

Beispiellösungen zu Blatt 21

Aufgabe 1

Aus der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ der Kehrwerte der natürlichen Zahlen kann man leicht eine dreigliedrige arithmetische Teilfolge auswählen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Ebenso gibt es arithmetische Teilfolgen mit 4 Gliedern, z. B. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

- a) Finde arithmetische Teilfolgen mit 5 Gliedern und mit 6 Gliedern.
- b) Ist es möglich, für jede natürliche Zahl k eine arithmetische Teilfolge mit k Gliedern zu finden?

Hinweis: Eine Folge a_1, a_2, \dots, a_k heißt arithmetisch, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d. h. wenn $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{k-1} - a_k$ ist.

Lösung:

Es sei k die Länge der gesuchten arithmetischen Folge. Dann kann man beispielsweise die Folge

$$\frac{k}{k!}, \frac{k-1}{k!}, \dots, \frac{2}{k!}, \frac{1}{k!}$$

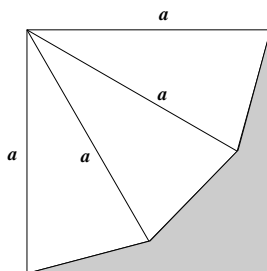
auswählen. Dabei ist $k!$ (sprich „ k Fakultät“) die mathematische Schreibweise für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

Jeden dieser Brüche kann man durch den Zähler kürzen, wonach im Zähler eine 1 stehen bleibt. Da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets $\frac{1}{k!}$ ist, hat man somit eine gesuchte Folge mit k Gliedern gefunden.

Aufgabe 2

Aus einem Quadrat mit Seitenlänge a werden drei deckungsgleiche gleichschenklige Dreiecke, so wie es die Skizze zeigt, herausgeschnitten.

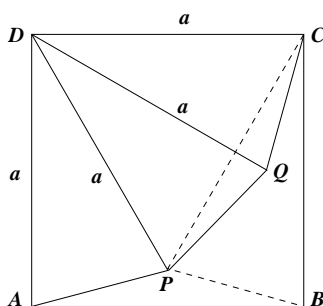
Welchen Flächeninhalt hat das Reststück?



Hinweis: Gesucht ist – der Schönheit wegen – eine Lösung, die ohne Benutzung der Winkelfunktionen (\sin , \cos , \tan , \cot) auskommt.

Lösung:

Die einzelnen Eckpunkte seien wie in nachstehender Zeichnung bezeichnet. Außerdem werden zusätzlich noch die Strecken \overline{PB} und \overline{PC} eingezeichnet. Anhand der neuen Zeichnung kann man vielleicht schon eine Vermutung aufstellen, und zwar scheinen die Dreiecke ABP und CPQ kongruent zu sein, weshalb das gesuchte Reststück den gleichen Flächeninhalt hätte wie das Dreieck PBC . Des Weiteren scheint das Dreieck PBC zu dem Dreieck APD kongruent zu sein. Demnach wäre der Flächeninhalt des Reststücks genauso groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks APD . Andererseits sind nach Voraussetzung die Dreiecke PQD und QCD ebenfalls kongruent zu dem Dreieck APD . Das Quadrat wäre somit in vier flächengleiche Stücke aufgeteilt. Daher betrüge der Flächeninhalt des Reststücks genau ein Viertel der Quadratfläche, also $\frac{a^2}{4}$.



Es wird nun gezeigt, dass sowohl die Dreiecke ABP und CPQ als auch die Dreiecke APD und PBC tatsächlich kongruent sind, womit der Flächeninhalt des Reststücks $\frac{a^2}{4}$ beträgt.

Nach Voraussetzung sind die Dreiecke APD , PQD und QCD kongruent, weshalb die Winkel $\angle ADP$, $\angle PDQ$ und $\angle QDC$ gleich und somit je 30° groß sind, da sie zusammen den rechten Winkel $\angle ADC$ bilden.

Das Dreieck PCD ist gleichschenkelig mit Scheitel D und Scheitelwinkel $\angle PDC = \angle PDQ + \angle QDC = 60^\circ$. Damit gilt für die Basiswinkel: $\angle CPD = \angle DCP = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$.

Das Dreieck PCD ist also sogar gleichseitig. Daher ist die Länge der Strecke \overline{CP} gerade a und der Winkel $\angle PCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Nach dem Kongruenzsatz *sws* sind also die Dreiecke APD und PBC kongruent. Weiter erhält man, dass $\overline{PB} = \overline{AP}$ ist. Also ist $\overline{AP} = \overline{CQ}$, $\overline{PB} = \overline{QP}$ und $\overline{AB} = \overline{CP}$. Somit sind auch die Dreiecke ABP und CPQ kongruent.

Aufgabe 3

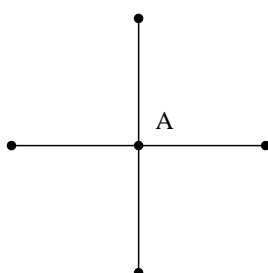
Paul fährt in den Urlaub nach Möwenland. Er weiß, dass es dort fünf Städte gibt, die durch ein Eisenbahnnetz verbunden sind, und zwar durch genau vier Strecken, die jeweils eine der Städte mit einer anderen verbinden. (Es kann auch sein, dass sich zwei Strecken kreuzen, indem dort eine Brücke errichtet wurde – Möwenland hat bekanntlich einige Berge.)

Wie viele verschiedene solcher Eisenbahnnetze kann es geben?

Lösung:

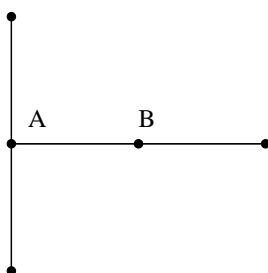
Die Anzahl der Eisenbahnnetze kann man mit einer Fallunterscheidung über die Zahl N der maximal in einer der Städte endenden Eisenbahnstrecken bestimmen. Da es insgesamt nur vier Strecken geben soll, ist $N \leq 4$. Die vier Bahnstrecken haben insgesamt acht Endpunkte, die sich auf die fünf Städte verteilen. Daher gibt es (nach Schubfachprinzip) auch eine Stadt, in der mindestens zwei Strecken enden. Folglich ist $N \geq 2$. Wir müssen somit die Fälle $N = 2$, $N = 3$ und $N = 4$ untersuchen

1. Fall: $N = 4$. In diesem Fall gibt es eine Stadt A , die direkt mit allen vier anderen Städten verbunden ist. Das Netz hat also folgende Form:



Für die Wahl von A hat man hierbei fünf Möglichkeiten. Es ergeben sich demnach fünf verschiedene solcher Eisenbahnnetze.

2. Fall: $N = 3$. Keine Stadt hat in diesem Fall vier direkte Nachbarn, aber eine Stadt A hat genau drei Städte, die direkt mit ihr verbunden sind. Die fünfte noch verbleibende Stadt muss dann direkt mit einer dieser drei Städte (sie sei B genannt) verbunden sein. Das Eisenbahnnetz hat dann die folgende Form:



Hierbei kann man zunächst A unter den fünf Städten beliebig wählen. Danach bleiben für B noch vier Möglichkeiten. Schließlich kann man unter den übrigen drei Städten noch beliebig diejenige bestimmen, die (außer A) noch direkt mit B verbunden sein soll. Zusammen ergibt dies in diesem Fall $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Netze der abgebildeten Form.

3. Fall: $N = 2$. In diesem Fall bilden die fünf Städte eine Kette wie in der folgenden Abbildung:



Für die erste Stadt A hat man dabei wieder fünf Möglichkeiten, für die zweite Stadt noch vier usw. bis zur letzten Stadt B , für die es nur noch eine Möglichkeit gibt. In dieser Zählung hat man aber jede mögliche Kette genau zweimal gezählt, und zwar einmal von A nach B und einmal von B nach A . Daher ergeben sich in diesem Fall genau $\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 60$ mögliche Eisenbahnnetze.

Zusammengenommen erhält man also $5 + 60 + 60 = 125$ verschiedene Eisenbahnnetze.

Aufgabe 4

Unser Grill ist zu klein: Auf dem Rost haben maximal zwei Steaks gleichzeitig Platz, wir wollen aber insgesamt drei Steaks grillen – und zwar in möglichst kurzer Zeit!

Für die einzelnen Teilschritte haben wir folgende Zeiten ermittelt:

Ein Steak braucht genau zweieinhalb Minuten, um von einer Seite gar zu werden, und noch einmal zweieinhalb Minuten für die andere Seite. Wir benötigen 15 Sekunden, um ein Steak auf den Grill zu legen oder vom Grill zu nehmen, genauso lange benötigt man auch, um ein Steak direkt auf dem Grill (also ohne Herunternehmen) zu wenden. Und ganz wichtig: Die Steaks müssen noch einseitig mit einer speziellen Sauce bestrichen werden, dazu müssen sie aber *mindestens* von einer Seite vollständig gegrillt sein. Das Bestreichen eines Steaks dauert genau eine Minute, kann allerdings nicht ausgeführt werden, solange das Steak auf dem Grill liegt (schließlich ist es über dem Grill ziemlich heiß). Man darf es aber anschließend wieder auf den Grill legen, wenn es noch nicht vollständig von der anderen Seite gegrillt ist. Es ist nicht möglich, zwei Steaks gleichzeitig zu bestreichen.

Zu Beginn ist der Grill schon heiß. Wie lange würdest du brauchen, bis alle drei Steaks einseitig mit Sauce bestrichen und beidseitig gegrillt sind?

Lösung:

Zugegeben – dieses Grill-„Problem“ hört sich zunächst weit hergeholt an. „Auf solche Ideen können nur Mathematiker kommen“, hat vielleicht der eine oder andere gedacht, „für die Praxis ist das völlig irrelevant.“

Doch damit liegt man falsch: Natürlich genießen auch die meisten Mathematiker ihren Grillabend lieber in Ruhe. Aber solche so genannten *Planungsprobleme* spielen in der Informatik und in der Industrie eine große Rolle. Wenn man bestimmte Arbeitsabläufe vorgegeben hat, dann möchte man diese in möglichst kurzer Zeit absolvieren, andererseits hat man aber auch nur eine begrenzte Anzahl von Maschinen zur Verfügung. Dasselbe Problem tritt auf,

wenn man mehrere Computer zur gemeinsamen Lösung einer Aufgabe verwenden will, auch hier müssen die einzelnen Arbeitsschritte optimal verteilt werden, damit alle Computer möglichst immer ausgelastet sind und nicht ständig auf das Ergebnis einer anderen Rechnung warten müssen.

Für so ein allgemeines Problem eine Lösung zu finden, ist schwierig – so schwierig, dass es länger dauern kann, die *optimale* Lösung zu finden, als der Vorgang selbst dann überhaupt dauert. Das gilt ja auch für unser Grillproblem: Wahrscheinlich habt ihr zum Finden eurer Lösung und zum Aufschreiben mindestens genauso lange gebraucht wie die Zeit, die ihr letztlich als minimale Grillzeit ermittelt habt.

Wir wollen deshalb einen anderen Weg gehen und fragen zunächst:

Wie viel Zeit brauchen wir eigentlich mindestens?

Damit können wir dann einschätzen, wie gut unsere Ergebnisse sind. Es kann nicht kürzer dauern als die ermittelte Zeit, vermutlich gibt es überhaupt keine Lösung, die so schnell ist. Aber je näher wir an diese Zeit herankommen, desto besser.

Jedes Steak muss von beiden Seiten jeweils zweieinhalb Minuten gegrillt werden. Das ergibt bei drei Steaks insgesamt

$$2 \cdot 2,5 \text{ min} \cdot 3 = 15 \text{ min} .$$

Da nur zwei Steaks auf den Grill passen, brauchen wir also mindestens 7,5 Minuten. Unabhängig davon, wie auch immer der genaue Ablauf sein wird – schneller können wir es auf keinen Fall schaffen. Und wir können diese sogenannte *untere Schranke* noch größer machen: Wenn ein rohes Steak auf den Grill gelegt oder ein fertiges heruntergenommen wird, kann gleichzeitig nur ein weiteres Steak auf dem Grill liegen. Das gleiche gilt, wenn wir ein Steak wenden. Die Transportvorgänge dauern also insgesamt mindestens

$$3 \cdot 15 \text{ s} \cdot 3 = 135 \text{ s} = 2 \text{ min } 15 \text{ s} .$$

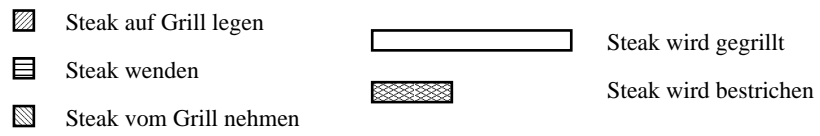
Wieder müssen wir diese Zeit durch 2 teilen, da ja jeweils nur ein Grillplatz blockiert wird. In der Summe erhalten wir also eine Mindestzeit von

$$(15 \text{ min} + 2 \text{ min } 15 \text{ s}) / 2 = 8 \text{ min } 37,5 \text{ s} .$$

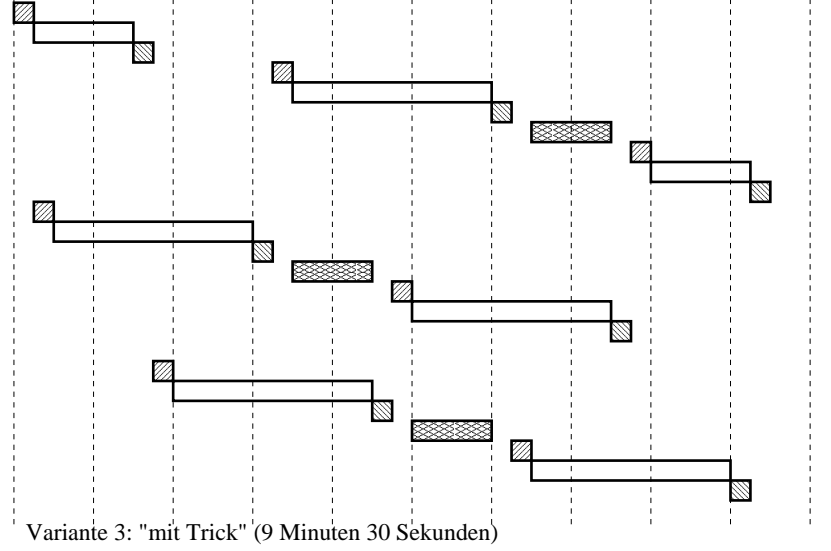
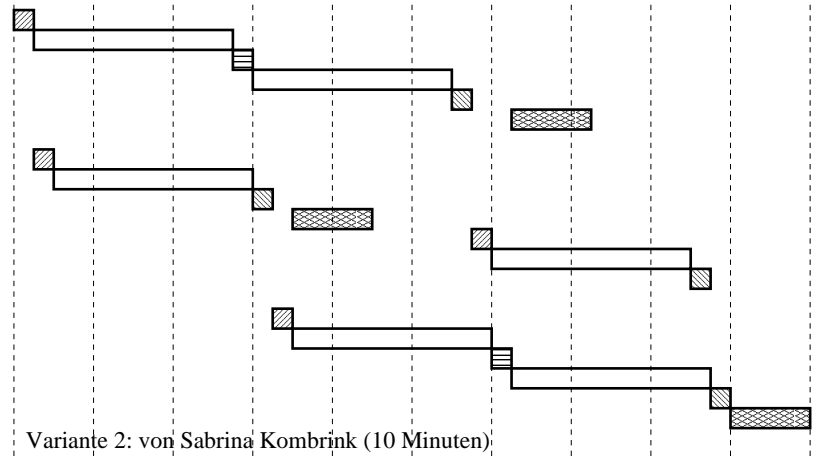
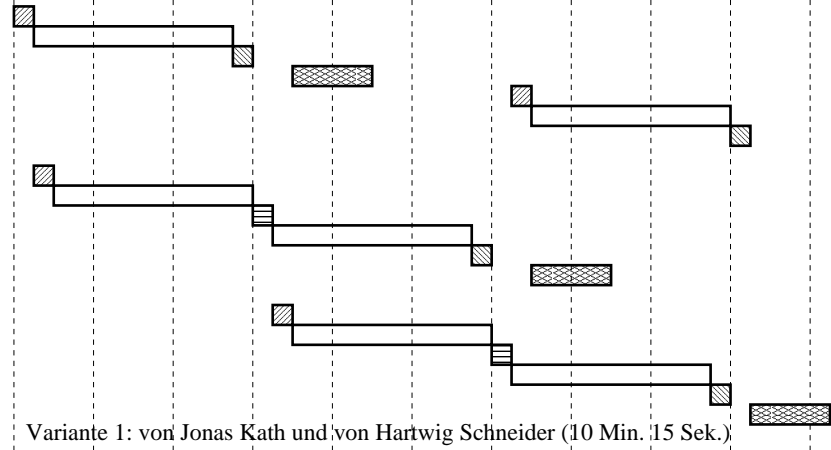
Wichtig ist: Es muss keine tatsächliche Abfolge geben, die diese Zeit erreicht. Das wahre Optimum kann also größer sein, aber auf keinen Fall kleiner.

Jetzt können wir einfach probieren, eine Lösung zu finden, die möglichst nahe an die Mindestzeit herankommt. Wir wissen dann zwar nicht, ob diese wirklich das Optimum ist, aber wir wissen zumindest, wie weit weg es höchstens sein kann.

Zwei sehr gute Lösungen sind in der Abbildung auf der nächsten Seite dargestellt. Die obere, von Jonas Kath ebenso wie von Hartwig Schneider, braucht 10 Minuten und 15 Sekunden, die mittlere, von Sabrina Kombrink, benötigt sogar nur 10 Minuten. Man kann zeigen (und das ist dann die Aufgabe der



0 min 2 min 4 min 6 min 8 min 10 min



Mathematiker), dass diese Lösung tatsächlich die beste ist, sofern man alle Seiten immer durchgehend grillt. Man sieht, dass der Grill immer voll ausgelastet ist, lediglich am Ende, wenn das dritte Steak bestrichen wird, scheinen noch Reserven zu liegen.

Mit einem „Trick“ kann man diese Reserve noch vermeiden: Man grillt die eine Seite von Steak 1 zunächst nur halb, dann braucht man insgesamt nur 9 Minuten und 30 Sekunden. Das ist schon sehr nahe an der unteren Schranke von 8 Minuten und 37,5 Sekunden. Man kann sogar zeigen, dass es nicht besser geht, indem man durch weitere Überlegungen wie oben die untere Schranke auf 9 Minuten 30 Sekunden vergrößert.