Beispiellösungen zu Blatt 18

Aufgabe 1

Jemand bildet aus den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$ und 6 sechsstellige natürliche Zahlen, wobei jede der Ziffern genau einmal benutzt wird.
Kann unter diesen Zahlen eine Quadratzahl sein?

Lösung:

Eine sechsstellige natürliche Zahl, die aus den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$ und 6 gebildet wird, hat die Quersumme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Also ist sie durch 3 teilbar, aber nicht durch 9. Ist aber eine Quadratzahl n^2 durch 3 teilbar, so ist auch n durch 3 und damit n^2 sogar durch 9 teilbar. Es gibt folglich unter den betrachteten Zahlen keine Quadratzahl.

Aufgabe 2

Ein Holzwürfel hat die Seitenlänge 30 cm und soll in 27 kleinere Würfel mit der Kantenlänge 10 cm zersägt werden. Beim Zersägen wird in jedem Schritt ein gerader Schnitt ausgeführt, wobei aber eventuell auch mehrere vorhandene Teile übereinandergestapelt und somit gleichzeitig durchsägt werden können.
Wieviele Sägeschnitte muss man mindestens machen, um den großen Würfel vollständig in die kleinen zu zerlegen?

Lösung:

Sechsmal muss der Tischler sägen, um den Würfel zu zerlegen!
Der mittlere Würfel muss von allen Nachbarn getrennt werden. Für jede seiner sechs Seiten ist hierfür ein eigener Schnitt nötig. Somit braucht man mindestens sechs Schnitte.
Wir müssen nun noch zeigen, dass sechs Schnitte ausreichen. Zum Beispiel können wir den Würfel entlang der Seitenflächen des inneren Würfels zersägen, wobei wir abgetrennte Teile an ihrem Platz belassen.

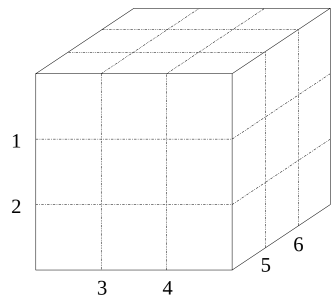


Abbildung 1: Zerschneiden des Würfels

Aufgabe 3

Ingolf und Anke wollen am Strand spielen und schlagen hierzu ihre Lager an den in der Lageskizze angegebenen Orten auf. Während Anke eine Sandburg bauen will, hat Ingolf nur deren Zerstörung im Sinn. Es geschieht Folgendes: Anke baut zunächst ihre Sandburg irgendwo am Strand und begibt sich dann wieder zu ihrem Lager. Ingolf versucht nun, mit seinem Fußball die Sandburg von seinem Standort aus zu treffen. Der Ball bewegt sich dabei auf einer geraden Linie mit einer konstanten Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sowie ihn Ingolf auf seine zerstörerische Reise geschickt hat, rennt Anke mit einer konstanten Geschwindigkeit von $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ los, um den Ball aufzuhalten.

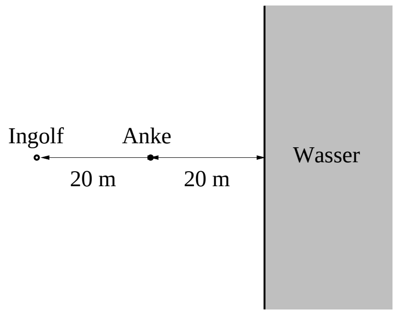


Abbildung 2: Am Strand

Versuche zunächst, einige Orte am Strand zu finden, an denen Anke bedenkenlos ihre Sandburg bauen kann, ohne deren Zerstörung befürchten zu müssen (weil sie den Ball rechtzeitig abfangen kann)!
Welches ist das maximale Gebiet, das Anke auf die beschriebene Weise von ihrem Platz aus verteidigen kann?

Lösung:

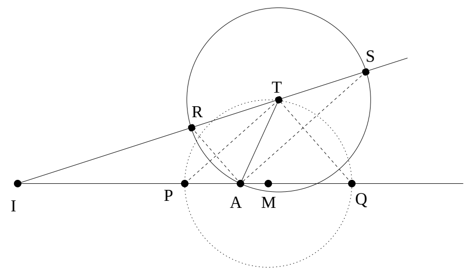
Wir bestimmen zunächst die Punkte, die Anke und Ingolfs Ball zur gleichen Zeit erreichen (bei maximalen Geschwindigkeiten).
Hierzu betrachten wir die nachfolgende Zeichnung: I und A seien die Standorte von Ingolf bzw. Anke. T sei ein Punkt, den Anke und Ingolfs Ball gleichzeitig erreichen, d.h. die Strecke $\overline{IT}$ ist dreimal so lang wie die Strecke $\overline{AT}$. Seien weiter P und Q die Punkte auf der Geraden IA, welche Anke und Ingolfs Ball gleichzeitig erreichen, wobei P zwischen I und A liege. Die Parallele zu PT durch A schneide die Gerade IT im Punkt S und die Parallele zu TQ durch A schneide die Gerade IT im Punkt R.
Nach dem ersten Strahlensatz gilt nun:

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{IT}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{IQ}} = \frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \quad \overline{RT} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IT} = \overline{AT}.$$

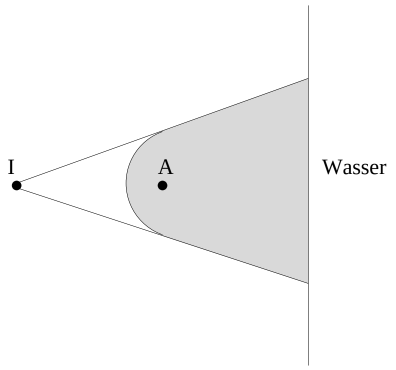
und

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{IT}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{IP}} = \frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \quad \overline{ST} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IT} = \overline{AT}.$$

R und S liegen also auf dem Kreis um T mit Radius $\overline{AT}$ oder anders betrachtet liegt dann A auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{RS}$. Nach dem Satz des Thales ist also der Winkel SAR ein rechter Winkel.
Da aber PT parallel zu AS und QT parallel zu AR sind, ist somit auch der Winkel PTQ ein rechter Winkel. T liegt somit auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{PQ}$. Umgekehrt kann man auch leicht zeigen, dass jeder Punkt auf diesem Kreis genau dreimal so weit von I wie von A entfernt ist.
Also bilden die Punkte, die Anke und Ingolfs Ball gleichzeitig erreichen, einen Kreis mit Durchmesser $\overline{PQ}$.



Treffpunkte



Der geschützte Bereich

Berechnungen der Strecken:

$$\overline{IA} = \overline{IP} + \overline{PA} = \overline{IP} + \frac{1}{3}\cdot\overline{IP} = \frac{4}{3}\cdot\overline{IP} \qquad \Longrightarrow \overline{IP} = \frac{3}{4}\cdot\overline{IA} = 15\text{m}$$

$$\overline{IA} = \overline{IQ} - \overline{AQ} = \overline{IQ} - \frac{1}{3}\cdot\overline{IQ} = \frac{2}{3}\cdot\overline{IQ} \qquad \Longrightarrow \overline{IQ} = \frac{3}{2}\cdot\overline{IA} = 30\text{m}$$

$$\overline{IM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{IQ} + \overline{IP}\right) = 22{,}5\text{m}$$

$$\overline{MP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{IQ} - \overline{IP}\right) = 7{,}5\text{m}$$

Alle Punkte innerhalb dieses Kreises kann Anke schneller erreichen als der Ball. Aber auch die Punkte, die zusätzlich in der Zeichnung schraffiert sind, sind sichere Standorte, da Anke den bösen Ball auf seinem Weg dorthin, der den Kreis in jedem Fall schneidet, rechtzeitig abfangen kann.

Bemerkung: Sind zwei verschiedenen Punkte A und B gegeben, so bilden diejenigen Punkte P, für die das Verhältnis der Abstände zu A und B einen konstanten Wert annimmt, einen Kreis, den sogenannten *Kreis des Apollonius* (Apollonius von Perga, 262-190 v.u.Z.).

Aufgabe 4

Asterix und Obelix werfen eine Münze (die neue Ein-Euro-Sesterze) und schreiben auf, in welcher Reihenfolge Adler (A) oder Zahl (Z) oben liegen. Asterix hat sich die Dreierfolge AAZ ausgesucht und Obelix die Folge ZAA. Sie werfen die Münze, bis eine der beiden Dreierfolgen auftaucht. Es gewinnt, wessen Folge erschienen ist.
a) Wirf selbst ein paar Mal eine Münze und schau nach, wer öfter gewinnt.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der Asterix gewinnt.
c) Wie ändern sich die Chancen, wenn Obelix als Folge AZA wählt?

Lösung:

Wenn Asterix die Dreierfolge AAZ und Obelix die Dreierfolge ZAA hat, gewinnt Asterix mit der Wahrscheinlichkeit 1/4. Das sieht man am besten wie folgt ein: Wenn zu Anfang zwei A hintereinander geworfen werden (das geschieht offensichtlich mit der Wahrscheinlichkeit 1/4), gewinnt Asterix, nämlich sowie das erste Z fällt. Fängt die Folge aber anders an, ist demnach schon ein Z geworfen worden. Sobald nun zum ersten Mal zwei A hintereinander geworfen werden (was für einen Gewinn von Asterix notwendig wäre), ist vorher schon ein Z geworfen worden, daher gewinnt nun Obelix.
Falls jetzt Obelix die Folge AZA gewählt hat, sieht die Sache etwas komplizierter aus. Es bezeichne x die Wahrscheinlichkeit, mit der Asterix gewinnt. Wie oben gewinnt Asterix, wenn zu Anfang zwei A geworfen werden (Wahrscheinlichkeit 1/4). Wenn zu Anfang AZA fällt, gewinnt Obelix. Fällt AZZ (Wahrscheinlichkeit 1/8), so kann keiner der beiden einen Rest dieser Kombination nutzen (da beide Gewinnkombinationen auf A anfangen) und daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn wie am Anfang. Gleiches gilt auch schon, wenn gleich zu Anfang ein Z geworfen wird (Wahrscheinlichkeit 1/2). Daher gilt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}x \\ \iff \quad x &= \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Hier gewinnt also Asterix mit größerer Wahrscheinlichkeit.