

Beispiellösungen zu Blatt 24

Aufgabe 1

Man beweise, dass man ein Quadrat für jede Zahl $n \geq 6$ in genau n kleinere Quadrate zerlegen kann!

Lösung:

Wir geben einfach für jedes $n \geq 6$ eine Zerlegung an.

Sei zunächst $n = 2m$ eine gerade Zahl mit $m \geq 3$. Dann ist folgende Zerlegung eines jeden Quadrates in $2m$ kleinere Quadrate möglich:

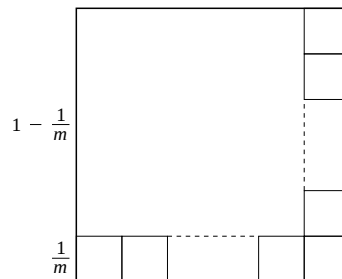


Abbildung 1: Eine Zerlegung für gerades n ($n = 2m$)

Dabei liegen unten bzw. rechts jeweils m kleine Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ nebeneinander. Insgesamt haben wir das Quadrat somit in $2m - 1 = n - 1$ kleine Quadrate und ein größeres Quadrat (der Seitenlänge $1 - \frac{1}{m}$) zerlegt.

Für ungerades $n = 2m + 1$ mit $m \geq 3$ gibt es zum Beispiel folgende Zerlegung:

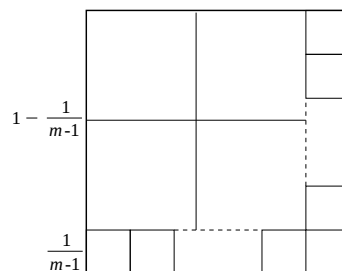


Abbildung 2: Eine Zerlegung für ungerades n ($n = 2m + 1$)

Diesmal haben die kleinen Quadrate die Seitenlänge $\frac{1}{m-1}$, so dass wir insgesamt $2(m-1) - 1 = n - 4$ von ihnen erhalten. Das übrig bleibende große Quadrat wird in vier Quadrate unterteilt.

Damit ist alles gezeigt.

(Es gibt natürlich noch viele weitere Möglichkeiten zum Zerlegen.)

Aufgabe 2

Kurz vor Weihnachten plant der Weihnachtsmann die Route, auf der er am Weihnachtsabend mit seinem von Rentier Rudolf gezogenen Schlitten einige der 64 Häuser des Städtchens Schneeberg besuchen will. Er fährt entlang des Straßennetzes auf gerader Linie von Haus zu Haus und weiß aus der Erfahrung der vergangenen Jahre, dass es, je leichter der Schlitten wird, immer schwerer wird, den Rentierschlitten mit dem immer enthusiastischer werdenden Rudolf abzubremsen. Deswegen muss er die Route so planen, dass der Weg vom aktuellen zum nächsten Haus immer länger ist als der Weg vom vorherigen Haus zum aktuellen.

Wie viele verschiedene Häuser kann der Weihnachtsmann auf diese Weise höchstens besuchen und wie lang ist sein Weg dabei maximal?

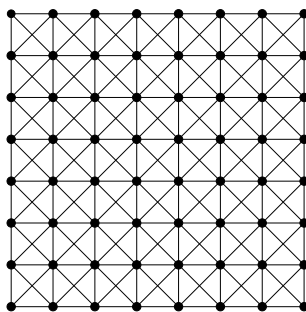


Abbildung 3: Das Straßennetz in Schneeberg (die Punkte stellen die Häuser dar)

Lösung:

Entlang des Straßennetzes sind vertikale, horizontale und diagonale Bewegungen möglich. Hierbei können nur folgende Streckenlängen in Frage kommen, wobei als Einheit der Abstand zweier vertikal bzw. horizontal direkt benachbarter Häuser genommen wurde: $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 3, 4, 3\sqrt{2}, 5, 4\sqrt{2}, 6, 7, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 7\sqrt{2}$. Wie man leicht nachrechnet, sind diese Längen schon nach wachsender Größe geordnet. Ein Weg maximaler Länge kann diese Längen also höchstens je einmal enthalten, ist demnach höchstens so lang wie die Summe dieser Strecken, d. h. $28 \cdot (1 + \sqrt{2})$.

Nun wird gezeigt, dass bei einer erlaubten Route nicht alle der vier Streckenlängen $7, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 7\sqrt{2}$ vorkommen können.

Kämen diese nämlich alle vor, so müssten sie in dieser Reihenfolge aufeinander folgend vorkommen. Der letzte Weg hätte daher die Länge $7\sqrt{2}$; er verlief somit von einer Ecke Schneebergs zur diagonal gegenüberliegenden Ecke. Der vorletzte und der drittletzte Weg könnten dann aber nur auf derselben Diagonalen verlaufen sein; der drittletzte Weg (der Länge $5\sqrt{2}$) würde dann insbesondere in einem inneren Punkt (Nicht-Eckpunkt) der Diagonalen beginnen. Es gibt aber keinen Weg der Länge 7, der in einem solchen Punkt endet, denn die Länge 7 wird nur durch horizontale bzw. vertikale Wege von einem Rand des Ortes zum gegenüberliegenden Rand realisiert. Also können

tatsächlich nicht alle vier der größtmöglichen Weglängen in einer Route vorkommen.

Eine erlaubte Route besteht daher höchstens aus 13 Wegen (und besucht 14 Häuser) und hat höchstens die Länge

$$28 \cdot (1 + \sqrt{2}) - 7 = 21 + 28\sqrt{2}$$

(da wir mindestens einen der Wege der Länge ≥ 7 auslassen müssen, müssen wir von der Summe aller möglichen Teilstrecken mindestens die Länge 7 subtrahieren).

Eine erlaubte Route mit diesen Werten wird im Folgenden angegeben.

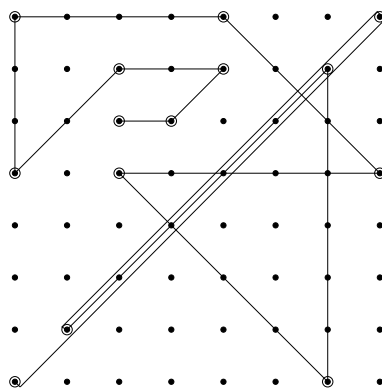


Abbildung 4: Eine Route der Länge $21 + 28\sqrt{2}$, die 14 Häuser besucht

Aufgabe 3

Untenstehendes Bild zeigt ein *multiplikativ-magisches Quadrat*. Man sieht, dass die Produkte der drei Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und den beiden Diagonalen gleich sind, und zwar 64.

8	4	2
1	4	16
8	4	2

Diese *magische Konstante* 64 ist interessanterweise eine Kubikzahl, also $64 = 4^3$.

Finde weitere multiplikativ-magische Quadrate mit ganzzahligen Einträgen und bestimme jeweils die magische Konstante! Versuche zu beweisen, dass diese magische Konstante immer eine Kubikzahl ist!

Lösung:

Zunächst einige Beispiele von magischen Quadraten:

729	2187	9
3	243	19683
6561	27	81

5	1	25
25	5	1
1	25	5

18	1	12
4	6	9
3	36	2

Angenommen, wir haben ein multiplikativ-magisches Quadrat mit den ganzzahligen Einträgen a bis j wie in folgendem Bild und mit magischer Konstante $N > 0$:

a	b	c
d	e	f
g	h	j

Dann gelten insbesondere die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 abc &= N \\
 ghj &= N \\
 aej &= N \\
 beh &= N \\
 ceg &= N.
 \end{aligned}$$

Multipliziert man die letzten drei Gleichungen, so erhält man:

$$(abc)(ghj)e^3 = N^3.$$

Zusammen mit den ersten beiden Gleichungen folgt daraus direkt $e^3 = N$. Also ist N eine Kubikzahl.

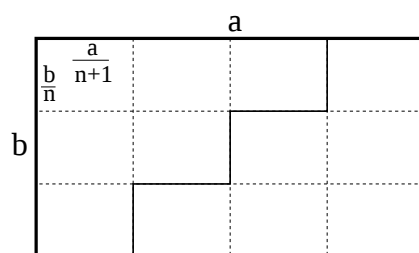
(Übrigens kann man auf ganz analogem Wege zeigen, dass die magische Konstante eines additiv-magischen Quadrates durch 3 teilbar ist.)

Aufgabe 4

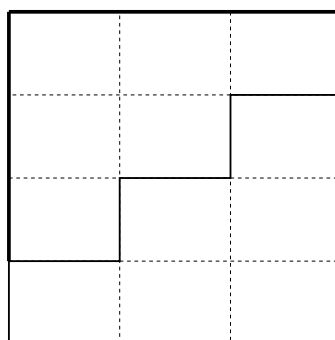
Ein Rechteck, dessen Seiten a und b im Verhältnis $a : b = (n+1)^2 : n^2$ stehen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, nennen wir ein *Zerlege-Rechteck*. Zeige, dass man jedes Zerlege-Rechteck in zwei Teile zerschneiden kann, die sich zu einem Quadrat zusammenfügen lassen.

Lösung:

Zunächst kann man ein solches Zerlege-Rechteck in $(n+1)n$ Rechtecke mit den Seitenlängen $\frac{a}{n+1}$ und $\frac{b}{n}$ unterteilen, indem man die Seiten a und b in $n+1$ bzw. n gleiche Teile teilt. Auf dem dadurch entstehenden Gitter zerschneide man das Rechteck in Treppenform, wie es in folgendem Bild für den Fall $n = 3$ angedeutet ist:



Verschiebt man nun das rechte Teil um eine „Treppenstufe“ nach links unten, so erhält man offenbar ein neues Rechteck:



Im Fall eines allgemeinen n hat dieses dann die Seitenlängen $n \cdot \frac{a}{n+1}$ und $(n+1) \cdot \frac{b}{n}$. Wegen $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ gilt $n \cdot \frac{a}{n+1} = (n+1) \cdot \frac{b}{n}$. Daher ist das aus den beiden Teilen neu zusammengesetzte Rechteck ein Quadrat.