

Beispiellösungen zu Blatt 15

Aufgabe 1

In der Klasse 8a sind mehr Mädchen als Jungen, in der Klasse 8b ist es umgekehrt. Ein Mädchen und ein Junge wechseln von der 8a in die 8b. Zeige, dass sich dadurch der Anteil der Mädchen in beiden Klassen erhöht!

Lösung:

Vor dem Wechsel seien in der Klasse 8a m_a Mädchen und j_a Jungen, in der 8b m_b Mädchen und j_b Jungen, wobei $m_a > j_a \geq 1$ (es wechseln ja ein Mädchen und ein Junge aus der 8a) und $0 \leq m_b < j_b$.

Der Mädchenanteil in der 8a ist also $\frac{m_a}{m_a+j_a}$ und der in der 8b ist $\frac{m_b}{m_b+j_b}$. Nun verlassen ein Junge und ein Mädchen die 8a und besuchen fortan die 8b. Damit verändert sich der Mädchenanteil in der 8a zu $\frac{m_a-1}{(m_a-1)+(j_a-1)} = \frac{m_a-1}{m_a+j_a-2}$ und in der 8b zu $\frac{m_b+1}{(m_b+1)+(j_b+1)} = \frac{m_b+1}{m_b+j_b+2}$. Wir wollen zeigen, dass sich durch den Wechsel der Mädchenanteil in beiden Klassen erhöht, also

$$(a) \frac{m_a}{m_a+j_a} < \frac{m_a-1}{m_a+j_a-2} \quad \text{und} \quad (b) \frac{m_b}{m_b+j_b} < \frac{m_b+1}{m_b+j_b+2}.$$

Zu (a): Wegen $m_a > j_a \geq 1$ gilt: $m_a + j_a, m_a + j_a - 2 > 0$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{m_a}{m_a+j_a} &< \frac{m_a-1}{m_a+j_a-2} \\ \Leftrightarrow m_a(m_a+j_a-2) &< (m_a+j_a)(m_a-1) \\ \Leftrightarrow m_a^2 + m_a j_a - 2m_a &< m_a^2 - m_a + m_a j_a - j_a \\ \Leftrightarrow -m_a &< -j_a \\ \Leftrightarrow m_a &> j_a \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung nach Voraussetzung wahr ist, ist auch Ungleichung (a) wahr.

Zu (b): Wegen $0 \leq m_b < j_b$ gilt: $m_b + j_b, m_b + j_b + 2 > 0$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{m_b}{m_b+j_b} &< \frac{m_b+1}{m_b+j_b+2} \\ \Leftrightarrow m_b(m_b+j_b+2) &< (m_b+j_b)(m_b+1) \\ \Leftrightarrow m_b^2 + m_b j_b + 2m_b &< m_b^2 + m_b + m_b j_b + j_b \\ \Leftrightarrow m_b &< j_b \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung nach Voraussetzung wahr ist, ist auch Ungleichung (b) wahr.

Aufgabe 2

Jemand addiert alle sechsstelligen Zahlen, die keine der Ziffern 0, 1, 4, 6, 7 oder 9 enthalten. Was ist das Ergebnis?

Lösung:

Entsprechend der Aufgabenstellung darf man zum Bilden der sechsstelligen Zahlen genau die vier Ziffern 2, 3, 5 und 8 verwenden. Wieviele dieser Zahlen haben eine 2 als Einerziffer?

Für eine solche Zahl bleiben noch vier Möglichkeiten für die Zehnerziffer, vier für die Hunderterziffer, ... und vier für die Hunderttausenderziffer. Das sind insgesamt $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ Möglichkeiten, also gibt es 4^5 Zahlen, deren Einerziffer eine 2 ist.

Natürlich gibt es genauso viele Zahlen, nämlich 4^5 , deren Einerziffer eine 3 ist, eine 5 ist bzw. eine 8 ist.

Es ändert sich auch nichts an dieser Anzahl, wenn man nach den Zahlen fragt, die eine gewisse Ziffer an der Zehner-, Hunderter- oder irgendeiner anderen festen Stelle haben – stets hat man für die übrigen fünf Stellen jeweils vier Ziffern zur Auswahl.

Deswegen ergibt sich beim Addieren aller entsprechend der Aufgabe gebildeten Zahlen:

$$\begin{aligned}
 & (4^5 \cdot 2 + 4^5 \cdot 3 + 4^5 \cdot 5 + 4^5 \cdot 8) + \\
 & \quad (4^5 \cdot 20 + \dots + 4^5 \cdot 80) + \\
 & \quad \quad \quad \dots + \\
 & \quad (4^5 \cdot 2 \cdot 10^5 + \dots + 4^5 \cdot 8 \cdot 10^5) = 4^5 \cdot (2 + 3 + 5 + 8) \cdot \\
 & \quad \quad \quad (1 + 10 + \dots + 100000) \\
 & = 4^5 \cdot 18 \cdot 111111 \\
 & = 2047997952.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Drei Freunde wollen das Körbwerfen beim Basketball üben.

Dazu sagt der erste: „Ich wette, dass wenigstens einer von euch beim ersten Versuch keinen Korb wirft.“

„Ich wette“, antwortet der zweite, „dass, wenn du beim ersten Mal triffst, du deine Wette gewinnen wirst.“

Der dritte sagt daraufhin: „Und ich wette ganz einfach, dass wir alle beim ersten Wurf treffen.“

Sie fangen an zu üben. Ist es möglich, dass der zweite und der dritte Freund beide ihre Wette gewonnen oder verloren haben?

Lösung:

Es ist nicht möglich, dass der zweite und der dritte Freund beide ihre Wette gewonnen oder verloren haben.

Begründung: Angenommen, der dritte Freund gewinnt seine Wette. Das geht nur, wenn alle drei beim ersten Wurf getroffen haben. Damit hat allerdings der erste Freund offensichtlich seine Wette verloren. Er hat aber einen Korb geworfen, daher ist die Wette des zweiten Freundes auch verloren. Also können der zweite und dritte Freund nicht beide gewinnen.

Nun ist zu prüfen, ob sie denn beide verlieren können. Dazu sei angenommen, dass der zweite Freund seine Wette verliert. Das geht nur (*), wenn der erste Freund trifft und seine Wette verliert. Dann müssen aber auch die beiden anderen getroffen haben, mithin muss der dritte Freund seine Wette gewinnen – sie können also auch nicht beide verlieren.

(*) Da es wohl nicht allen Korrespondenzzirkel-Teilnehmern bekannt ist, erläutern wir kurz, wie in der Logik mit Sätzen vom Typ: „Wenn A , dann B “ bzw. (was äquivalent ist): „Aus A folgt B “ umzugehen ist: Wenn A richtig ist, haben wir keine Probleme. Dann hängt es allein von B ab, ob die Aussage richtig ist: Ist B falsch, ist es auch die Aussage, ist B richtig, stimmt die Aussage ebenfalls. Wenn nun A falsch ist, ist die Aussage zumindest nicht falsch, denn über diesen Fall wurde ja gar nichts behauptet. Da man aber davon ausgeht, dass eine Aussage entweder falsch oder wahr sein muss (Satz vom ausgeschlossenen Dritten, als lateinischer Terminus: „tertium non datur“), ist die Aussage dann als wahr zu werten (und zwar unabhängig von der Richtigkeit von B !).

In einem anderen Umfeld ist dies vielleicht einsichtiger: Angenommen, die Eltern versprechen: „Wenn du eine Eins in Mathe bekommst, gehen wir am Wochenende ins Theater/Kino“. Bekommt man dann keine Eins, so kann man den Eltern nicht vorwerfen, dass sie ihr Versprechen gebrochen haben, egal, ob sie einen dann vielleicht doch aus Gnade mit ins Theater/Kino nehmen oder nicht. Meckern kann man nur dann, wenn man die Eins bekommen hat und sich die Eltern dennoch drücken.

Aufgabe 4

Ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 9 cm wird in kleinere Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in cm) zerlegt.

Bestimme eine Zerlegung mit möglichst vielen Rechtecken, von denen keine zwei deckungsgleich sind.

Lösung:

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 45 cm^2 . Die Zahl 45 soll in eine Summe von möglichst vielen natürlichen Summanden zerlegt werden. (Alle Angaben von Seitenlängen und Flächeninhalten beziehen sich auf die Einheiten cm und cm^2 .)

Bilden wir die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$, so erhalten wir gerade den Wert 45. Und tatsächlich können wir das große Rechteck in neun nicht deckungsgleiche Rechtecke mit diesen Flächeninhalten und ganzzahligen Seitenlängen zerlegen:

9	
1	8
2	7
3	6
4	5

Die Flächeninhalte 4 und 6 dürfen aber beispielsweise zweimal auftreten, da diese Zahlen verschiedene Produktzerlegungen $4 = 1 \cdot 4$ und $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 1 \cdot 6$ und $6 = 2 \cdot 3$ besitzen. Es gibt deshalb jeweils zwei nicht deckungsgleiche Rechtecke mit den Flächeninhalten 4 und 6. Die Flächeninhalte 1, 2, 3, 5, 7 können aber nur einmal vorkommen. Bilden wir nun unter diesen Voraussetzungen die Summe mit möglichst kleinen Summanden, so erhalten wir:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 = 38,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46.$$

Eine Summe mit zehn Summanden mit der geforderten Eigenschaft ist also stets größer als 45.

Daher besteht jede Zerlegung des Rechtecks aus maximal neun kleinen Rechtecken. Unser Beispiel ist also eine Lösung.

Bemerkung: Die Summe $2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 45$ ist eine weitere Darstellung der Zahl 45 mit der geforderten Eigenschaft. Eine passende Zerlegung ist die folgende:

7				4	5
8	6	4	2		
		3			
	6				