Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 23

Aufgabe 1

Auf einer Geburtstagsparty sind 97 Gäste eingeladen. Manche davon kennen sich, andere wiederum nicht (wie das meistens der Fall ist).
Zeige, dass es unter diesen Gästen (mindestens) zwei gibt, die die gleiche Zahl von Gästen kennen.

Lösung:

Nehmen wir an, die Gäste kennen jeweils verschiedene Anzahlen von Gästen. Da es 97 Gäste sind, kann ein Gast keinen, einen, zwei, ... oder 96 Gäste kennen. Dies sind gerade 97 Möglichkeiten. Somit muss jede dieser 97 Möglichkeiten (genau einmal) auftreten. Es gibt also einen Gast, der keinen anderen Gast kennt, und einen Gast, der 96 Gäste, d. h. alle anderen Gäste kennt. Dies ist offensichtlich nicht möglich, da diese zwei Gäste sich entweder kennen, dann kennt aber der erste Gast einen weiteren, oder sich nicht kennen, dann kennt aber der zweite Gast nicht alle anderen Gäste.
Unsere Annahme muss also falsch sein und daher gibt es zwei Gäste, die die gleiche Zahl von Gästen kennen.

Aufgabe 2

Marlene entdeckt eine hübsche Eigenschaft der Zahl 2002:
2002 liegt zwischen den Quadratzahlen $1936 = 44^2$ und $2025 = 45^2$, d. h. $1936 \leq 2002 < 2025$. Die Zahl $2002-(2002-1936)(2025-2002) = 484 = 22^2$ ist wieder eine Quadratzahl.
Welche natürlichen Zahlen haben die gleiche hübsche Eigenschaft?

Lösung:

Alle natürlichen Zahlen haben diese hübsche Eigenschaft.
Betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl m. Dann liegt m zwischen den Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$, das heißt, $n^2 \leq m < (n+1)^2$. Also kann man die gewünschte Zahl wie folgt berechnen:

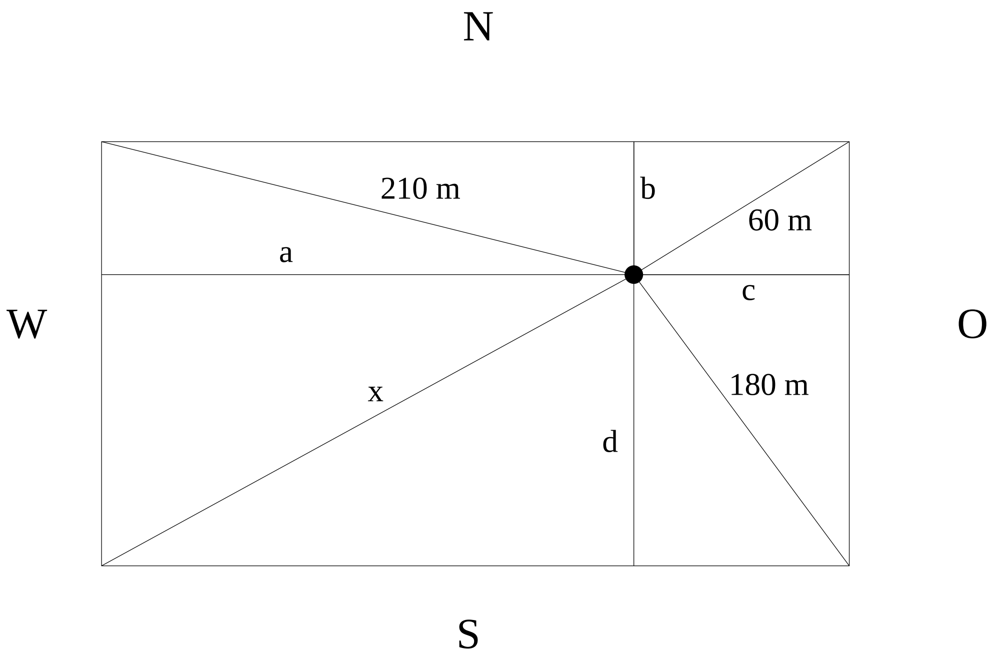
$$\begin{aligned}
&m - \left(m - n^2\right)\left((n+1)^2 - m\right)\\
&= m - \left(mn^2 + 2mn + m - m^2 - n^4 - 2n^3 - n^2 + mn^2\right)\\
&= \left(-2mn^2 - 2mn\right) + m^2 + \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)\\
&= -2m\left(n^2 + n\right) + m^2 + \left(n^2 + n\right)^2\\
&= \left(\left(n^2 + n\right) - m\right)^2
\end{aligned}$$

Also ist diese Zahl für alle natürlichen Zahlen eine Quadratzahl.

Aufgabe 3

Zur Geburt seines Sohnes pflanzt Freiherr vom Kiesel auf seinem Anwesen eine Eiche, und zwar an einer Stelle, die von der Nordwestecke der großen rechteckigen Rasenfläche 210 Meter und von der Südostecke 180 Meter entfernt ist. Von der Nordostecke hat der Baum einen Abstand von 60 Metern. Wie weit ist es von der Eiche bis zur vierten Ecke des Rasens?

Lösung:



Nach dem Satz des Pythagoras gelten folgende Gleichungen (Bezeichnungen siehe Skizze):

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 210^2\mathrm{m}^2 = 44100\mathrm{m}^2 \\ b^2 + c^2 &= 60^2\mathrm{m}^2 = 3600\mathrm{m}^2 \\ c^2 + d^2 &= 180^2\mathrm{m}^2 = 32400\mathrm{m}^2 \\ d^2 + a^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Also gilt zum einen

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 44100\mathrm{m}^2 + 32400\mathrm{m}^2$$

und zum anderen

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3600\mathrm{m}^2 + x^2.$$

Damit: $x^2 = 44100\mathrm{m}^2 + 32400\mathrm{m}^2 - 3600\mathrm{m}^2 = 72900\mathrm{m}^2$.
Wegen $270^2 = 72900$ ist daher die gesuchte Länge: $x = 270$ Meter.

Aufgabe 4

Jemand schreibt in einem ersten Schritt die Zahl 1 auf ein Blatt Papier und fügt dann schrittweise immer die Ziffern der nächsten natürlichen Zahl an. Nach 11 Schritten steht auf dem Papier also die Zahl 1234567891011. Wie oft während der ersten 99 Schritte steht auf dem Papier eine durch 11 teilbare Zahl?

Lösung:

Es sei $\mathrm{aq}(n)$ die *alternierende Quersumme* der (natürlichen) Zahl n; sie wird gebildet, indem man von rechts beginnend die Ziffern der Zahl abwechselnd addiert und subtrahiert (anders gesagt: mit alternierendem Vorzeichen addiert). Beispiel: $\mathrm{aq}(44576) = 6 - 7 + 5 - 4 + 4 = 0$.
Nun bedienen wir uns der Teilbarkeitsregel für 11 mit Hilfe der alternierenden Quersumme: Eine natürliche Zahl n lässt beim Teilen durch 11 denselben Rest wie ihre alternierende Quersumme. Insbesondere ist eine Zahl genau dann durch 11 teilbar, wenn es ihre alternierende Quersumme ist.
Die ersten gebildeten Zahlen müssen „von Hand“ getestet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{aq}(1) &= 1,\\
\mathrm{aq}(12) &= 1,\\
\mathrm{aq}(123) &= 2,\\
\mathrm{aq}(1234) &= 2,\\
\mathrm{aq}(12345) &= 3,\\
\mathrm{aq}(123456) &= 3,\\
\mathrm{aq}(1234567) &= 4,\\
\mathrm{aq}(12345678) &= 4,\\
\mathrm{aq}(123456789) &= 5,\\
\mathrm{aq}(12345678910) &= 4.
\end{aligned}$$

In den folgenden Schritten werden jeweils zwei Ziffern hinzugefügt. Das heißt, dass die vorher schon vorhandenen Ziffern denselben Anteil zur alternierenden Quersumme liefern wie beim Schritt vorher. Hinzugefügt wird der Anteil der neuen beiden Ziffern, und dies ist äquivalent dazu, den Rest beim Teilen durch 11 zu addieren. Es hat also

$$\begin{array}{lll}
12\ldots1011 & \text{denselben Rest wie} & 4+0=4, \\
12\ldots1112 & \text{denselben Rest wie} & 4+1=5, \\
12\ldots1213 & \text{denselben Rest wie} & 5+2=7, \\
12\ldots1314 & \text{denselben Rest wie} & 7+3=10, \\
12\ldots1415 & \text{denselben Rest wie} & 10+4=14, \text{ dies entspricht } 3, \\
12\ldots1516 & \text{denselben Rest wie} & 3+5=8, \\
12\ldots1617 & \text{denselben Rest wie} & 8+6=14, \text{ dies entspricht } 3, \\
12\ldots1718 & \text{denselben Rest wie} & 3+7=10, \\
12\ldots1819 & \text{denselben Rest wie} & 10+8=18, \text{ dies entspricht } 7, \\
12\ldots1920 & \text{denselben Rest wie} & 7+9=16, \text{ dies entspricht } 5, \\
12\ldots2021 & \text{denselben Rest wie} & 5+10=15, \text{ dies entspricht } 4.
\end{array}$$

Da es jetzt wieder – wie elf Schritte zuvor – mit einer durch 11 teilbaren Zahl weitergeht und derselbe Rest vorliegt wie damals, wiederholt sich das Schema immer wieder, so dass unter den ersten 99 Zahlen keine durch 11 teilbare Zahl ist.