

Beispiellösungen zu Blatt 14

Aufgabe 1

Laura bastelt gerne außergewöhnliche Mikadospiele. So ein Mikadospiel besteht aus 37 Stäbchen, die jedoch nicht alle dieselbe Länge haben müssen, insbesondere können die Längen auch sehr klein oder sehr, sehr groß sein. (Außerdem kann jedes Spiel anders aussehen!) Laura behauptet nun: „Egal wie ich die Stäbe zurechtschneide, in jedem Spiel kann ich drei finden, die ich zu einem Dreieck zusammenlegen kann.“

Kannst du Lauras Aussage bestätigen, oder irrt sie sich da?

Lösung:

Laura irrt sich. Es kann durchaus passieren, dass keine drei Stäbe zu einem Dreieck zusammenlegbar sind.

Wenn man drei Stäbe zu einem Dreieck zusammenlegen kann, dann erfüllen die Längen der Stäbe gewisse Bedingungen (die sogenannten Dreiecksungleichungen). Nämlich: Kein Stab darf länger sein als die beiden anderen Stäbe zusammen. Denn machen wir je ein Ende der kürzeren Stäbe an den Enden des längsten fest, so muss man ja die freien Enden der kürzeren Stäbe noch zusammenheften können.

Nun können wir allerdings Stäbe basteln, die nicht die von Laura genannte Eigenschaft besitzen:

Wir beginnen mit zwei beliebigen Stäben. Den dritten Stab machen wir ein bisschen länger, als die ersten zwei zusammen lang sind. Den vierten Stab machen wir wiederum länger, als die zwei größten der bisherigen drei Stäbe zusammen lang sind, und damit ist der vierte länger als die Gesamtlänge zweier beliebiger der ersten drei. Das setzen wir nun fort. Der fünfte Stab wird wieder länger gemacht, als die zwei größten der ersten vier zusammen lang sind, der sechste wieder länger, ...

Auf die Weise können also nie drei Stäbe zu einem Dreieck zusammengelegt werden.

Bemerkungen: Wenn wir ausgeartete Dreiecke (also Dreiecke, deren Flächeninhalt null ist, oder anders gesagt Dreiecke, bei denen ein Eckpunkt auf derjenigen Seite liegt, die die anderen zwei Eckpunkte verbindet) nicht zulassen, so reicht es sogar aus, den jeweils nächsten Stab genau so lang zu machen, wie die größten zwei der übrigen Stäbe zusammen lang sind.

Praktisch gesehen wird aber der von uns konstruierte Fall nie eintreten. Beginnt man nämlich mit zwei Stäben der Länge 1 cm, so hat der nächste die Länge 2 cm, der vierte die Länge 3 cm, dann 5 cm, 8 cm, 13 cm, 21 cm, ...

Der 37. Stab hätte dann eine Länge von 241,57817 km. Also viel zu lang!

Wenn man genau überlegt, wird man feststellen, dass unser Kriterium (der

längste Stab muss länger sein als die Gesamtlänge zweier anderer) auch notwendig dafür ist, dass man keine Dreiecke konstruieren kann. Wenn man es also genau nimmt, hat Laura, praktisch gesehen, doch Recht.

Aufgabe 2

Herr Schluckspecht ist wieder auf Kneipentour. Nach einem feucht-fröhlichen Beginn im Kummerstübchen macht er sich (mit konstanter Geschwindigkeit) auf den Weg zum Dorfkrug. Zur gleichen Zeit bricht Herr Suffkopp vom Dorfkrug in Richtung Kummerstübchen auf. Als sie sich treffen, sagt Herr Schluckspecht (wahrheitsgemäß): „Ich bin 200 m weiter gegangen als du!“

Es folgt eine engagierte Diskussion . . .

Danach gehen sie verstimmt weiter, wegen leichter Blessuren aber jeweils mit halber Geschwindigkeit. Herr Schluckspecht braucht noch 8 min bis zum Dorfkrug, Herr Suffkopp noch 18 min bis zum Kummerstübchen.

Wie weit sind die beiden Kneipen voneinander entfernt?

Lösung:

Die beiden Kneipen sind 1000 Meter voneinander entfernt.

Die einzige physikalische Formel, die wir hier brauchen, ist

$$v \cdot t = s.$$

Sie besagt: Wenn man sich eine Zeit t [Minuten] lang mit einer Geschwindigkeit v [Meter/Minute] vorwärts bewegt, so legt man eine Strecke von s [Metern] zurück.

Herr Schluckspecht legt mit seiner Geschwindigkeit v_1 in den ersten t Minuten bis zum Treffen 200 m mehr zurück als Herr Suffkopp, der mit einer Geschwindigkeit v_2 läuft:

$$v_1 t = v_2 t + 200. \quad (1)$$

Bis zu ihrem Treffpunkt ist jeder genau den Teil der Strecke gelaufen, den der andere nicht gelaufen ist, daher haben sie zusammen genau einmal die Entfernung s zwischen den beiden Kneipen zurückgelegt:

$$v_1 t + v_2 t = s. \quad (2)$$

Diese Gleichungen addieren wir und formen sie äquivalent um:

$$\begin{aligned} & 2v_1 t + v_2 t = v_2 t + s + 200 && | - v_2 t \\ \Leftrightarrow & 2v_1 t = s + 200 && | : 2 \\ \Leftrightarrow & v_1 t = \frac{s + 200}{2} && (3) \end{aligned}$$

(Der Doppelpfeil „ \Leftrightarrow “ ist der sogenannte Äquivalenzpfeil. Er ist eine Kurzschreibweise für: *Die vorherige Zeile (oder das, was direkt vor dem Pfeil*

steht) sagt genau dasselbe aus wie die nächste Zeile (oder eben das, was direkt nach dem Pfeil steht), oder wie der Mathematiker sich ausdrückt: Die beiden Aussagen sind äquivalent.)

Dies setzen wir in die nach v_2t umgestellte Gleichung (1) ein:

$$v_2t \stackrel{(1)}{=} v_1t - 200 \stackrel{(3)}{=} \frac{s + 200}{2} - 200 = \frac{s - 200}{2}. \quad (4)$$

(Auf das Gleichheitszeichen schreiben wir manchmal auch die Nummer der angewandten Gleichung.)

Nach dem Treffen der beiden Kampfhähne braucht Herr Schluckspecht für den restlichen Weg $s - v_1t \stackrel{(2)}{=} v_2t$ mit halber Geschwindigkeit $\frac{v_1}{2}$ noch 8 min:

$$\frac{v_1}{2} \cdot 8 = v_2t, \quad (5)$$

Herr Suffkopp hingegen braucht für $s - v_2t \stackrel{(2)}{=} v_1t$ Meter in seiner halben Geschwindigkeit $\frac{v_2}{2}$ noch 18 min:

$$\frac{v_2}{2} \cdot 18 = v_1t. \quad (6)$$

Jetzt formen wir (5) und (6) jeweils nach $\frac{v_1}{v_2}$ um:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{4} \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{t}$$

und erhalten durch Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} & \frac{t}{4} = \frac{9}{t} && | \cdot 4t \\ \Leftrightarrow & t^2 = 36. \end{aligned}$$

Von den beiden Lösungen $t = 6$ oder $t = -6$ der quadratischen Gleichung ist als Zeitangabe nur die positive möglich, die beiden Freunde begegnen sich also nach

$$t = 6 \quad (7)$$

Minuten.

Ersetzen wir in Gleichung (5) die rechte Seite noch durch (4):

$$\frac{v_1}{2} \cdot 8 = \frac{s - 200}{2},$$

so haben wir zusammen mit (3) dann zwei Gleichungen, in denen nur noch die zwei unbekanntenen Variablen s und v_1 vorkommen (t ist ja bereits bekannt).

Da beide Seiten von (3) positiv sind (dies ist ja gerade der Weg, für den Herr Suffkopp 18 Minuten braucht, also kann er nicht null oder gar negativ sein), können wir die letzte Gleichung durch (3) teilen:

$$\frac{\frac{v_1}{2} \cdot 8}{v_1 t} = \frac{\frac{s-200}{2}}{\frac{s+200}{2}};$$

gekürzt und $t = 6$ nach (7) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{6} = \frac{s-200}{s+200} && | \cdot (s+200) \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{3}s + \frac{2}{3} \cdot 200 = s - 200 && | -s - \left(\frac{2}{3} \cdot 200\right) \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{3}s = -\frac{5}{3} \cdot 200 && | \cdot (-3) \\ \Leftrightarrow & s = \underline{\underline{5 \cdot 200 = 1000}}. \end{aligned}$$

Da wir zwischendurch auch mal eine Wurzel gezogen haben (keine Äquivalenzumformung!), machen wir noch eine Probe, bevor wir $s = 1000$ als gesichertes Ergebnis ansehen. Dazu müssen wir aber noch v_1 und v_2 berechnen.

Aus Formel (3) erhalten wir: $v_1 = \frac{1200}{2 \cdot 6} = 100$, und Formel (4) sagt: $v_2 = \frac{800}{12} = \frac{200}{3}$.

Nun setzen wir alles, was wir bestimmt haben ($t = 6$, $s = 1000$, $v_1 = 100$ und $v_2 = \frac{200}{3}$), in die vier Ausgangsgleichungen (1), (2), (5) und (6) ein, und hoffen, dass wir nur wahre Aussagen erhalten:

$$\begin{aligned} v_1 t &= 100 \cdot 6 = 600 = 400 + 200 = \frac{200}{3} \cdot 6 + 200 = v_2 t + 200 \\ v_1 t + v_2 t &= 100 \cdot 6 + \frac{200}{3} \cdot 6 = 600 + 400 = 1000 = s \\ \frac{v_1}{2} \cdot 8 &= 50 \cdot 8 = 400 = \frac{200}{3} \cdot 6 = v_2 t \\ \frac{v_2}{2} \cdot 18 &= \frac{100}{3} \cdot 18 = 600 = 100 \cdot 6 = v_1 t \end{aligned}$$

Juchu!

Die Entfernung der beiden Kneipen beträgt also 1000 Meter.

Aufgabe 3

Für die ersten natürlichen Zahlen gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= -1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 \\ 1 &= +1^2 \\ 2 &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 \\ 3 &= -1^2 + 2^2 \\ 4 &= -1^2 - 2^2 + 3^2. \end{aligned}$$

Lassen sich alle natürlichen Zahlen in der Form $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm m^2$ darstellen?

Lösung:

Es lassen sich alle natürlichen Zahlen in der gegebenen Form darstellen. Wir müssen Summen und Differenzen von Quadraten aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen betrachten.

Wählen wir eine beliebige Zahl n und bilden die Differenz

$$n^2 - (n+1)^2 = n^2 - n^2 - 2n - 1 = -2n - 1,$$

so hängt diese nur noch linear von n ab, aber nicht mehr quadratisch. Bilden wir nun die Differenz zweier aufeinanderfolgender derartiger Differenzen:

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1)^2 - ((n+2)^2 - (n+3)^2) \\ &= -2n - 1 - (-2(n+2) - 1) \\ &= -2n - 1 + 2n + 4 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Also hat jede natürliche Zahl n die schöne Eigenschaft $n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$.

Bekanntlich können wir jede natürliche Zahl p in der Form $p = r + v \cdot 4$ darstellen, wobei $v \in \mathbb{N}$ und $r = 0, 1, 2$ oder 3 ist, also $p = r + (4 + \dots + 4)$. Dies benutzen wir, um p als Summe $\pm 1^2 \pm \dots \pm m^2$ zu schreiben.

Aus der Beispielliste können wir r entnehmen (für $r = 0$ nehmen wir einfach eine leere Summe), und wie wir die Summe $(4 + \dots + 4)$ geeignet dazuaddieren können, haben wir oben gesehen. Damit erhalten wir für p folgende Zerlegung:

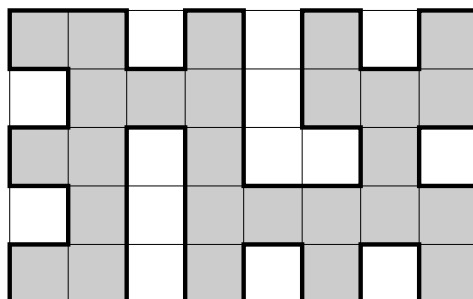
$$\begin{aligned} \text{für } r = 0: p &= (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + \dots \\ &\quad + ((4v-3)^2 - (4v-2)^2 - (4v-1)^2 + (4v)^2) \\ \text{für } r = 1: p &= 1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2) + \dots \\ &\quad + ((4v-2)^2 - (4v-1)^2 - (4v)^2 + (4v+1)^2) \\ \text{für } r = 2: p &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) \dots \\ &\quad + ((4v+1)^2 - (4v+2)^2 - (4v+3)^2 + (4v+4)^2) \\ \text{für } r = 3: p &= -1^2 + 2^2 + (3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2) + \dots \\ &\quad + ((4v-1)^2 - (4v)^2 - (4v+1)^2 + (4v+2)^2) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wie schon in den ersten Beispielen ersichtlich ist die Darstellung nicht eindeutig (z.B. $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$)

Aufgabe 4

Wähle dir zwei beliebige natürliche Zahlen m und n . Zeichne dann auf kariertes Papier ein Rechteck, das genau m Kästchen lang und n Kästchen breit ist.

Jetzt versuche einen *geschlossenen* Weg entlang der Kästchenkanten *ohne Überschneidungen* zu finden, der jeden Gitterpunkt im Inneren und auf dem Rand des Rechtecks genau einmal berührt. In der Abbildung ist ein Beispielweg für ein Rechteck mit $m = 8$ und $n = 5$ dargestellt.



Wenn du das für verschiedene Werte m und n mehrfach probiert hast, wirst du vielleicht feststellen, dass es manchmal mehrere Möglichkeiten gibt, einen solchen Weg zu finden, manchmal aber auch gar keine. Untersuche, wie das mit der Wahl von m und n zusammenhängt, und versuche, deine Vermutung zu beweisen.

Falls es für festes m und n einen solchen Streckenzug gibt, dann schließt dieser einen Teil des Rechteckes ein (da der Streckenzug ja geschlossen ist). Untersuche, wie sich die Anzahl der Kästchen im Inneren ändert, wenn man bei ein und demselben Rechteck verschiedene Streckenzüge betrachtet. Kannst du deine Vermutung begründen?

Lösung:

Wie in der Aufgabenstellung schon beschrieben, findet man für die meisten Paare (m,n) natürlicher Zahlen in einem $m \times n$ -Rechteck einen gesuchten Streckenzug. Beginnt man mit kleinen m und n , so schlägt die Suche nach einem solchen Streckenzug nur bei den Paaren $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(2,6)$ usw. fehl. Dies legt folgende Vermutung nahe:

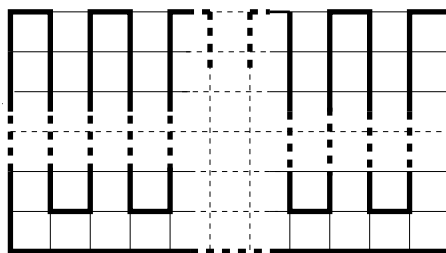
Es gibt in einem $m \times n$ -Rechteck genau dann einen geschlossenen, überschneidungsfreien Weg entlang der Gitterkanten, der jeden Gitterpunkt genau einmal berührt, wenn wenigstens eine der Zahlen m oder n ungerade ist.

Wie beweist man das?

Nun, dazu müssen zwei Dinge gezeigt werden: zum einen, dass es einen erlaubten Streckenzug gibt, falls m oder n ungerade ist, zum anderen, dass es keinen solchen gibt, wenn beide Zahlen gerade sind.

Ersteres kann man (einfach) durch die Angabe eines gesuchten Streckenzuges tun. Hierzu sei zum Beispiel m ungerade (andernfalls muss n ungerade sein und die Skizze muss nur um 90° gedreht werden). Dann kann man folgenden, alle Bedingungen erfüllenden Streckenzug in ein $m \times n$ -Rechteck zeichnen:

Der zweite Teil des Beweises ist etwas schwieriger (ganz allgemein ist es meist



komplizierter zu beweisen, dass etwas nicht geht, als zu zeigen, dass etwas geht).

Seien also m und n gerade. Dann gibt es $n + 1$ waagerechte und $m + 1$ senkrechte Gitterlinien im Rechteck und deshalb $(n + 1)(m + 1)$ Gitterpunkte, die ein erlaubter Streckenzug alle genau einmal treffen müsste. Da ein solcher Streckenzug geschlossen ist, müsste der Streckenzug also auch aus genau $(n + 1)(m + 1)$ verschiedenen Einheitsstrecken bestehen. Nun sind aber m und n gerade, also $m + 1$ und $n + 1$ beide ungerade. Die Länge eines erlaubten Streckenzuges wäre also ungerade.

Das kann aber nicht sein!

Warum? Weil jeder geschlossene Streckenzug entlang der Gitterkanten eine gerade Länge haben muss.

Betrachtet man nämlich den Streckenzug von einem beliebigen Punkt des Streckenzuges aus und verfolgt ihn Schritt für Schritt, so verläuft er l -mal nach links, r -mal nach rechts, o -mal nach oben und u -mal nach unten. Letztlich soll der Streckenzug, da er geschlossen ist, aber wieder beim Ausgangspunkt ankommen. Deswegen muss er genauso oft nach rechts wie nach links gehen, also ist $l = r$, und genauso oft nach oben wie nach unten, also ist $o = u$. Damit ist die Länge des Streckenzuges $r + l + o + u = 2 \cdot r + 2 \cdot o = 2 \cdot (r + o)$ gerade.

Damit kann es also im Fall, dass sowohl m als auch n gerade sind, keinen erlaubten Streckenzug geben.

Ist nun aber m oder n ungerade, so gibt es, wie oben gesehen, wenigstens einen, aber meist noch viel mehr erlaubte Streckenzüge. In oben gezeichnetem Beispiel schließt dieser gerade eine Fläche von $mn - \frac{m-1}{2}(n-1) = \frac{(m+1)(n+1)}{2} - 1$ (Kästchen) ein. Ist diese Fläche für einen anderen Streckenzug größer oder kleiner?

Um das herauszufinden, zerlegen wir die eingeschlossene Fläche eines erlaubten Streckenzuges schrittweise in die einzelnen Einheitsquadrate. In einem Schritt starten wir dabei bei einem Randpunkt unseres Streckenzuges und zeichnen eine Einheitsstrecke entlang der Gitterlinien in das Innere der eingeschlossenen Fläche hinein. Da jeder Gitterpunkt auf dem Streckenzug liegt, landen wir dabei wieder auf dem Rand des Streckenzuges und haben somit die Fläche in zwei Teile geteilt. Die Gesamtzahl der Randpunkte der beiden Teile ist dabei um zwei größer als die Zahl der Randpunkte des Ausgangsteiles, da die beiden Endpunkte der zum Zerteilen gezogenen Einheitsstrecke

Randpunkte beider neu entstandenen Teile sind.

Dieses Zerteilen kann man offenbar so lange fortführen, wie es „innere Kanten“ in einem der Flächenteile gibt. Die Anzahl dieser inneren Kanten nimmt aber in jedem Schritt um eins ab. Irgendwann, sagen wir nach N Schritten, gibt es also keine inneren Kanten mehr, das heißt es gibt nur noch Einheitsquadrate. Da bei jedem Teilungsschritt ein Flächenteil mehr entsteht, hat man also schließlich $N+1$ Einheitsquadrate mit insgesamt $(m+1)(n+1)+2N$ Randpunkten. Es gilt also

$$\begin{aligned} 4(N+1) &= (m+1)(n+1) + 2N \quad \text{bzw.} \\ N &= \frac{(m+1)(n+1)}{2} - 2. \end{aligned}$$

Die vom Streckenzug eingeschlossene Fläche ist also $N+1 = \frac{(m+1)(n+1)}{2} - 1$, und dies ist unabhängig von der Form des Streckenzugs.

Vielleicht kennt der eine oder andere folgenden hübschen *Satz von Pick* über die Fläche von Gitterpunktpolygonen:

Hat man einen geschlossenen Streckenzug (nicht unbedingt entlang der Gitterlinien), dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind, und liegen genau r Gitterpunkte auf dem Rand des Streckenzuges und genau i Gitterpunkte im Inneren der eingeschlossenen Fläche, so hat die eingeschlossene Fläche A die Größe $A = i + \frac{r}{2} - 1$.

Mit diesem Satz wäre obige Aussage auch schnell zu beweisen, denn für einen erlaubten Streckenzug ist $r = (m+1)(n+1)$ und $i = 0$.