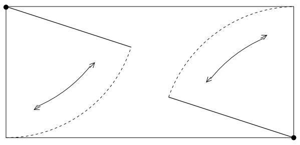
Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 17

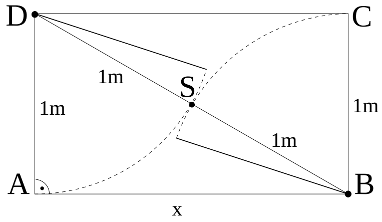
Aufgabe 1

Frau Porta hat in ihren 1 Meter breiten Flur zwei Türen eingebaut. Die Türen sind an gegenüberliegenden Ecken befestigt und nehmen jeweils die volle Breite ein (vergleiche Skizze). Glücklicherweise blockieren sich die beiden Türen nicht gegenseitig.
Wie lang ist ihr Flur mindestens?



Lösung:

Wenn der Flur die kürzestmögliche Länge hat, so müssen sich die Kreissegmente, die von den Türen beim Bewegen beschrieben werden, gerade berühren (vgl. Skizze).



Bei zwei sich berührenden Kreisen liegt aber der Berührpunkt auf der Geraden durch die zwei Kreismittelpunkte. In unserem Fall liegt also S auf der Geraden BD. Da S auf dem Kreis um D mit Radius 1 Meter und auf dem Kreis um B mit Radius 1 Meter liegt, hat die Strecke BD die Länge:

$$\overline{BD} = 1\text{m} + 1\text{m} = 2\text{m}.$$

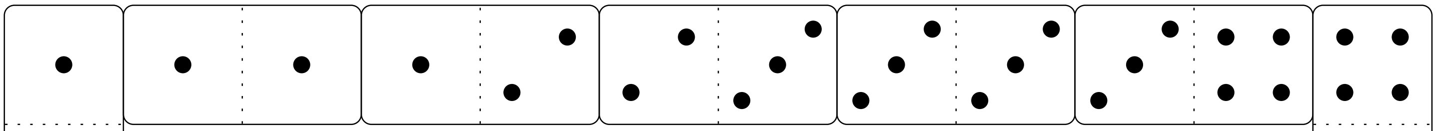
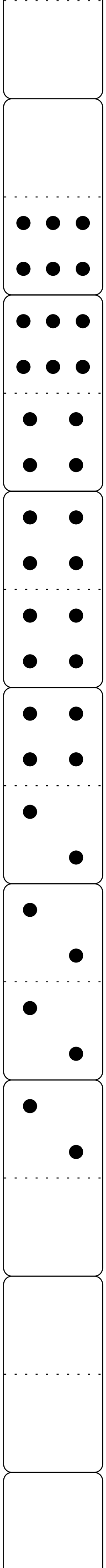
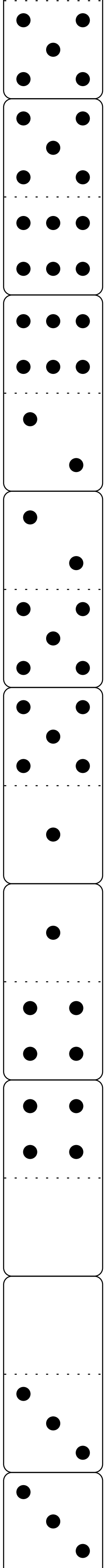
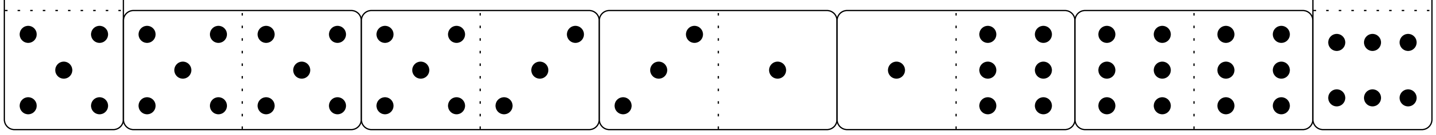
Nun lässt sich die Länge x (in Meter) des Flurs mit Hilfe des Satzes von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck BDA berechnen:

$$2^2 = 1^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 1 = 3$$

und daher

$$x = \sqrt{3} \approx 1{,}73\ .$$

Die Mindestlänge des Flurs beträgt also ca. 1,73 Meter.

Aufgabe 2

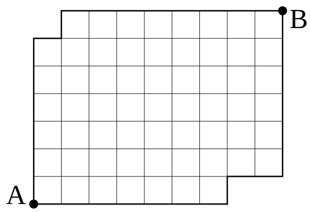
Ein handelsüblicher Dominostein besteht aus zwei Hälften, auf denen jeweils 0, 1, 2, … 5 oder 6 Punkte markiert sind. Zu einem Spiel gehören 28 Steine, wobei jede Kombination von Punktezahlen genau einmal auftritt. Kann man mit allen Dominosteinen eine Kette so basteln, dass aufeinanderstoßende Steinhälften stets die gleichen Punktezahlen tragen?
Gibt es eine solche Kette, bei der an den freien Enden die Punktezahlen jeweils 1 sind? Kann man erreichen, dass an einem Ende eine 1 und am anderen eine 6 liegt?

Lösung:

Wie in der Randabbildung dargestellt, kann man tatsächlich mit allen Steinen eine Kette legen, die sogar geschlossen ist.
Was passiert, wenn man den Ring an einer der Stellen auftrennt, an der zwei Steine mit Punktzahl 1 zusammentreffen? Dann erhält man eine Kette, die wie gewünscht an jedem freien Ende eine 1 als Punktzahl hat.
Bleibt die letzte Frage, nach der Kette mit 1 an dem einen und 6 am anderen Ende. So sehr man auch probiert, man wird keine Möglichkeit finden. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die Punktzahl 6 auf sechs Steinen einmal und auf einem Stein zweimal auftritt, insgesamt also achtmal. Genau einmal soll dies am Rand der Kette passieren und damit siebenmal im Inneren der Kette. Das kann aber nicht gehen, denn aneinanderstoßende Steinhälften müssen immer gleiche Punktzahlen tragen. Damit kann die Punktzahl 6 im Inneren der Kette nur geradzahlig oft auftreten, aber nicht siebenmal. Deshalb kann es keine Kette geben, die an einem Ende die Punktzahl 1 und am anderen Ende die Punktzahl 6 trägt.

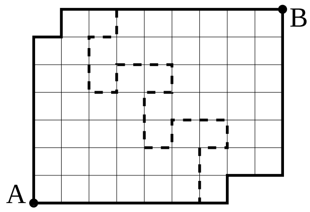
Aufgabe 3

Kann man die folgende Figur durch einen Schnitt entlang der Kästchenkanten in zwei kongruente Teile zerlegen, bei denen sich Ecke A und Ecke B entsprechen?

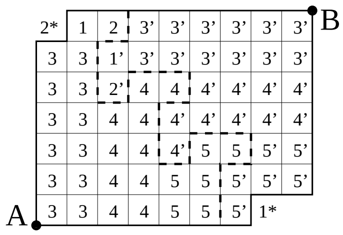


Lösung:

Man kann die Figur der Aufgabenstellung gemäß zerlegen.
Die Lösung ist in folgender Zeichnung dargestellt:



Und natürlich kann man dies auch logisch ableiten und muss sich nicht auf Glück beim Probieren verlassen; dies soll kurz erläutert werden:
Das Kästchen 1 ist in gerader Richtung sieben Kästchen von dem Kästchen bei B entfernt. Es gibt jedoch kein Kästchen, das von A aus sieben Kästchen in gerader Richtung entfernt ist. Daher muss 1 zu A gehören. B muss ein entsprechendes Kästchen besitzen. Wenn der Figurenteil von B aus dem Figurenteil zu A nur aus einer Drehung hervorginge, müsste dies 1* sein, was offensichtlich nicht geht. Daraus kann man aber noch nicht schließen, wie einige es getan haben, daß es keine Aufteilung gibt. Denn die Teile können auch aus einer Drehung und einer Spiegelung hervorgehen, und das entsprechende Kästchen ist dann $1'$.



Würde nun 2 zu B gehören, wäre 2* das entsprechende zu A gehörende Kästchen. Daher muss auch 2 zu A gehören und daher $2'$ zu B. Da es von A aus kein Kästchen oberhalb von 1 gibt, gibt es zu B kein Kästchen links von $1'$. Also gehören alle Kästchen 3 zu A und alle Kästchen $3'$ zu B.
Da die Kästchen $1'$, $2'$ und $3'$ nicht zu A gehören, gehören die Kästchen 4 nicht zu B, also zu A, und die $4'$ gehören zu B. Entsprechend erfolgen die Zuordnungen von 5 und $5'$ – fertig, wie eine Probe zeigt.

Aufgabe 4

Jemand rechnet das Produkt $42! = 42 \cdot 41 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ aus und schreibt das Ergebnis auf einen Zettel. Nach einigen Tagen stellt er fest, dass der Zettel nass geworden ist und drei Ziffern nicht mehr lesbar sind:

42! = 140500611775287989854[illegible]14260624[illegible]511569936384[illegible]00000000

Kann man die fehlenden Ziffern rekonstruieren, ohne das Produkt erneut ausrechnen zu müssen?

Lösung:

Es ist möglich, die fehlenden Ziffern zu rekonstruieren, ohne dass man das Produkt erneut ausrechnen muss.
Hierzu muss man sich etwas zu den Teilern von 42! überlegen und gewisse Teilbarkeitsregeln kennen.
Zuerst wird die Anzahl der Nullen berechnet, auf die die Zahl endet.
Also muss man berechnen, durch welche 10er-Potenz 42! teilbar ist, d. h. wie oft man nacheinander durch 10 ohne Rest teilen kann. Hierzu braucht man die Anzahl der Faktoren 2 und 5 in der Primfaktorzerlegung von 42!. Es ist $42! = 42 \cdot 41 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ und daher muss man nur die Anzahlen in den einzelnen Faktoren zählen und diese addieren. Jede gerade Zahl enthält einen Faktor 2. Jede durch $4 = 2 \cdot 2$ teilbare Zahl jedoch sogar zwei Faktoren 2 und so weiter. Anders ausgedrückt, erhält man die Gesamtzahl, wenn man alle geraden Zahlen zählt, für jede durch 4 teilbare Zahl nochmal 1 dazuzählt, für jede durch 8 teilbare Zahl noch einmal 1 dazuzählt und so weiter. Insgesamt sind es von 1 bis 42 genau 21 gerade Zahlen, zehn durch 4 teilbare Zahlen, fünf Zahlen, die durch 8 teilbar sind, zwei durch 16 und eine durch 32 teilbare Zahl. Damit tritt der Faktor 2 in der Primfaktorzerlegung von 42! genau $21 + 10 + 5 + 2 + 1 = 39$-mal auf. Entsprechend erhält man acht Zahlen, die durch 5 teilbar sind, und eine, die durch $25 = 5 \cdot 5$ teilbar ist. 42! hat also $8 + 1 = 9$-mal die 5 als Primfaktor. Sie endet also auf 9 Nullen, weshalb die letzte verwischte Ziffer eine Null gewesen ist.
Erste Möglichkeit, die anderen beiden Ziffern zu bestimmen:
Hier werden die Teilbarkeitsregeln für die Neun und für die Elf verwendet.
Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, wobei die alternierende Quersumme gebildet wird, indem man von der ersten Ziffer die zweite subtrahiert, dann die dritte Ziffer addiert, die vierte wieder subtrahiert und so weiter. Bezeichnet man nun die verwischten Ziffern mit a und x, so ergibt sich für die Quersumme

$$Q(42!) = 97 + a + 25 + x + 60 = a + x + 182$$

und für die alternierende Quersumme

$$AQ(42!) = 1 - 4 + 0 - \dots + 4 - a + 1 - \dots - 4 + x - 5 + \dots + 4 = -a + x - 34.$$

Da 42! durch 11 teilbar ist und -34 beim Teilen durch 11 den Rest -1 lässt, muss $-a + x$ durch 11 geteilt den Rest 1 lassen. Somit gilt $-a + x = 1$. (Wegen $0 \leq a,\ x \leq 9$ gilt $-9 \leq -a + x \leq 9$.) Damit gilt $x = a + 1$.
Da 42! durch 9 teilbar ist und 182 beim Teilen durch 9 den Rest 2 lässt, muss $a + x$ beim Teilen durch 9 den Rest 7 lassen. Wegen $0 \leq a,\ x \leq 9$ gilt somit $a + x = 7$ oder $a + x = 16$ und mit Hilfe der ersten Gleichung $a + a + 1 = 7$ oder $a + a + 1 = 16$, was gleichbedeutend ist zu: $a = 3$ oder $a = 7{,}5$.
Somit ist $a = 3$ und $x = 4$.

Es sind somit alle drei verwischten Ziffern bestimmt.

Zweite Möglichkeit, die anderen beiden Ziffern zu bestimmen:
Eine weitere Teilbarkeitsregel besagt, dass eine Zahl gerade ist, wenn die letzte Ziffer gerade ist, und dass eine Zahl durch 4 teilbar ist, wenn die Zahl, die aus den letzten zwei Ziffern gebildet wird, durch 4 teilbar ist. Dies liegt daran, dass eine Zahl, die auf zwei Nullen endet, durch $100 = 4 \cdot 25$ teilbar ist. (Z. B. ist $124 = 100 + 24$ durch 4 teilbar, weil 100 durch 4 teilbar ist und auch 24.) Daher ist eine Zahl durch 2^n teilbar, wenn die aus den letzten n Ziffern bestehende Zahl durch 2^n teilbar ist. Wir haben oben gesehen, dass 42! durch 2^{39} teilbar ist. Somit ist $\frac{42!}{10^9}$ durch 2^{30} teilbar. Wir können somit Informationen über die nächste verwischte Ziffer erhalten, weil die Zahl, die aus den letzten 15 Ziffern von $\frac{42!}{10^9}$ besteht, durch 2^{15} teilbar sein muss. (Hier werden sogar die letzten 15 Ziffern und nicht nur die letzten 13 Ziffern betrachtet, weil sich herausstellen wird, dass man sonst die verwischte Ziffer nicht eindeutig bestimmen kann.) Bezeichnen wir die fehlende Ziffer mit x, so können wir die Zahl, die aus den letzten 15 Ziffern gebildet wird, schreiben als:

$$240511569936384 + x \cdot 1000000000000 = 240511569936384 + x \cdot 10^{12}$$

Diese Zahl soll durch 2^{15} teilbar sein:

$$\begin{aligned}
&240511569936384 + x \cdot 10^{12} \\
=&8 \cdot (30063946242048 + x \cdot 10^9 \cdot 5^3) \\
=&2^6 \cdot (3757993280256 + x \cdot 10^6 \cdot 5^6) \\
=&2^9 \cdot (469749160032 + x \cdot 10^3 \cdot 5^9) \\
=&2^{12} \cdot (58718645004 + x \cdot 5^{12})
\end{aligned}$$

Da $58718645004 + x \cdot 5^{12}$ noch durch 8 teilbar sein soll und 58718645004 durch 4 teilbar ist, muss x durch 4 teilbar sein, d. h. $x = 4 \cdot y$ mit $y = 0, 1$ oder 2, da $0 \leq x \leq 9$. Damit ist

$$58718645004 + x \cdot 5^{12} = 4 \cdot (14679661251 + y \cdot 5^{12}).$$

Da jetzt $14679661251 + y \cdot 5^{12}$ gerade sein soll, ist somit y ungerade, also $y = 1$, und daher $x = 4$.
Um die letzte verwischte Ziffer zu bestimmen, benutzt man noch die Teilbarkeitsregel der Neun: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Bezeichnen wir die letzte fehlende Ziffer mit a, so ist die Quersumme von 42!:

$$Q(42!) = 97 + a + 89 = 186 + a$$

Da 186 beim Teilen durch 9 den Rest 6 lässt, muss also $a = 3$ gelten.

Es gilt daher

$$42! = 14050061177528798985\underline{3}14260624\underline{4}511569936384\underline{0}00000000\,.$$

Bemerkung: Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, die Ziffern zu bestimmen, wenn man andere Teilbarkeitsregeln benutzt.