μathematischer
Korrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 25

Aufgabe 1

Ein Bleistift, ein Radiergummi und ein Spitzer kosten zusammen genau einen Euro. Außerdem kostet ein Spitzer mehr als zwei Bleistifte, drei Bleistifte kosten mehr als vier Radiergummi und drei Radiergummi kosten mehr als ein Spitzer.

Wie viel kostet ein Bleistift, wie viel ein Radiergummi und wie viel ein Spitzer?

Hinweis: Alle Preise sind natürlich ganzzahlige Cent-Beträge.

Lösung:

Seien B, R und S die Preise von Bleistift, Radiergummi bzw. Spitzer in Cent. Dann erhält man aus dem Text folgende Gleichung und Ungleichungen:

$$\begin{aligned} B+R+S &= 100 && (1)\\ S &> 2\cdot B && (2)\\ 3\cdot B &> 4\cdot R && (3)\\ 3\cdot R &> S && (4) \end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen (2) und (3) erhält man noch

$$S > \frac{8}{3}\cdot R$$

und aus (2) und (4) erhält man

$$B < \frac{3}{2}\cdot R.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 100 = B+R+S &> \frac{4}{3}\cdot R + R + \frac{8}{3}\cdot R = 5\cdot R\\ \Longrightarrow \qquad 20 &> R \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 100 = B+R+S &< \frac{3}{2}\cdot R + R + 3\cdot R = \frac{11}{2}\cdot R\\ \Longrightarrow \qquad R &> \frac{200}{11} = 18 + \frac{2}{11} \end{aligned}$$

Da R ganzzahlig ist, ist somit $R = 19$.

Nun berechnen wir S durch Abschätzen von oben und von unten:

$$\begin{aligned} 100 = B + R + S &> \frac{4}{3} \cdot 19 + 19 + S \\ \Longrightarrow \qquad S &< 100 - \frac{4}{3} \cdot 19 - 19 = 55 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 100 = B + R + S &< \frac{1}{2} \cdot S + 19 + S \\ \Longrightarrow \qquad S &> \frac{2}{3} \cdot (100 - 19) = 54 \end{aligned}$$

Somit gilt $S = 55$. Aus der Gleichung (1) folgt nun: $B = 100 - 19 - 55 = 26$. Eine Probe zeigt, dass $B = 26, R = 19$ und $S = 55$ alle drei Ungleichungen erfüllen.

Aufgabe 2

Neunundzwanzig Bowlingkugeln rollen in einer langen Röhre hintereinander (nicht notwendig in gleichem Abstand) mit konstanter Geschwindigkeit von links nach rechts. Ihnen rollen weitere neunundzwanzig Bowlingkugeln mit derselben Geschwindigkeit von rechts nach links entgegen.
Sobald zwei Bowlingkugeln zusammenstoßen, macht es laut „Pling“ und die beiden Kugeln rollen in entgegengesetzter Richtung mit derselben Geschwindigkeit weiter.

Wie viele „Plings“ kann ein aufmerksamer Zuhörer registrieren, wenn keine zwei „Plings“ gleichzeitig erklingen?

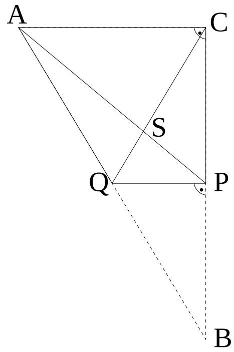
Lösung:

Um die Plings besser zählen zu können, stellen wir uns die Situation ein wenig anders vor: Wenn zwei Kugeln zusammenstoßen, erzeugen sie nicht nur ein Pling, sondern sie tauschen (auf welche Weise auch immer) blitzschnell die Plätze und rollen dann einfach in ihrer vorherigen Richtung weiter.
Die Konfiguration der Kugeln mit dieser neuen Eigenschaft im Rohr ist nun zu jedem Zeitpunkt dieselbe, wie die Konfiguration der Kugeln wäre, wenn sie sich ganz normal abstoßen würden.
Dies wird sofort klar, wenn man sich überlegt, dass in beiden Fällen vor einem Pling zwei Kugeln mit einer gewissen (gleichen, aber entgegengesetzten) Geschwindigkeit aufeinander zu rollen und nach dem Pling (das in beiden Fällen zum gleichen Zeitpunkt ertönt) zwei Kugeln mit derselben Geschwindigkeit vom Ort der Erzeugung des Plings in entgegengesetzter Richtung wegrollen.
Also ist die zu bestimmende Anzahl an Plings in beiden Szenarien dieselbe. In dem Fall, dass die Kugeln einfach ihre Positionen tauschen, ist aber klar, dass jede der 29 von links kommenden Kugeln genau auf 29 von rechts kommende Kugeln trifft. Es gibt also genau $29 \cdot 29 = 841$ Plings.

Aufgabe 3

Ein rechtwinkliges Dreieck aus Papier wird entlang einer Geraden so gefaltet, dass eine Ecke des Dreiecks auf der Ecke mit dem rechten Winkel zu liegen kommt. Der Umriss der so entstandenen Figur ist dann ein Viereck. In welchem Verhältnis schneiden sich die Diagonalen dieses Vierecks?

Lösung:



Bezeichnen wir die Ecken des Dreiecks mit A, B und C wie in der Skizze. Die Ecke B werde nun auf die Ecke C, bei der der rechte Winkel liegt, gefaltet. Die Punkte P und Q auf den Seiten BC bzw. AB sollen auf der Faltkante liegen. Da beim Falten B auf C zu liegen kommt, ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und die Gerade (PQ) ist senkrecht zu BC. Somit ist (PQ) parallel zur Strecke AC.
Nach dem zweiten Strahlensatz ist daher
$\overline{PQ} : \overline{BP} = \overline{CA} : \overline{BC}$, d. h. $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA}$.
Nach dem zweiten Strahlensatz (jetzt mit Zentrum S) gilt weiter:
$\overline{QP} : \overline{SQ} = \overline{AC} : \overline{SC}$, d. h. $\overline{SQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC}$.
Genauso (oder nun nach dem ersten Strahlensatz) gilt: $\overline{SP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SA}$.
Die Diagonalen schneiden sich also jeweils im Verhältnis $2 : 1$.

Aufgabe 4

Finde alle fünfstelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die vierstellige Zahl, die aus n durch Streichen der mittleren Ziffer entsteht, ein Teiler von n ist.

Lösung:

Sei n eine der gesuchten Zahlen und seien ihre Ziffern a, b, c, d und e.
Es ist also $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$. Die Zahl, die man durch Streichen der mittleren Ziffer (c) erhält, ist somit: $m := 1000a+100b+10d+e$. Diese ist jetzt ein Teiler von n oder gleichbedeutend dazu ist n ein Vielfaches von m.
Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} 11 \cdot m &= 11000a + 1100b + 110d + 11e \\ &= n + 1000a + 100b + 100d + 10e - 100c > n, \end{aligned}$$

denn $1000a + 100b + 100d + 10e \geq 1000 > 100c$.
Außerdem:

$$9 \cdot m = 9000a + 900b + 90d + 9e = n - 1000a - 100b - 100c + 80d + 8e < n,$$

denn $1000a + 100b + 100c \geq 1000 > 800 + 80 > 80d + 8e$.
Damit gilt: $n = 10 \cdot m = 10000a + 1000b + 100d + 10e$ und daher erhalten wir durch Vergleichen der Ziffern: $e = 0$, $d = e$ und $c = d$.
Die einzigen Zahlen n, die die Bedingung erfüllen können, enden also auf drei Nullen. Wie man sofort sieht, ist für diese Zahlen die Bedingung aber auch erfüllt.
Also sind dies alle fünfstelligen Zahlen, die die Bedingung erfüllen.