektiv ist und es somit mindestens $(n-2)^2$ unbebaute, also höchstens $n^2-(n-2)^2 = 4n-4$ bebaute Grundstücke gibt.