

Beispiellösungen zu Blatt 29

Aufgabe 1

Entscheide jeweils, welche der beiden Zahlen die größere ist!

a) $\sqrt{32} + \sqrt{98}$ oder $\sqrt{50} + \sqrt{72}$?

b) $\sqrt{28} + \sqrt{82}$ oder $\sqrt{33} + \sqrt{74}$?

Der Taschenrechner mag sofort eine Antwort liefern; aber wir – als Mathematiker mit hohem Ehrgefühl – verlassen uns natürlich nicht auf die Rechengenauigkeit dieses seelenlosen Gerätes, sondern suchen eine Lösung ohne technische Hilfsmittel!

Lösung:

a) Hier sind beide Zahlen gleich groß. Dies kann man folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned}\sqrt{32} + \sqrt{98} &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} \\ &= 4 \cdot \sqrt{2} + 7 \cdot \sqrt{2} \\ &= 11 \cdot \sqrt{2} \\ &= 5 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 2} \\ &= \sqrt{50} + \sqrt{72}.\end{aligned}$$

b) Gibt man beide Terme in einen gewöhnlichen Taschenrechner mit 8-stelliger Anzeige ein, so ergeben beide Terme den Wert 14,346888. Man könnte also, wie im ersten Teil der Aufgabe, wieder vermuten, dass beide Zahlen gleich sind.

Dies ist jedoch falsch und zeigt einmal mehr, wie die beschränkte Rechengenauigkeit eines Taschenrechners zu falschen Vermutungen führen kann.

Hier nun also die exakte (zugegebenermaßen etwas längliche) Rechnung, die gleich in der logisch richtigen Reihenfolge aufgeschrieben ist (die Lösungsfindung erfolgte „natürlich“ in der umgekehrten Reihenfolge):

$$\begin{aligned}144 \cdot 28 \cdot 82 &= 330624 < 330625 = 575^2 \\ \Rightarrow 12 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} &< 575 \\ \Rightarrow 9 + 12 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} + 4 \cdot 28 \cdot 82 &< 575 + 9 + 4 \cdot 28 \cdot 82 = 4 \cdot 33 \cdot 74 \\ \Rightarrow (3 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82})^2 &< (2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74})^2 \\ \Rightarrow 3 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} &< 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74} \\ \Rightarrow 28 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} + 82 &< 33 + 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74} + 74 \\ \Rightarrow (\sqrt{28} + \sqrt{82})^2 &< (\sqrt{33} + \sqrt{74})^2 \\ \Rightarrow \sqrt{28} + \sqrt{82} &< \sqrt{33} + \sqrt{74}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Damals im Wilden Westen: Smith, Miller und Jones triellieren sich. Zu Beginn wird per Los bestimmt, wer als Erster, Zweiter und Dritter schießen darf. Dann nimmt jeder seine Position in jeweils einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks ein. Reihum darf jeder – sofern er noch lebt – genau einen Schuss abfeuern, und zwar in eine beliebige Richtung. Alle wissen, dass Smith jedes Mal sein Ziel trifft, Miller mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit und Jones nur zu 50 Prozent.

Das Triell ist zu Ende, wenn nur noch einer lebt. Jeder wählt natürlich die für sich optimale Strategie. Wie sind die Gewinnchancen jedes Teilnehmers?

Lösung:

Wir betrachten zunächst – soweit möglich – die optimalen Strategien der einzelnen Spieler. Dabei muss man in der Argumentation ein wenig aufpassen, denn die Strategien hängen unter Umständen voneinander ab.

Sobald einer der Kontrahenten getroffen wurde, ist die Situation jeweils klar: die beiden anderen werden aufeinander zielen. Vorher aber ist etwas Überlegen vonnöten.

Falls Smith, der beste Schütze, noch die Auswahl aus beiden anderen hat, wird er nicht auf den schlechtesten Schützen, Jones, zielen, denn dann wird als Nächstes der bessere der beiden anderen Schützen, Miller, auf ihn schießen, und das heißt, dass er eine schlechtere Überlebenschance (20 %) hätte, als wenn er (Smith) Miller erschießt und dann Jones auf ihn zielt (50 %). Es bliebe noch die Überlegung, ob es sich für Smith lohnen kann, in die Luft zu schießen.

Wenn Miller noch die Auswahl hat, macht es für ihn keinen Sinn, auf Jones zu schießen, denn wenn Jones tot ist, wird als nächstes Smith auf ihn schießen und natürlich auch treffen. Daher wird Miller entweder auf Smith zielen oder in die Luft schießen.

Sofern Jones noch eine Auswahl hat, wird er nicht auf Miller schießen, denn wenn er trifft, wird er selbst sofort darauf von Smith erschossen. Sollte er auf Smith zielen und ihn treffen, gibt es das Duell Miller – Jones, und Miller ist an der Reihe. Die Überlebenschance für Jones ist dann $1/9$ (Rechnung siehe unten). Wenn er dagegen in die Luft schießt (oder auch nicht trifft), gibt es noch drei Fälle:

- a) Entweder erschießt Smith Miller. Dann ist Jones an der Reihe, schießt auf Smith und trifft mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit. Trifft er nicht, wird er von Smith erschossen. Seine Überlebenschance beträgt also immerhin 50 %.
- b) Oder es erschießt Miller Smith. Dann gibt es das Duell Jones – Miller, wobei Jones beginnt; dieses überlebt Jones zu $5/9$ (Rechnung siehe unten).
- c) Oder es passiert gar nichts. (Denn wie oben gezeigt, wird keiner auf

Jones schießen.) Dieser Fall kann nur auftreten, wenn Smith in die Luft schießt.

In jedem Fall steht Jones besser da, als wenn er Smith trifft, also sollte er in die Luft schießen.

Nun zurück zu Smith und Miller. Jeder möchte ja das Triell lebend *verlassen*. Also werden nicht beide bis in alle Ewigkeit in die Luft schießen.¹

Da Smith also weiß, dass irgendwann Miller auf ihn schießen wird, wird er nicht in die Luft schießen, denn wenn Miller tot ist, hat Smith eine Überlebenschance von 50 Prozent, wenn aber Miller später auf ihn schießt, nur von höchstens 20 Prozent.

Da nun Smith mit seinem ersten Schuss Miller erschießen würde, wird Miller nicht darauf warten, sondern auf Smith schießen, wenn er an der Reihe ist, denn offenbar hat er eine bessere Überlebenschance, wenn Jones auf ihn zielt. Folglich wird außer Jones keiner in die Luft schießen.

Damit kommen wir zur Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten. Zunächst interessiert das Duell Miller – Jones. Wenn Miller beginnt, ist er in 80 % der Fälle sofortiger Überlebender. In den restlichen 20 % trifft zu gleichen Teilen Jones bzw. es hat keiner getroffen und es geht wieder von vorne los. Damit stehen die Chancen von Miller und Jones im Verhältnis 8 zu 1, sie sind also 8/9 bzw. 1/9.

Wenn Jones beginnt, ergibt sich entsprechend ein Verhältnis der Chancen von Jones und Miller von 5 zu 4, sie sind demnach 5/9 bzw. 4/9.

Berechnen wir nun die Überlebenswahrscheinlichkeiten insgesamt:

- i) Smith beginnt. Er erschießt Miller, dann schießt Jones auf ihn. Dies überlebt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (und erschießt dann Jones, ist also Sieger). Jones überlebt ebenso mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; Miller gar nicht.
- ii) Miller beginnt. Er schießt auf Smith. Wenn er trifft (zu 80 Prozent), gibt es das Duell Jones – Miller, Jones beginnt. Wenn Miller nicht trifft (in 20 Prozent der Fälle), ist die Situation wie in i), denn sollte davor noch Jones an der Reihe sein, wird dieser ja in die Luft schießen. Die Wahrscheinlichkeiten sind also für Smith: $8/10 \cdot 0 + 2/10 \cdot 1/2 = 1/10$; für Miller: $8/10 \cdot 4/9 + 2/10 \cdot 0 = 32/90$; für Jones: $8/10 \cdot 5/9 + 2/10 \cdot 1/2 = 49/90$.

¹Wir haben hier ein interessantes, paradox klingendes Phänomen: Falls sich einer von beiden dafür entscheidet, nur in die Luft zu schießen, müsste auch der andere in die Luft schießen. Denn sonst würde er sich unnötig ernstlicher Lebensgefahr aussetzen. (Solange beide nur in die Luft schießen, passiert niemandem etwas, denn Jones greift ohnehin nicht ein. Sobald jedoch einer tot ist, wird keiner mehr in die Luft schießen.)

In dieser erstmal sehr gut klingenden Strategie ist jedoch ein Kreisschluss enthalten: In die Luft zu schießen, lohnt sich für einen Cowboy nur, wenn es auch der *später* schießende Gegner tun wird. Dessen Verhalten ist aber nicht vorherzusagen.

Diese mathematische Sackgasse lässt sich durch ein Argument „von außen“ lösen; im Wilden Westen z. B. dadurch, dass unsere Cowboys schießwütig sind, den anderen nicht trauen und nicht so lange am Kampfplatz bleiben wollen, dass sie verdursten, also wie gesagt möglichst das Duell *verlassen* wollen.

- iii) Jones beginnt. Da er in die Luft schießt, sind wir mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit in Fall i) und mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit in Fall ii), je nachdem, wer als Nächster dran ist.

Da jeder mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ beginnt, setzt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit also zu gleichen Teilen aus den Wahrscheinlichkeiten der ersten beiden Fälle zusammen. Das ergibt:

- Smith hat eine Chance von $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/10 = 27/90 = 0,3$.
- Miller hat eine Chance von $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 32/90 = 16/90 = 0,1777 \dots$
- Jones hat eine Chance von $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 49/90 = 47/90 = 0,5222 \dots$

Und die Moral von der Geschicht' (Zitat von Zirkelteilnehmer Manuel Hohmann): „Nicht nur beim Kampf gegen Drachen, sondern auch im Wilden Westen sind Mathematikkenntnisse wichtiger fürs Überleben als der Umgang mit Schwert und Colt.“

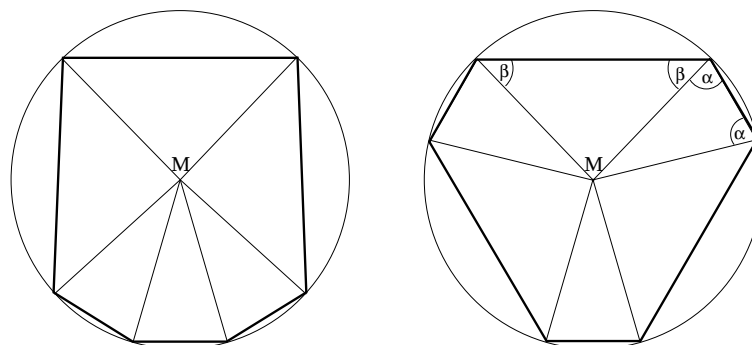
Aufgabe 3

Ein Mathematikerorden will ein Wappen für sich entwerfen. Über die äußere Form des Wappens besteht bereits Einigkeit: Es soll ein Sechseck sein, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und bei dem drei aufeinander folgende Seiten die Länge 2 haben und die drei anderen die Länge 5.

Welchen Radius muss eine kreisrunde Metallplatte mindestens haben, um aus ihr ein solches Wappen ausschneiden zu können?

Lösung:

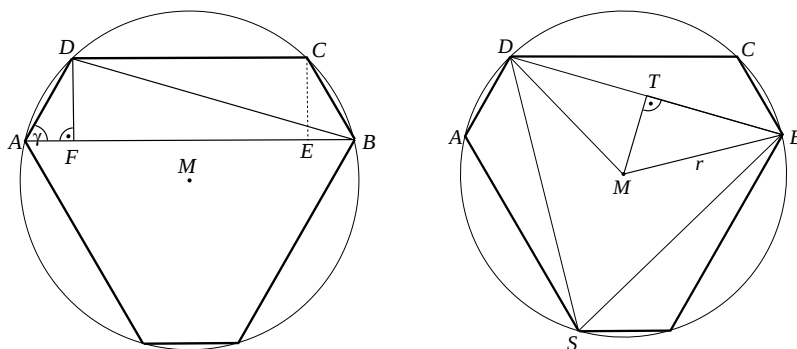
Bevor wir irgendetwas berechnen, „zerlegen“ wir unser Wappen und setzen es neu zusammen: Wir verbinden die sechs Eckpunkte mit dem Mittelpunkt M des Kreises und erhalten so sechs gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel alle die Länge r und deren Basis die Länge 2 bzw. 5 haben. Diese Dreiecke ordnen wir jetzt wie in der zweiten Skizze abwechselnd – eines mit Basis 2, dann wieder eines mit Basis 5 – an. Diese Umordnung ändert nichts an der Größe des Kreises.



Die Basiswinkel in den Dreiecken mit Basis 2 seien α , die Basiswinkel in den Dreiecken mit Basis 5 seien β . Dann erhält man für die Summe der Winkel am

Mittelpunkt M : $3 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \alpha) + 3 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \beta) = 6 \cdot (180^\circ - \alpha - \beta)$. Andererseits ist der volle Umfang ja gerade 360° . Somit gilt $360^\circ = 6 \cdot (180^\circ - \alpha - \beta)$, also $\alpha + \beta = 120^\circ$.

Betrachten wir das Dreieck $ABCD$ (siehe folgende Skizze). Da die Winkelsumme in jedem Viereck 360° ist und die Winkel an C und D jeweils $\alpha + \beta = 120^\circ$ betragen, gilt für den Winkel γ an A bzw. an B : $\gamma = \frac{1}{2}(360^\circ - 2 \cdot 120^\circ) = 60^\circ$. Da $\angle DFA$ ein rechter Winkel ist, ist das Dreieck AFD ein „halbes gleichseitiges“ Dreieck, somit folgt, dass AF die Länge $\frac{1}{2}|AD| = 1$ hat, und FD hat nach dem Satz von Pythagoras die Länge $|FD| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



Aus Symmetriegründen folgt, dass $|EB| = 1$ gilt, daher hat FB die Länge $5 + 1 = 6$ (es ist $CDFE$ ein Rechteck und somit $|FE| = |DC| = 5$). Nach Pythagoras² hat dann die Strecke BD die Länge $\sqrt{6^2 + 3} = \sqrt{39}$.

Es ist BDS ein gleichseitiges Dreieck. Damit ist der Höhenfußpunkt T im Dreieck MBD der Mittelpunkt der Seite BD , und BTM ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel 30° an B und 60° an M . Auch dieses Dreieck können wir als Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks – wie auch schon oben das Dreieck AFD – betrachten: Es folgt zuerst $|MT| = \frac{1}{2}|MB|$ und dann mit Pythagoras die Beziehung³: $|TB| = \sqrt{|MB|^2 - |MT|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|MB|$.

Mit Hilfe von $|TB| = \frac{1}{2}\sqrt{39}$ erhalten wir damit für den gesuchten Radius

$$r = |MB| = \sqrt{13}.$$

Also muss die Metallplatte mindestens einen Radius von $\sqrt{13}$ Längeneinheiten haben.

²Diese Länge kann man auch ohne diese Vorüberlegungen unter Benutzung des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (in einem Dreieck mit den Standardbezeichnungen) berechnen: Im Dreieck BCD ergibt sich: $|BD|^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos 120^\circ = 29 - 20(-\cos 60^\circ) = 29 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 39$.

³Diese Beziehung können wir auch unter Benutzung von Winkelfunktionen berechnen: $\frac{|TB|}{|MB|} = \sin 60^\circ$, also $|TB| = \sin 60^\circ |MB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |MB|$.

Aufgabe 4

- a) Gibt es paarweise verschiedene Ziffern a, b und c so, dass je zwei der dreistelligen Zahlen, die sich aus diesen drei Ziffern bilden lassen, zueinander teilerfremd sind?
- b) Wie lautet die Antwort, wenn man vier verschiedene Ziffern nimmt und alle vierstelligen Zahlen betrachtet, die sich aus diesen Ziffern bilden lassen?
- c) Wie lautet die Antwort bei 5, 6, ... verschiedenen Ziffern?

Beispiel zu a): Wählt man die drei Ziffern 1, 3 und 9, so erhält man die sechs Zahlen: 139, 193, 319, 391, 913 und 931.

Nun ist zwar 139 zu jeder der anderen teilerfremd und ebenso 193, aber 319 und 913 sind beide durch 11 teilbar ($319 = 11 \cdot 29$ und $913 = 11 \cdot 83$). Somit sind 319 und 913 nicht teilerfremd und die drei Ziffern erfüllen die Bedingung nicht.

Lösung:

Für die Frage a) lautet die Antwort „ja“, für die Fragen b) und c) lautet sie jeweils „nein“.

Wie man schnell nachrechnen kann, bilden die Ziffern 1, 3 und 7 eine Lösung. Die Zahlen 137, 173 und 317 sind nämlich Primzahlen und es ist $371 = 7 \cdot 53$, $713 = 23 \cdot 31$ und $731 = 17 \cdot 43$. Ebenso bilden die Ziffern 3, 7 und 9 eine Lösung, da 379, 397, 739 und 937 Primzahlen sind und $793 = 13 \cdot 61$ und $973 = 7 \cdot 139$ gilt.

Wir werden jetzt zeigen, dass dies sogar die einzigen möglichen Tripel sind. Dies war zwar in der Aufgabe nicht gefragt, aber die Methode, die anderen Tripel auszuschließen, zeigt auch, dass es mit vier und mehr Ziffern keine Lösung gibt.

Nehmen wir an, wir hätten Ziffern a, b, c mit der gesuchten Eigenschaft und eine der Ziffern, zum Beispiel c , wäre gerade, dann sind die Zahlen abc und bac beide gerade, d. h. sie haben den gemeinsamen Teiler 2. Also müssen alle Ziffern ungerade sein. Ist nun eine Ziffer gleich 5, so sind die Zahlen $ab5$ und $ba5$ beide durch 5 teilbar und somit wieder nicht teilerfremd. Als mögliche Ziffern bleiben also nur 1, 3, 7 und 9.

Dieselbe Überlegung führt dazu, dass auch für die mehrstelligen Zahlen nur diese vier Ziffern zur Verfügung stehen. Somit muss Frage c) verneint werden. Für Frage b) muss nur das Ziffernquadrupel (1, 3, 7, 9) untersucht werden und für Frage a) die Zifferntripel (1, 3, 7), (3, 7, 9) (siehe oben), (1, 3, 9) (siehe Beispiel) und (1, 7, 9). Die Zahlen 791 ($= 7 \cdot 113$) und 917 ($= 7 \cdot 131$) sind aber beide durch 7 teilbar.

Bei den vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 3, 7 und 9 sind zum Beispiel 1397, 3179, 7931 und 9713 alle durch 11 teilbar.