Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg–August–Universität
Göttingen

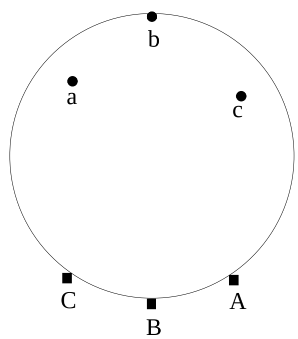
Beispiellösungen zu Blatt 16

Aufgabe 1

Bei Wintereinbruch haben sich Anton (a), Beate (b) und Christoph (c) als erste auf das Eis des zugefrorenen Dorfsees gewagt. Sie befinden sich an den in der Abbildung dargestellten Orten auf dem See.
Die Mütter der Kinder (A, B und C) sind zum See geeilt, weil sie in den Nachrichten folgende Meldung gehört haben:

> Achten Sie auf Ihre Kinder! Das Eis des Sees ist noch so dünn, dass es bei zweimaligem Betreten einer Stelle in jedem Fall bricht.

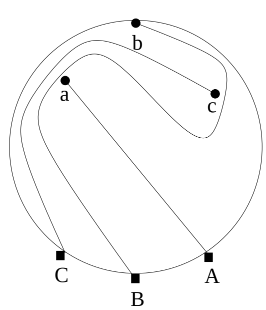
Können die Kinder unter diesen Bedingungen auf dem See eislaufend zu ihren jeweiligen Müttern gelangen, ohne dass eines von ihnen einbricht?

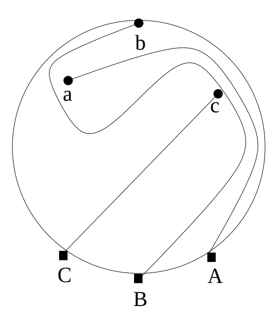


Hinweis: Die Kinder seien zu ihren jetzigen Standorten gelangt, ohne das Eis an einer anderen Stelle zu betreten, zum Beispiel indem sie vom Rand dorthin gesprungen sind.

Lösung:

Die Kinder können zu ihren Müttern gelangen, ohne einzubrechen.
Hierzu muss Beate aber - wie in den Abbildungen eingezeichnet - Anton und Christoph umkurven.





Aufgabe 2

Ist p eine Primzahl und auch $p+2$ eine Primzahl, so nennt man das Paar $(p, p+2)$ einen *Primzahlzwilling.*
Man betrachte solche Primzahlzwillinge, bei denen jede der beiden Primzahlen größer als 5 ist. Beweise, dass man dann die Summe der beiden Primzahlen stets als Produkt von wenigstens 4 natürlichen Zahlen, die größer oder gleich 2 sind, schreiben kann!
Beispiel: 107 *und* 109 *sind beide Primzahlen und es gilt:* $107 + 109 = 216 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$.

Lösung:

Nach Voraussetzung gilt $p > 5$. Damit sind die beiden Primzahlen ungerade. Für ihre Summe S gilt nun: $S = p + (p+2) = 2 \cdot (p+1)$. Da p ungerade ist, ist $(p+1)$ gerade. Demnach ist S durch $2 \cdot 2$ teilbar.
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p, p+1$ und $p+2$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da p und $p+2$ Primzahlen größer als 5 sind, können die beiden nicht durch 3 teilbar sein. Deshalb muss $p+1$ durch 3 teilbar sein. Somit ist ein dritter Faktor von S gefunden.
Es gilt: $S = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n = 12 \cdot n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$.
Wegen $p > 5$ ist $S > 12$, folglich ist $n > 1$.
Die Summe lässt sich also zerlegen in $p + (p+2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Aufgabe 3

Ein Mann erzählt einem Reporter folgende spannende Geschichte:

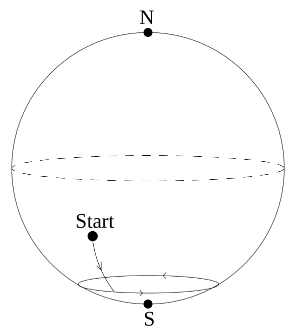
„… Ich war an diesem Tag zunächst von meiner Hütte aus 10 km nach Süden gelaufen, als mich ein Sturm überraschte. Sowie dieser abflaute, entschied ich mich, nun weiter in Richtung Osten zu laufen. Dies tat ich 10 km weit, als plötzlich ein riesiges Tier ganz in meiner Nähe auftauchte – zum Glück hatte ich meine Tarnjacke an, so dass mich das Tier nicht bemerkte. Nach diesem Schreck machte ich mich auf den Weg nach Norden und nach einer 10 km langen Wanderung in dieser Richtung erreichte ich wieder meine Hütte …“

Versuche, alle Orte auf der Erde zu bestimmen, an denen die Hütte des Abenteurers entsprechend dieser Geschichte stehen kann (es gibt mehrere!), und bestimme die Farbe der Jacke!

Lösung:

Wenn man nach Süden oder nach Norden geht, bewegt man sich entlang eines Meridians (Längengrads). Geht der Abenteurer nach Süden, so bleibt er auf dem Meridian seiner Hütte. Wendet er sich Richtung Osten, so verlässt er ihn und landet auf einem weiteren Meridian, auf dem er dann Richtung Norden zu seinem Ausgangspunkt zurück wandert. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die beiden Meridiane (der, auf dem er startet, und der, auf dem er zurückgeht) sich im Ausgangspunkt schneiden oder identisch sind.
Der erste Fall tritt nur ein, wenn die Hütte am Nord- oder Südpol steht. Am Südpol aber kann der Abenteurer nicht starten, da er von dort aus nicht

nach Süden gehen kann. Beginnt der Abenteurer jedoch seine Expedition am Nordpol, so endet diese auch wieder dort, da sich beim Wandern nach Osten der Abstand zum Nordpol nicht ändert.
Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn unser Abenteurer auf seinem Weg nach Osten die Erde n-mal umrundet (n ist dabei eine natürliche Zahl), das heißt, dass der durchwanderte Breitenkreis gerade den Umfang $10/n$ km hat. Solche findet man nur in der Nähe der Pole. Möchte der Wanderer die Oststrecke in der Nähe des Nordpols bewältigen, so muss sein Weg nördlicher liegen als im ersten Fall. Dazu müsste seine Hütte nördlicher als der Nordpol liegen, was natürlich nicht möglich ist. In der Nähe des Südpols gibt es andererseits zu jedem n einen Breitenkreis, der genau $10/n$ km als Umfang hat und den er durch seine Wanderroute erreicht. (vergleiche Bildchen)



Die Tarnjacke des Abenteurers hat auf jeden Fall die Farbe weiß, egal ob er am Nordpol oder in der Nähe des Südpols startet.

Aufgabe 4 — Weihnachtsaufgabe Weihnachten steht vor der Tür und somit auch die jedes Jahr kurz nach Weihnachten stattfindende *Rentieriade*. Alle Weihnachtsmänner messen sich dabei im Rentierschlittenrennen auf einer Stadionrunde.
Die Rentiere – von Natur aus faule und gefräßige Tiere – haben hierbei immer einen Futterkorb vor dem Maul, und sie laufen nur, solange darin noch Futter ist. Entlang der Stadionrunde sind in unregelmäßigen Abständen 17 Futterstationen eingerichtet, an denen die Futterkörbe nachgefüllt werden können. Auf diese Stationen hat die Jury (die Osterhasen) Futter verteilt, das insgesamt genau für eine Stadionrunde reicht. Die Menge an jeder Station legt sie für jeden Teilnehmer beliebig neu fest, und zwar insbesondere unabhängig davon, wie weit die jeweils nächste Station entfernt ist.
Jedem Teilnehmer wird sein Schlitten mit leerem Futterkorb an einem Punkt seiner Wahl bereitgestellt. Kann er stets – egal wie das Futter verteilt ist – eine der Stationen als Startpunkt so aussuchen, dass er mit seinem Schlitten die volle Stadionrunde schafft?

Lösung:

Dem Weihnachtsmann gelingt es stets, einen Startpunkt zu finden, von dem aus er die volle Stadionrunde schafft.

Angenommen, es gäbe keinen solchen Startpunkt. Betrachten wir eine Stelle 1, von der aus der Weihnachtsmann mindestens so viele Stationen erreicht wie von jedem anderen Anfangsort. Nummerieren wir die Stationen in Laufrichtung von 1 bis 17, so gelangt der Weihnachtsmann nach unserer Annahme dabei aber nicht bis zu seinem Startpunkt, sondern nur bis zu einer Station x, wobei $x \leq 17$. Nach der Wahl von Station 1 liegt an Station 17 nicht genügend Futter bereit, um zu Station 1 zu gelangen. Ansonsten würde der Weihnachtsmann von Punkt 17 aus alle Stationen erreichen, die er von Station 1 startend erreicht, was unserer Auszeichnung von Punkt 1 widerspricht. An Station 16 und 17 zusammen gibt es nicht so viel Futter, wie für die Schlittenfahrt von Station 16 zu 1 nötig wäre. Der Weihnachtsmann fände sonst an Station 16 so viel Futter, dass er bis zu Station 17 käme und noch genug übrig hätte, um von dort aus zu Station 1 zu gelangen. Entsprechend gibt es an den Stationen 15, 16, 17 zusammen nicht ausreichend Futter, um Station 1 anzufahren, und so weiter. Schließlich steht an den Stationen $x + 1$, $x + 2$, $\ldots$, 17 insgesamt weniger Futter zur Verfügung, als unser Weihnachtsschlitten braucht, um die Strecke von Station $x+1$ bis 1 zurückzulegen. Außerdem liegt an den Stationen 1 bis x nicht so viel Futter bereit, wie für die Strecke von Station 1 bis $x + 1$ benötigt wird. Insgesamt also gibt es an allen Stationen zusammen nicht ausreichend Futter, um die Runde zurückzulegen. Dies ist ein Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also war unsere Annahme falsch, und der Weihnachtsmann kann immer einen Startpunkt derart finden, dass er die ganze Runde durchfahren kann.