

Beispiellösungen zu Blatt 12

Aufgabe 1

Bei einem Spiel mit drei Spielern muss der Verlierer einer Runde die Punktzahlen der anderen beiden verdoppeln und verliert dabei selbst die entsprechende Zahl an Punkten. Nach drei derartigen Runden hat jeder der drei Spieler genau einmal verloren und jeder hat genau 24 Punkte.

Wieviele Punkte hatten die Spieler zu Beginn?

Lösung:

Wir bezeichnen den Spieler, der die erste Runde verloren hat, mit A , den Verlierer der zweiten Runde mit B und den der dritten Runde mit C . Diese Zuordnung ist eindeutig, da jeder Spieler genau eine Runde verloren hat. Nach der dritten Runde hat jeder Spieler genau 24 Punkte:

Spieler	A	B	C
Punkte nach der dritten Runde	24	24	24

Spieler C hat die dritte Runde verloren, also wurden die Punktzahlen von A und B verdoppelt. Folglich hatten diese beiden Spieler vor der dritten Runde jeweils 12 Punkte, jeder hat 12 Punkte dazubekommen. Diese 24 Punkte wurden C abgezogen, also hatte C vor der dritten Runde 48 Punkte:

Spieler	A	B	C
Punkte nach der zweiten Runde	12	12	48
Punkte nach der dritten Runde	24	24	24

In der zweiten Runde hatte B verloren, also wurden die Punktzahlen von A und C verdoppelt. Spieler A hatte also vorher 6 Punkte und Spieler C hatte 24 Punkte. Die $6 + 24 = 30$ Punkte wurden Spieler B in der zweiten Runde abgezogen, also hatte er vorher $12 + 30 = 42$ Punkte:

Spieler	A	B	C
Punkte nach der ersten Runde	6	42	24
Punkte nach der zweiten Runde	12	12	48
Punkte nach der dritten Runde	24	24	24

Spieler A hat die erste Runde verloren, folglich hatte B vor der ersten Runde 21 und C hatte 12 Punkte. Spieler A wurden $12 + 21 = 33$ Punkte abgezogen, er hatte also vorher $6 + 33 = 39$ Punkte:

Spieler	A	B	C
Punkte zu Beginn:	39	21	12
Punkte nach der ersten Runde	6	42	24
Punkte nach der zweiten Runde	12	12	48
Punkte nach der dritten Runde	24	24	24

Antwort: Der Spieler, der die erste Runde verlor, hatte zu Beginn 39 Punkte, der Verlierer der zweiten Runde hatte zu Beginn 21 Punkte und der Verlierer der dritten Runde hatte 12 Punkte. Bei dieser Ausgangskonstellation und diesem Spielverlauf haben nach drei Runden alle 24 Punkte.

Aufgabe 2

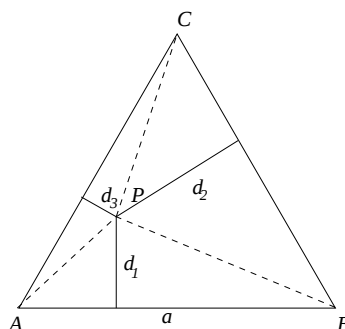
Peter hat einen Schrebergarten von der Form eines gleichseitigen Dreiecks. Statt durch Zäune ist der Garten durch Obststräucher begrenzt. Entlang der ersten Seite wachsen Himbeersträucher, entlang der zweiten Brombeeren und die dritte Seite ist mit Johannisbeeren bepflanzt. An einem sonnigen Sommernachmittag möchte er sich in seinem Garten in seinen Liegestuhl legen und faulenzen. Zwischendurch will er sich auf dem kürzesten Weg ein paar Himbeeren holen und diese im Liegestuhl essen. Wenn er die Himbeeren verpeist hat, möchte er sich genauso Brombeeren holen und später holt er sich noch Johannisbeeren. Da es recht heiß ist, möchte sich Peter aber insgesamt möglichst wenig bewegen, sprich einen möglichst kurzen Weg zurücklegen. Peter überlegt sich also vorher, wo er seinen Liegestuhl aufstellen muss. Kannst du ihm helfen? Wo muss Peter seinen Liegestuhl aufstellen, damit seine Wandertour möglichst kurz wird?

Der Weg von der Gartentür zum Liegestuhl und der Rückweg am Schluss nach Hause zählen nicht mit!

Lösung:

Es ist völlig egal, wo Peter seinen Liegestuhl aufstellt.

Betrachten wir eine Skizze des Gartens. Die Eckpunkte seien A , B und C und die Länge der Seiten sei a .



P bezeichne den Platz, an dem Peter seinen Liegestuhl aufstellen könnte. Wir berechnen nun die Strecke, die Peter zurücklegen müsste.

Offensichtlich ist Peters Weg zu einem der Zäune am kürzesten, wenn er direkt senkrecht darauf zu läuft. Bezeichnen wir also die Abstände von P zu den Seiten mit d_1 , d_2 und d_3 (vgl. Zeichnung).

Peters Gesamtweg ist dann $2d_1 + 2d_2 + 2d_3$.

Der große Trick:

Wir zerlegen das Dreieck ABC in die kleinen Dreiecke ABP , BCP und CAP .

Die Flächeninhalte dieser kleinen Dreiecke sind dann $F_1 = \frac{1}{2}d_1a$, $F_2 = \frac{1}{2}d_2a$ bzw. $F_3 = \frac{1}{2}d_3a$. Zusammen ergeben sie aber gerade das Dreieck ABC , d. h.

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ha,$$

wobei h die Höhe des Dreiecks ABC bezeichne. Und daraus folgt:

$$\frac{1}{2}d_1a + \frac{1}{2}d_2a + \frac{1}{2}d_3a = \frac{1}{2}ha,$$

also

$$d_1 + d_2 + d_3 = h.$$

Somit beträgt der Weg, den Peter zurücklegen muss, immer $2h$.

Aufgabe 3

Wir haben ausreichend viele Perlen in drei Farben zur Verfügung, aus denen wir Armbänder herstellen wollen. Für ein solches Armband fädeln wir insgesamt fünf Perlen auf einen Faden und verbinden die Enden so, dass der Knoten nicht auffällt. Ein so entstandenes Armband hat natürlich keine spezielle Vorder- oder Rückseite und auch keinen Anfang und kein Ende. Wieviele verschiedene Armbänder können wir auf diese Weise herstellen?

Lösung:

Aus Perlen in drei Farben kann man genau 39 verschiedene Armbänder à 5 Perlen fertigen.

Einfarbige Armbänder

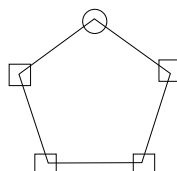
$(5,0,0)$ ¹

Da es Perlen in drei Farben gibt, kann man genau drei unterschiedliche jeweils einfarbige Armbänder herstellen. **3**

Armbänder in zwei Farben

$(4,1,0)$

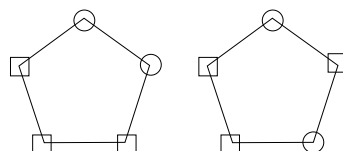
Bei vier gleichfarbigen Perlen und einer andersfarbigen Perle ist es egal, an welcher Stelle im „Kreis“ die andersfarbige Perle ist. Für die erste Farbe hat man drei Möglichkeiten, und für jede dieser Wahlen kann man sich aus den zwei verbleibenden Farben noch die andersfarbige Perle aussuchen. **6**



¹Dieses Tripel gibt jeweils den Typ der Farbverteilung an, hier: 5 Kugeln von einer ersten Farbe, 0 von einer zweiten und 0 von der letzten.

(3,2,0)

Nimmt man drei Perlen einer ersten und zwei Perlen einer zweiten Farbe, so kann man sich aussuchen, ob man die beiden Perlen der zweiten Farbe nebeneinander aufreiht oder ob man sie trennt (im zweiten Fall befinden sich zwischen ihnen auf der einen Seite zwei Perlen und auf der anderen Seite eine Perle der ersten Farbe). Auch hier gibt es wieder 6 Möglichkeiten, die Farbkombination zu wählen. $2 \cdot 6 = 12$

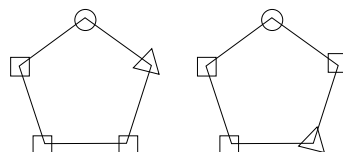


Armbänder in allen drei Farben

(3,1,1)

Nimmt man drei Perlen einer Farbe und jeweils eine Perle der anderen beiden Farben, so hat man genau wie im letzten Fall die beiden Möglichkeiten, die beiden einzelnen Perlen zu trennen oder sie zusammen zu lassen. Hier kann man sich aber nur die Farbe der drei gleichfarbigen Perlen aussuchen.

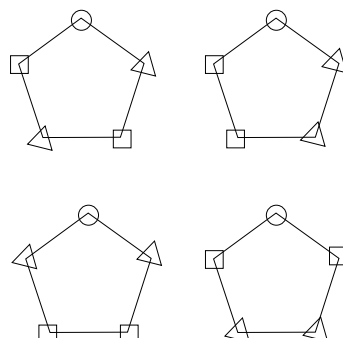
$$2 \cdot 3 = 6$$



(2,2,1)

Nimmt man zwei Perlen einer ersten, zwei Perlen einer zweiten und eine Perle einer dritten Farbe, so gibt es wieder nur drei Möglichkeiten für die Farbwahl, nämlich bei der Farbe der einzelnen Perle.

Hier hat man jeweils die vier Möglichkeiten, beide Paare gleichfarbiger Perlen, keines der beiden, nur das erste oder nur das zweite zu trennen. $3 \cdot 4 = 12$



Das Ergebnis

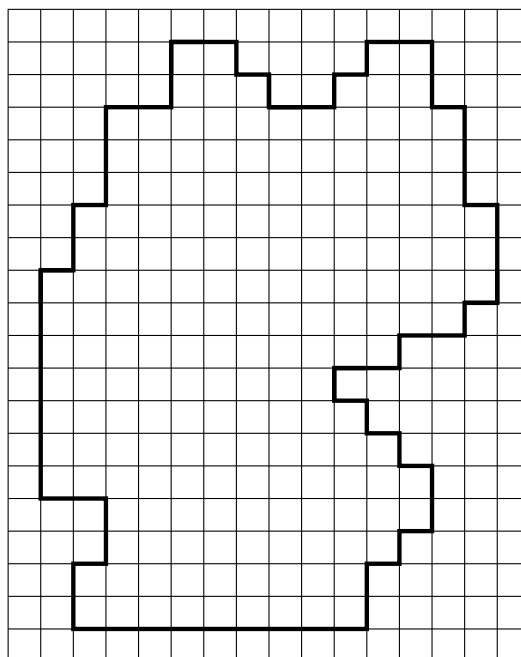
Addieren liefert $3 + 6 + 12 + 6 + 12 = 39$ Möglichkeiten.

Aufgabe 4

Unten stehendes Bild zeigt eine (stark vereinfachte) Karte von Deutschland. Es gibt immer wieder Streit darüber, wo denn eigentlich der „Mittelpunkt“ von Deutschland sei.

Wohin würdest du ihn legen? Begründe deine Entscheidung und erkläre, wie man diesen Mittelpunkt konstruieren kann!

Zusatz: Nimm eine „echte“ Deutschlandkarte und finde den Ort, der sich entsprechend deiner Konstruktion am ehesten *Mittelpunkt von Deutschland* nennen dürfte!



Lösung:

Wie die Aufgabenstellung schon vermuten lässt, gibt es hier nicht **die** richtige Lösung, sondern viele Möglichkeiten. Einige davon sind die folgenden:

1. Eine erste Idee könnte sein, die maximale Nord-Süd- und Ost-West-Ausdehnung zu bestimmen und dann diese Abstände jeweils zu halbieren. Das ist eine recht „grobe“ Methode in dem Sinne, dass sie nur wenige Informationen der Karte nutzt. Jede Karte mit denselben Ausdehnungen liefert denselben Mittelpunkt. Deutschland ohne Bayern würde zum Beispiel dasselbe Ergebnis liefern.

Aber im Ergebnis erhält man einen dem Auge als Mittelpunkt gefälligen, wenn auch anscheinend etwas zu weit östlich gelegenen Punkt mit den Koordinaten (8; 10) (wenn der Ursprung des Koordinatensystems links unten liegt).

Auf einer echten Deutschlandkarte liegt dies in der Nähe von Meiningen in Thüringen.

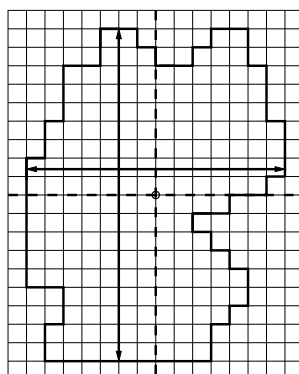


Abbildung 1: Erste Methode

2. Als Abwandlung dieser Methode kann man nun noch berücksichtigen, dass bei zwei Karten mit der gleichen Nord-Süd-Ausdehnung, jedoch verschiedener Verteilungen der Flächen in dieser Richtung (zum Beispiel könnte die eine nach unten hin, die andere nach oben hin schmaler werden) auch die Mittelpunkte verschieden sein sollten. Vom Mittelpunkt aus gesehen sollte in beiden Richtungen gleich viel Fläche sein (nicht Abstand, wie im ersten Versuch). Man kann also die Gesamtzahl der Kästchen der Karte zählen – das sind 186 Stück – und dann, ebenfalls durch Zählen, genau die senkrechte und waagerechte Linie bestimmen, die die Fläche halbiert. Das folgende Bild zeigt das Resultat:

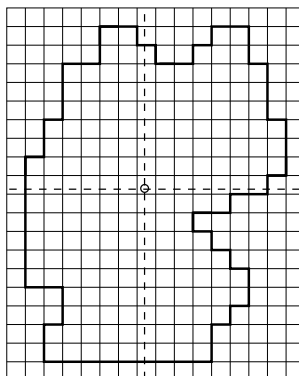


Abbildung 2: Zweite Methode

Im Ergebnis der ersten Methode schien der Punkt zu weit im Osten zu liegen. Ursache hierfür war, dass diese Methode die geringere Landmasse im Osten nicht beachtete. Dies wurde hier augenscheinlich besser berücksichtigt. Der erhaltene Punkt (7,41; 10,23) liegt bei Kaltennordheim in der Nähe der thüringisch-hessischen Grenze.

3. Man kann auch ein wenig physikalisch an die Fragestellung herangehen

und versuchen, den Schwerpunkt der Landmassenverteilung zu bestimmen. Der Schwerpunkt ist dabei bildlich der Punkt, an dem man die Karte, als Pappscheibe gedacht, so aufhängen kann, dass diese waagrecht hängt. Diesen zu bestimmen hat man wiederum mehrere Möglichkeiten:

- (a) Man tut genau das, was eben beschrieben wurde: Aus Pappe ausschneiden, und versuchen, an einem Punkt waagrecht aufzuhängen.
- (b) Man schneidet die Karte aus Pappe aus und hängt die Scheibe an irgendeinem (Rand-)Punkt auf. Dann liegt der Schwerpunkt irgendwo direkt unterhalb des Aufhängepunktes. Zeichnet man also auf der Karte diese Gerade nach unten und wiederholt die Prozedur mit einem zweiten Aufhängepunkt, so schneiden sich die entstehenden Geraden im Schwerpunkt.
- (c) Man rechnet: Hierbei denkt man sich formal an jedem kleinen Quadrat eine Masse m (die kleinen Quadrate haben ja gleichgroße Flächen, daher die gleiche Masse). Im Unterschied zur Methode Nummer 2 gehen bei der Berechnung des Schwerpunktes jetzt nicht nur die Größe der links und rechts gelegenen Fläche, sondern auch deren Abstand vom Schwerpunkt ein – weit weg gelegene Flächenstücke zählen mehr. Sind (x_i, y_i) mit $1 \leq i \leq N$ die Positionen der Massen (Mittelpunkte der Quadrate), so ist der Schwerpunkt gerade der Mittelwert dieser Massenpunkte:

$$S = \left(\frac{1}{N \cdot m} (m \cdot x_1 + \dots + m \cdot x_N), \frac{1}{N \cdot m} (m \cdot y_1 + \dots + m \cdot y_N) \right) \\ = \left(\frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N), \frac{1}{N} (y_1 + y_2 + \dots + y_N) \right)$$

Für eine allgemeine Verteilung von N Massenpunkten (x_i, y_i) verschiedener Massen m_i mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ ist der Schwerpunkt übrigens:

$$S = \left(\frac{1}{M} (m_1 \cdot x_1 + \dots + m_N \cdot x_N), \frac{1}{M} (m_1 \cdot y_1 + \dots + m_N \cdot y_N) \right).$$

All diese Methoden sollten einen etwa bei (7,53; 9,84) gelegenen Schwerpunkt ergeben.

Der Punkt liegt etwa an der gleichen Ost-West-Koordinate, aber etwas südlicher als der bei der zweiten Methode bestimmte Punkt. Der Grund hierfür wurde schon verraten: Die waagerechte Flächenhalbierungsgerade liegt näher am oberen Rand der Karte als am südlichen – für den Schwerpunkt fallen aber weit weg gelegene Teile mehr ins Gewicht.

Mehr zum Thema *Mittelpunkt von Deutschland* findet man zum Beispiel unter <http://www.mittelpunkt-deutschland.de>. Der dort genannte Ort befindet

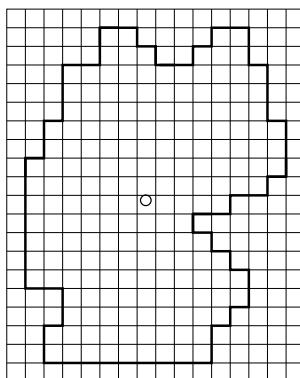


Abbildung 3: Dritte Methode

sich in Thüringen ein wenig südlich von Mühlhausen. Die Methode, die man bei dessen Bestimmung verwandt hat, ist unserer ersten sehr ähnlich – man hat einfach die am weitesten nördlich, südlich, östlich und westlich gelegenen Punkte der Karte bestimmt und diese dann durch zwei Geraden verbunden. Deren Schnittpunkt war das Ergebnis.

Da unsere Karte sehr stilisiert ist, wäre eine Bestimmung solcher Extrempunkte gar nicht möglich.

Ob der Ort bei Mühlhausen nun wirklich Mittelpunkt Deutschlands ist, bleibt aber wohl Geschmackssache.