
Beispiellösungen zu Blatt 117 (Klasse 5–8)

Aufgabe 1

Wir beginnen mit einer beliebigen zweistelligen Zahl, die nicht durch 11 teilbar ist. Dazu bilden wir die ebenfalls zweistellige Zahl, die die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, und ziehen die kleinere der beiden von der größeren ab. Diesen Schritt wiederholen wir. Erhalten wir eine einstellige Zahl als Ergebnis, wird diese durch eine 0 zu einer zweistelligen Zahl ergänzt.

Zum Beispiel bilden wir aus der 45 die Zahl 54 und nach einem Schritt die Differenz $54 - 45 = 9 = 09$. Im nächsten Schritt bilden wir daraus die Zahl 90 und erhalten als Ergebnis nach zwei Schritten die Differenz $90 - 9 = 81$.

- Zeige, dass das Ergebnis nach zwei Schritten immer ungerade ist.
- Zeige, dass das Ergebnis nach 117 Schritten identisch mit dem Ergebnis nach 2017 Schritten ist.

Lösung:

Die erste wichtige Beobachtung ist, dass das Ergebnis bereits nach einem Schritt (und damit auch nach beliebig vielen Schritten) stets durch 9 teilbar ist. Das folgt aus der bekannten Regel, dass eine Zahl genau den gleichen Rest beim Teilen durch 9 lässt wie ihre Quersumme. Die beiden Zahlen, die voneinander abgezogen werden, bestehen aus den gleichen Ziffern, haben damit auch die gleiche Quersumme, ihre Differenz ist also durch 9 teilbar.

Andererseits ist das Ergebnis nach dem ersten Schritt natürlich stets kleiner als 99 und größer als 0, denn sonst müssten beide Ziffern der Zahl identisch sein, dann wäre die Zahl aber durch 11 teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

Nach dem 1. Schritt ist das Ergebnis also eine der Zahlen 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 und 90. Da auch diese Zahlen allesamt nicht durch 11 teilbar sind, können wir das gleiche Argument wie oben anwenden und folgern, dass nach beliebig vielen Schritten das Ergebnis stets eine dieser Zahlen ist.

Um Teil a) zu zeigen, kann man nun also einfach für jede dieser 10 Zahlen den Schritt anwenden und überprüfen, ob das Ergebnis ungerade ist.

Wenn man etwas geschickter vorgehen will oder verstehen will, „warum“ das funktioniert, kann man sich Folgendes überlegen: Das Ergebnis nach einem weiteren Schritt wäre genau dann gerade, wenn beide voneinander abzuziehenden Zahlen den gleichen Rest beim Teilen durch 2 lassen. Das ist aber bekanntlich genau dann der Fall, wenn die jeweils letzten Ziffern den gleichen Rest beim Teilen durch 2 lassen. Diese beiden Ziffern sind aber gerade die beiden Ziffern der ursprünglichen Zahl. In der Liste dieser 10 Zahlen taucht nun keine Zahl auf, bei der beide Ziffern den gleichen Rest lassen. Warum ist das so? Ihre Summe, also die Quersumme der Zahl, ist

immer 9 und damit ungerade, also müssen die beiden Ziffern verschiedene Reste beim Teilen durch 2 lassen!

Damit ist Teil a) gezeigt und wir können unsere Liste der möglichen Ergebnisse ab dem 2. Schritt einschränken auf 09, 27, 45, 63 und 81.

Nun rechnet man aber einfach nach, dass wir von 09 in einem Schritt zur 81, im nächsten Schritt zur 63, dann zur 27, dann zur 45 und dann wieder zur 09 kommen. Genauso kommt man, wenn man bei einer anderen der 5 Zahlen startet, nach 5 Schritten wieder bei der Ausgangszahl an. Die Folge wird also bei beliebigem Startwert ab dem 2. Schritt periodisch mit Periodenlänge 5. Da $2017 - 117 = 1900$ durch 5 teilbar ist, sind die beiden Ergebnisse nach 117 und nach 2017 Schritten damit gleich.

Aufgabe 2

Im Postsystem von Postilien gibt es vier verschiedene Arten von Briefmarken, die rot, gelb, grün und blau sind. Einen kleinen Brief kann man dabei mit drei roten und einer gelben Briefmarke oder mit einer grünen Briefmarke frankieren. Um einen mittelgroßen Brief zu verschicken, braucht man eine rote und eine blaue Briefmarke oder eine gelbe und eine grüne Briefmarke, und ein großer Brief lässt sich sowohl mit einer blauen und zwei gelben Briefmarken als auch mit zwei grünen und drei roten Briefmarken frankieren. Für durchreisende Touristen bietet das Postamt der Hauptstadt Postiliens ein Briefmarkenset, das aus einem Exemplar jeder Briefmarke besteht, für 200 postilische Gulden zum Verkauf an.

Wie teuer ist es jeweils, die einzelnen Briefe zu verschicken?

Hinweis: Die natürliche Ehrlichkeit und Aufrichtigkeit der postilischen Postbeamten verbietet es ihnen, jeglichen finanziellen Vorteil aus ihren Geschäften zu ziehen; du darfst also annehmen, dass in keinem der Fälle ein Brief überfrankiert werden muss oder zusätzliche Gebühren für Touristen erhoben werden.

Lösung:

Wir wollen zunächst versuchen, den Wert jeder Briefmarke in den Wert roter Briefmarken umzurechnen. Wir könnten statt rot auch jede beliebige andere Farbe wählen, jedoch scheint es so, als ob rote Briefmarken den geringsten Wert hätten und wir deshalb auf schönere Verhältnisse hoffen könnten. Bezeichnen wir den Wert einer roten Briefmarke in postilischen Gulden mit r , den Wert der gelben Briefmarke mit g_e , den Wert der grünen Briefmarke mit g_r und den Wert der blauen Briefmarke mit b . Wenn man mehrere Möglichkeiten hat, den gleichen Brief zu frankieren, so sollte die Summe der Werte der verwendeten Briefmarken jeweils gleich hoch sein. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} 3r + g_e &= g_r, \\ r + b &= g_e + g_r, \\ b + 2g_e &= 2g_r + 3r, \\ r + g_e + g_r + b &= 200. \end{aligned}$$

Setzen wir die erste Gleichung in die zweite Gleichung ein und subtrahieren r auf beiden Seiten, erhalten wir:

$$b = g_e + 3r + g_e - r = 2g_e + 2r.$$

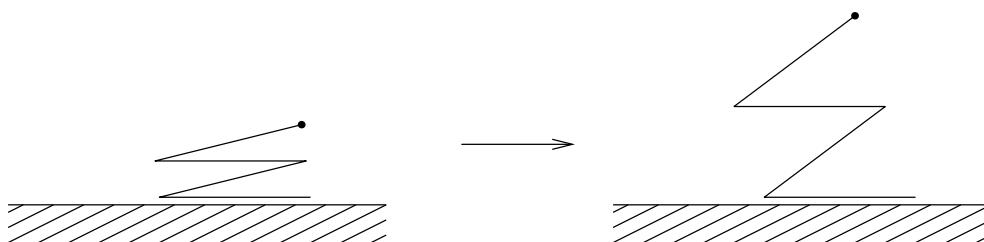
Nun haben wir sowohl den Wert der blauen als auch den der grünen Briefmarke in Abhängigkeit der Werte der anderen beiden Briefmarken angegeben. Setzen wir dies zusammen mit der ersten Gleichung in die dritte Gleichung ein, sehen wir:

$$2g_e + 2r + 2g_e = 6r + 2g_e + 3r.$$

Bringen wir die beiden Variablen auf unterschiedliche Seiten der Gleichung, bekommen wir $2g_e = 7r$ bzw. $g_e = 3,5r$. Es folgt $g_r = 6,5r$ und $b = 9r$. Setzen wir dies in die letzte Gleichung mit dem Souvenirset ein, erhalten wir $200 = r + 3,5r + 6,5r + 9r = 20r$ bzw. $r = 10$. Somit hat die gelbe Briefmarke einen Wert von 35 postilischen Gulden, die grüne Briefmarke einen Wert von 65 postilischen Gulden und die blaue Briefmarke einen Wert von 90 postilischen Gulden. Das Verschicken eines kleinen Briefes kostet also 65 Gulden, einen mittleren Brief kann man für $10 + 90 = 100$ Gulden verschicken und für einen großen Brief muss man $90 + 2 \cdot 35 = 160$ postilische Gulden bezahlen.

Aufgabe 3

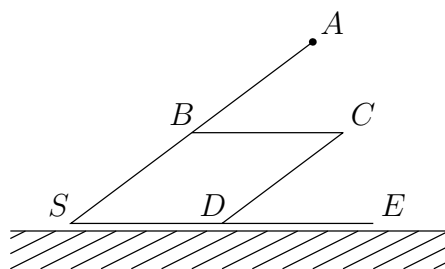
Andreas hat ein Faltblatt in seinen Händen, das im zusammengelegten Zustand im Zick-Zack-Verfahren dreimal gefaltet ist. Er will es in besonderer Weise aufklappen: Das letzte Teilblatt soll fest auf dem Tisch liegen bleiben; das zweite Teilblatt soll immer zur Tischfläche, also zum vierten und letzten Teilblatt parallel sein und das erste und dritte Teilblatt sollen ebenfalls parallel zueinander sein – vergleiche die Abbildung, auf der die Situation von der vorderen Seite betrachtet wird:



Andreas fasst das Faltblatt mit seinem linken Daumen an der vorderen unteren Ecke des ersten Teilblattes an. Welche Bahn beschreibt der Daumen, wenn er auf die beschriebene Art das Faltblatt komplett auffaltet?

Lösung:

Wir betrachten die Situation weiterhin von der (Vorder-)Seite und beschriften die Eckpunkte der Faltblattkanten mit den Buchstaben A bis E . Der Daumen befindet sich immer am Punkt A . Außerdem verlängern wir die Strecken AB über B und ED über D hinaus bis zum Schnittpunkt S .



Da die Teilblätter desfaltblattes abwechselnd parallel zueinander sein sollen, ergibt sich ein Parallelogramm $SDCB$. Weil die Seiten desfaltblattes gleich lang sind, ist es sogar eine Raute. Insbesondere aber ist die Strecke SD immer genauso lang wie die Strecke BC , unabhängig vom Grad der Auffaltung desfaltblattes. Es ist also S immer am gleichen Ort zu finden.

Ebenso ist die Strecke SB immer genauso lang wie DC , und damit ist auch die Strecke SA immer gleich lang. Das bedeutet in der Summe nichts anderes, als dass beim Auffalten der Daumen eine Halbkreisbahn um den Punkt S mit Radius $|SA| = |DC| + |BA| = 2 \cdot |AB|$ beschreibt.

Aufgabe 4

Im Meer wurde eine Insel aufgeschüttet, um dort eine Feriensiedlung zu errichten. Die bebaubare Grundfläche besteht aus einem Quadrat von 6×6 Grundstücken.

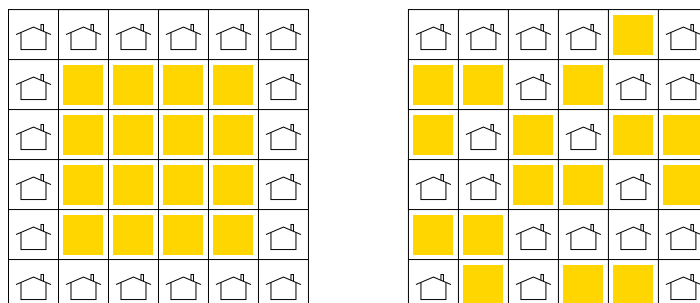
Natürlich möchte jeder, der auf der Insel seinen Urlaub verbringt, einen Blick zum Meer haben. Von jedem Ferienhaus muss also in eine der vier Richtungen der Blick frei und nicht durch andere Häuser verdeckt sein.

Wie viele Häuser können unter diesen Bedingungen auf der Insel gebaut werden?

Lösung:

Eine einfache Möglichkeit, die gewünschte Bedingung zu erfüllen, ist es, nur die Randgrundstücke der Insel zu bebauen. Mit dieser Methode können 20 Häuser errichtet werden (6 Häuser auf jeder der 4 Seiten, aber die 4 Ecken werden doppelt gezählt). Tatsächlich können in dieser Konstellation auch keine weiteren Häuser gebaut werden, da der Seeblick von einem beliebigen Punkt im Inneren der Insel durch die vorhandene Bebauung verdeckt ist. Es besteht also Grund zur Hoffnung, dass 20 die gesuchte Maximalzahl ist.

Doch wie beweist man das? Immerhin ist die oben beschriebene Bebauung nicht die einzige Möglichkeit, diese Zahl zu erreichen, wie das folgende Bild zeigt:



Eine erste Idee, die viele von euch hatten, ist es, ein Haus im Inneren der Insel entlang der Sichtachse von diesem Haus zum Meer an den Strand zu schieben. Dies würde man so lange wiederholen, bis alle Häuser am Strand stehen und es damit höchstens 20 Häuser geben kann. Um diese Idee in einen ordentlichen Beweis umzuformen, muss man aber bei der logischen Struktur etwas aufpassen (Was ist die „Startlösung“? Wie wird „geschoben“? Warum wird durch das Schieben niemandem „die Sicht versperrt“?). Die eleganteste Version scheint die folgende zu sein:

Wir gehen von einer beliebigen Bebauung der Insel aus, die die Bedingung erfüllt. Dann wollen wir zeigen, dass es höchstens 20 Ferienhäuser gibt. Dazu können wir uns vorstellen, dass zu jedem Haus ein Strandkorb auf einem der 20 Strandgrundstücke aufgestellt wird. Zu einem Haus, welches bereits am Strand, also auf dem Rand oder einer Ecke der Insel steht, soll der Strandkorb natürlich direkt auf dem gleichen Grundstück aufgestellt werden, auf dem auch das Haus steht. Für die Häuser im Inneren der Insel wollen wir den Platz für den Strandkorb zumindest so auswählen, dass dieses Strandstück vom Haus aus sichtbar ist. So hat man stets alles unter Kontrolle.

Da wir annehmen, dass die Bedingung erfüllt ist, gibt es tatsächlich zu jedem Haus ein solches von dort aus sichtbares Strandgrundstück. Natürlich kann es auch mehrere geben, in diesem Fall suchen wir uns unter den möglichen Grundstücken ein beliebiges aus.

Unpraktisch wäre es nun allerdings, wenn die Bewohner zweier verschiedener Häuser auf demselben Grundstück ihren Strandkorb aufstellen wollen, da kann es schnell mal zum Streit kommen. Doch kann dieser Fall überhaupt eintreten? Da auf jedem Grundstück nur höchstens ein Haus steht, müsste dann eines der beiden betroffenen Häuser im Inneren der Insel stehen. Nach Voraussetzung sieht man von dort aus aber in Richtung des Strandkorbs das Meer, insbesondere kann auf dem Grundstück mit den Strandkörben kein weiteres Haus stehen. Dann müssen aber beide betroffenen Häuser im Inselinneren stehen und beide müssen auf derselben Linie wie die Strandkörbe stehen und jeweils freie Sicht auf diese haben, was natürlich nicht möglich ist, da eines der beiden dem anderen stets die Sicht versperren wird.

Wir haben also Glück gehabt und können garantieren, dass jedes Haus seinen Strandkorb auf einem eigenen Strandgrundstück aufstellen kann. Insbesondere kann es dann aber nur höchstens so viele Strandkörbe wie Strandgrundstücke geben, also höchstens 20.

Da zu jedem Haus genau ein Strandkorb gehört, haben wir damit auch gezeigt, dass es höchstens 20 Häuser auf der Insel geben kann.

Eine Variante des Arguments ist die folgende: Wir ordnen jedem Grundstück im Inneren der Insel nach der folgenden Vorschrift ein unbebautes Grundstück zu: Ist das Grundstück selbst unbebaut, ordnen wir es sich selbst zu. Ist es bebaut, ordnen wir ihm ein von dort aus sichtbares Strandgrundstück zu, welches dann wiederum nicht bebaut sein kann. Wie oben überlegt man sich leicht, dass auch diese Abbildung verschiedenen Grundstücken im Inneren ebenso verschiedene Strandgrundstücke zuordnet, also gibt es mindestens $4^2 = 16$ unbebaute Grundstücke und damit höchstens $6^2 - 4^2 = 20$ bebaute.