Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg–August–Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1

Die Drillinge Anton, Bert und Christoph bekommen von ihrer Oma zum Geburtstag gemeinsam 100 DM. Da sie dies unter sich nicht gerecht aufteilen können, verspricht die Oma, ihnen am nächsten Tag eine weitere Mark, am darauffolgenden zwei weitere und an jedem weiteren Tag immer eine Mark mehr als am Vortag zu schenken; so lange, bis die drei den Gesamtbetrag unter sich aufteilen können. Wieviele Mark bekommt jeder der Enkel schließlich?

Lösung:

Die Drillinge können den Gesamtbetrag niemals unter sich aufteilen.
An den ersten Tagen ist die geschenkte Summe nicht durch 3 teilbar, wie folgende Tabelle zeigt:

Tag t	Summe $S(t)$	Rest bei Division durch 3
0	100	1
1	101	2
2	103	1
3	106	1
4	110	2
5	115	1
6	121	1
7	128	2
8	136	1

Betrachtet man die Tabelle genauer, so liegt die Vermutung nahe, dass sich die Reste in Dreiergruppen wiederholen.
Hierzu berechnen wir, um wieviel sich die Summe am $(n+3)$-ten Tag von der Summe am n-ten Tag unterscheidet:

$$\begin{aligned} S(n+3) &= 100 + 1 + 2 + \cdots + (n+3) \\ &= 100 + 1 + 2 + \cdots + n + \big((n+1) + (n+2) + (n+3)\big) \\ &= S(n) + (3n+6) \\ &= S(n) + 3(n+2) \end{aligned}$$

Da $3(n+2)$ durch 3 teilbar ist, lässt $S(n+3)$ den gleichen Rest wie $S(n)$ bei Division durch 3. Daher treten nur Reste auf, die in unserer ersten Dreiergruppe vorkommen, also die Reste 1 und 2.
Demnach ist der Betrag nie unter den Dreien aufteilbar.

Interessant ist nun, wie man die entstandene prekäre Situation auslegen soll (Juristen würden sich freuen!). Manuel Hohmann drückt sich diplomatisch

aus: „Wieviel die Enkel bekommen, hängt ganz vom Testament der Oma ab – das ursprüngliche Geburtstagsgeschenk werden sie nämlich nie erhalten, da die Zahlungsbedingung niemals eintritt.“ Das macht den Eindruck, als müsse die Oma zu Lebzeiten gar nichts zahlen. Wadim Djatschenko ist da ganz anderer Meinung: „Das heißt, dass [. . .] die Oma für den Rest ihres Lebens nach gegebener Vorschrift ihren Enkeln Geld bringen muss. Im ersten Jahr muss sie 66.895 DM bezahlen.“
Auch wir können das Problem nicht abschließend lösen; fest steht nur, dass die Enkel das Geld auf diese Art nie unter sich aufteilen werden können. Die Frage ist, ob sie zwischenzeitlich Teilbeträge aufteilen dürfen. Wenn ja, wird die Oma schnell arm, wenn dies aber nicht der Fall ist, braucht die Oma eigentlich auch nichts zu zahlen (es ist nicht geklärt, ob sie das Geld zwischenzeitlich einem Treuhänder übergibt), und man könnte böswillig vermuten, dass die Oma eine Betrügerin ist, weil sie sich falscher Versprechungen bedient, um sich die Gunst der Kinder zu erschleichen.

Aufgabe 2

Tante Erna sitzt mit Onkel Heinz beim Kaffeekränzchen. Erna hat vor sich eine Tasse Kaffee stehen, natürlich schwarz, ohne Milch und Zucker. Onkel Heinz trinkt lieber ein Glas Vollmilch, wegen seines Blutdrucks.
Aus seinem fast vollen Glas nimmt er ein Löffelchen Milch, schüttet es in Tante Ernas Glas und rührt kräftig um. Die verärgerte Tante nimmt ihm den Löffel ab und schüttet ihrerseits einen Löffel voll mit dem Gemisch aus ihrer Tasse in Onkel Heinz’ Glas.
Jetzt haben also beide wieder die gleiche Menge Getränk wie am Anfang in ihren Gefäßen. Aber: Hat Onkel Heinz nun mehr Kaffee in seinem Glas als Tante Erna Milch in ihrer Tasse oder ist es umgekehrt?
Zusatz: Wenn nun Onkel Heinz und Tante Emma dieselbe Prozedur noch einmal wiederholen, also ein Löffelchen aus dem Glas in die Tasse, umrühren und danach umgekehrt, wie lautet dann die Antwort?

Lösung:

Bei dieser Aufgabe kommt es darauf an, von den gegebenen Aussagen die wirklich wichtigen herauszufiltern. Und die einzig wirklich wichtige Aussage ist, dass, nachdem jeder einmal umgeschüttet hat, in jedem Trinkgefäß jeweils die gleiche Menge Flüssigkeit ist wie zu Beginn. Wir vergessen also vorläufig den gesamten Umschüttvorgang und interessieren uns nur für den Anfangs- und den Endzustand.
Onkel Heinz hat dann weniger Milch in seinem Glas, stattdessen eine bestimmte Menge Kaffee. Es fehlt in seinem Glas also gegenüber dem Ausgangszustand eine gewisse Menge Milch und da die Gesamtmenge an Flüssigkeit im Glas gleich geblieben ist, muss die fehlende Menge Milch genauso groß sein wie die neu hinzugekommene Menge Kaffee. Und wo ist diese Milch geblieben? In dem Gemisch, welches Tante Erna in ihrer Tasse hat! Dafür fehlt

in Tante Ernas Tasse diese Menge an Kaffee.
Tante Erna hat also genauso viel Milch in ihrer Tasse, wie Onkel Heinz Kaffee in seinem Glas hat. Und das ist unabhängig davon, wie oft diese Prozedur wiederholt wird und ob die Tasse größer ist als das Glas oder nicht, denn diese Größen haben wir bei unseren Überlegungen gar nicht verwendet (vorausgesetzt, die beiden verschütten nichts).
Was vielleicht irritiert, ist, dass Onkel Heinz zu Beginn einen ganzen Löffel Milch in Tante Ernas Tasse schüttet, Tante Erna aber nur einen Löffel Gemisch, also etwas weniger Kaffee als das Volumen eines Löffels. Dadurch könnte man denken, es ist mehr Milch bei Tante Erna als Kaffee bei Onkel Heinz. Aber dabei vergisst man, dass der Rest des Löffels nicht leer bleibt, sondern Milch enthält. Diese Milch wird also wieder aus der Kaffeetasse in das Milchglas zurückgeschüttet und effektiv gar nicht bewegt. Und die Menge ist genau die, die Tante Erna weniger Kaffee zurückschüttet, als sie von Onkel Heinz Milch erhalten hat, denn das Gesamtvolumen des Löffels bleibt konstant.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC habe die Länge R, der Radius des Inkreises habe die Länge r.
Beweise, dass dann stets die Beziehung

$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2(R + r)$$

gilt.

Lösung:

In der zu zeigenden Gleichung kommen der Umkreisradius und der Inkreisradius des Dreiecks ABC vor. Aus der Schule sollte bekannt sein, dass jedes Dreieck einen Umkreis und einen Inkreis hat und der Mittelpunkt des Umkreises gerade der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten, der Mittelpunkt des Inkreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.
Selten aber wird in der Schule gelehrt, wie man die Radien dieser Kreise berechnen kann. Hierzu betrachte man die Abbildung1.

Im Fall des hier vorliegenden rechtwinkligen Dreiecks ist die Berechnung des Umkreisradius besonders einfach: Der *Satz des Thales* besagt, dass in einem Kreis jeder Umfangswinkel über einem Durchmesser ein rechter Winkel ist. Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt: Ist ein Winkel über einem Durchmesser ein rechter, dann ist er ein Umfangswinkel, liegt also auf dem Kreis über dem Durchmesser.
In unserer Situation gilt also nach der Umkehrung des Satzes des Thales, dass der Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt. Deswegen

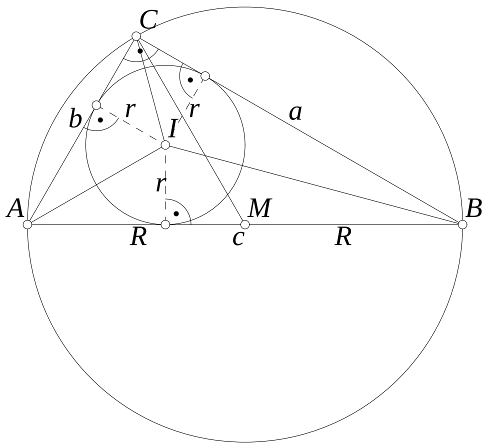

Abbildung 1: Zu Aufgabe 3

ist der Umkreisradius R gerade halb so groß wie $\overline{AB}$:

$$R = \frac{1}{2}c\,. \tag{1}$$

Für den Inkreisradius r kann man folgende Methode anwenden: Ist I der Inkreismittelpunkt, so zerlegen die Strecken $\overline{IA}$, $\overline{IB}$ und $\overline{IC}$ das Dreieck ABC in drei Teildreiecke. Diese haben die Flächeninhalte $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ und $\frac{1}{2}cr$. Zusammen addieren sich diese Flächen zur Gesamtfläche von ABC, die für unser rechtwinkliges Dreieck gleich $\frac{1}{2}ab$ ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \quad \text{bzw.} \\ r &= \frac{ab}{a+b+c}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Damit sind Um- und Inkreisradius bestimmt. Nun kann man ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2(R+r) &= c + \frac{2ab}{a+b+c} \\ &= \frac{(a+b)c + c^2 + 2ab}{a+b+c} \\ &= \frac{(a+b)c + a^2 + b^2 + 2ab}{a+b+c} && \text{(nach Satz des Pythagoras)} \\ &= \frac{(a+b)c + (a+b)^2}{a+b+c} && \text{(nach binomischer Formel)} \\ &= \frac{(a+b)(a+b+c)}{a+b+c} && \text{((}a+b\text{) ausklammern)} \\ &= a+b\,. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 4

Peter Pfiffig will sich einen Wecker bauen und dazu eine Balkenwaage (die in Ruheposition im Gleichgewicht ist) und einige Kerzen benutzen. Die Kerzen will er auf den Waagschalen positionieren und sie gleichzeitig beim Zubettgehen um 22.00 Uhr anzünden, worauf diese mit konstanter Geschwindigkeit abbrennen und Masse verlieren. Die Kerzen sind dabei so beschaffen, dass sie in einer Stunde um genau einen Zentimeter abbrennen. An der Waage ist ein Kontakt so angebracht, dass immer bei Gleichgewicht eine Glocke läutet, die Peter wecken soll. Wie muss Peter die Kerzen verteilen, wieviele müssen es sein und welche Länge müssen sie haben, damit er einmal um 6.00 Uhr und zur Sicherheit nochmal um 6.20 Uhr und um 6.40 Uhr geweckt wird?

Hinweis: Die Kerzen dürfen dabei auch verschieden lang sein!

Lösung:

Zunächst einmal: Vielleicht hätten wir, um deutlich zu machen, dass wir keine Pyromanen sind, die Aufgabe lieber so stellen sollen, dass auf den Waagschalen Trichter angebracht sind, aus denen ein Sandvorrat gleichmäßig auf den Boden rieselt. Aber damit bekäme die ganze Apparatur wohl ein ziemlich unrealistisches Gewicht, das ist auch nicht ideal. Also: Die Kerzen dienen nur als Modell (dass sie rückstandsfrei abbrennen, ist in der Tat fraglich), und von eigenen Versuchen zu Hause wird dringend abgeraten.

Eine Lösung des Problems ist die folgende: Um 22 Uhr stelle man auf die linke Seite der Waage eine Kerze von 8 2/3 cm Länge und zwei Kerzen von 8 1/6 cm Länge; auf die rechte Seite kommen zwei Kerzen mit je 8 1/2 cm Länge. Dann ergibt sich folgendes Bild im Laufe der Nacht:

Uhrzeit	Länge der Kerzen links		Länge der Kerzen rechts		
	einzeln	insgesamt	insgesamt	einzeln	
22.00	$8\frac{1}{6}, 8\frac{1}{6}, 8\frac{2}{3}$	25	17	$8\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$	
4.00	$2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{6}, 2\frac{2}{3}$	7	5	$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	
6.00	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$	1	1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	Läuten!
6.10	$0, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	
6.20	$0, 0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	Läuten!
6.30	$0, 0, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0, 0	
6.40	0, 0, 0	0	0	0, 0	(Dauer-) Läuten!

Die Weckzeiten werden also erreicht. Und dazwischen wird auch nicht geweckt, denn von 22.00 Uhr bis 6.10 Uhr brennt auf der linken Seite eine Kerze mehr als auf der rechten, daher neigt sich die Waage beständig nach rechts, so dass es nur zu genau einem Zeitpunkt zum Gleichgewicht kommen kann. Zwischen 6.10 Uhr und 6.30 Uhr ist es umgekehrt, da brennt auf der

rechten Seite eine Kerze mehr als auf der linken, also neigt sich die Waage beständig nach links, und danach neigt sie sich wieder nach rechts, da nur noch links eine Kerze brennt.
Nun kann man sich fragen, ob man eventuell mit noch weniger Kerzenmaterial auskommt. Das ist zu verneinen, wie man sich klarmachen kann, wenn man die Aufgabe rückwärts angeht:

- Bis um 6.40 Uhr muss mindestens eine Kerze gebrannt haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass sie auf der linken Seite gestanden hat. (Um 22 Uhr muss sie also eine Länge von 8 2/3 cm gehabt haben.)

- Um 6.20 Uhr muss Gleichgewicht herrschen. Also muss dann auf der rechten Seite 1/3 cm Kerze vorhanden sein, um die erstgenannte Kerze auszugleichen (theoretisch eventuell auch mehr, da wir hier ja noch nicht untersuchen, ob sich so tatsächlich eine Lösung ergibt). Und da die Waage kurz vor 6.40 Uhr nach links geneigt ist (dort brennt die entscheidende Kerze) und in der Zeit zwischen 6.20 Uhr und 6.40 Uhr kein Gleichgewicht herrschen darf, muss sie sich um 6.20 Uhr (vom Gleichgewicht aus) nach links neigen. Das bedeutet, dass auf der rechten Seite mindestens eine Kerze mehr stehen muss als auf der linken, also mindestens zwei.

- Um 6.00 Uhr ist auf der rechten Seite nach den vorherigen Überlegungen (mindestens) $1/3\,\mathrm{cm} + 2 \cdot 1/3\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{cm}$ Kerze, auf der linken 2/3 cm. Also muss, um Gleichgewicht zu erhalten, auf der linken Seite noch 1/3 cm Kerze zusätzlich vorhanden sein. Und mit einem entsprechenden Argument wie eben sieht man ein, dass nun auf der linken Seite mindestens drei Kerzen stehen müssen. Demnach sind um 22 Uhr auf der linken Seite (mindestens) $1\,\mathrm{cm} + 3 \cdot 8\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm}$ Kerze, auf der rechten $1\,\mathrm{cm} + 2 \cdot 8\,\mathrm{cm} = 17\,\mathrm{cm}$. Und genau das hatten wir oben.

Die Lösung ist aber nicht ganz eindeutig: Fängt man mit 8 1/12, 8 3/12 und 8 2/3 zu 8 5/12 und 8 7/12 Zentimetern an, so ist dies auch eine Lösung, die sich nur darin von der ersten unterscheidet, dass sich die Waage zwischen 6.05 und 6.15 Uhr sowie 6.25 und 6.35 Uhr nicht bewegt, weil dann auf beiden Seiten gleich viele Kerzen brennen.
Wenn die Waage empfindlich gegen große Ausschläge ist, kann man auf die rechte Seite noch eine weitere Kerze mit z. B. 7 5/6 cm Länge stellen. Dann beträgt der Gewichtsunterschied der beiden Seiten maximal das Gewicht von einem Sechstel Zentimeter Kerze.